

Superconduttività III

Nicola Semprini Cesari

- Transizioni di fase
 - Modellizzazione delle transizioni di fase del II ordine
 - Teoria fenomenologica di Landau-Ginzburg (LG)
 - Soluzione delle equazioni di LG in assenza di campi elettromagnetici
 - Soluzione delle equazioni di LG in presenza di campi elettromagnetici
-

Negli anni '30 Landau studiò a fondo le proprietà generali delle transizioni di fase del II ordine una classe di transizioni che ricorrono assai spesso nella materia condensata. Nel 1950 Landau e Ginzburg proposero di descrivere la transizione conduttore-superconduttore come una transizione di fase del II ordine ottenendo una teoria fenomenologica di grande impatto nei successivi sviluppi teorici sulla superconduttività. Nei decenni seguenti ci si è resi progressivamente conto che transizioni di fase del II ordine ricorrono anche in fisica delle particelle dove sono più spesso indicati col nome di meccanismi di rottura spontanea della simmetria. Il meccanismo di Higgs per la creazione della massa dei bosoni vettori, i condensati di QCD (modelli chirali) per la creazione della massa degli adroni, sono stati sviluppati partendo dalla teoria di Landau Ginzburg della superconduttività. In tempi recenti si è realizzato che nei superconduttori e nell' elio 3 superfluido sono replicati gli stessi meccanismi che operano nella cosmologia e nei modelli di sviluppo dell'universo. I migliori teorici ci stanno lavorando, gli esperimenti di alta energia non hanno proposto nulla.

Fase

Dato un *sistema termodinamico* si definisce *fase* un insieme di stati del sistema nei quali le grandezze fisiche variano con continuità.

Esempi:

- ▶ fasi solide, liquide e gassose della materia;
- ▶ plasma (parte degli atomi o molecole della materia sono ionizzati, agiscono forze elettromagnetiche su tutto il sistema fisico, ricorrono fenomeni tipici, filamentazione etc. etc., plasma più comune il fuoco);
- ▶ quark-gluon-plasma (ad alte densità la tendenza delle interazioni forti a formare coppie o triplette di quark confinati, ovvero mesoni e barioni, può essere superata e si ottiene un sistema di quark e gluoni in mutua interazione. Primi istanti di vita dell'universo);
- ▶ condensato di bose-einstein (un sistema di bosoni a bassissima temperatura collassa nello stesso stato quantico, prodotto in laboratorio nell'università del Colorado nel 1995 da E. Cornell C. Wieman)
- ▶ condensati fermionici (a bassissime temperature, coppie di fermioni si uniscono a formare bosoni i quali collassano nello stesso stato quantico, superconduttività, superfluidità, ma anche particella sigma, modelli tecnicolor, etc.etc.)

Transizioni di fase

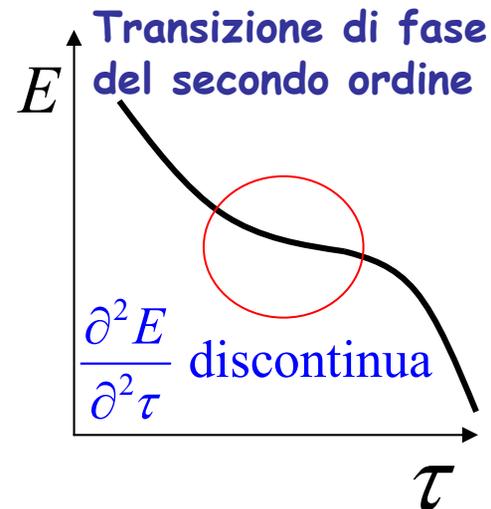
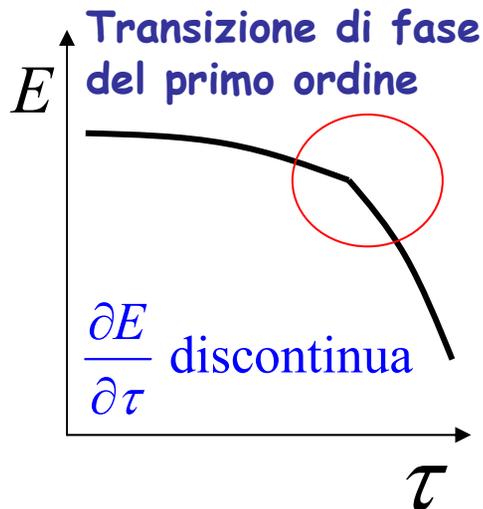
Un *sistema termodinamico* subisce una *transizione di fase* quando passa da una fase ad un'altra ed in tale passaggio una o più delle sue variabili termodinamiche cambiano bruscamente.

Esempi

- ▶ Scaldando un liquido al di sopra della temperatura di ebollizione T_e il sistema passa dalla fase liquida a quella gassosa. In questo passaggio la densità varia bruscamente.
- ▶ Raffreddando un ferromagnete al di sotto della temperatura di Curie T_c si ha il fenomeno della magnetizzazione spontanea (nuova fase). In questo passaggio la simmetria del sistema varia bruscamente (infatti prima tutte le direzioni spaziali sono equivalenti, se il ferromagnete è isotropo, dopo esiste la direzione privilegiata della magnetizzazione spontanea).
- ▶ Raffreddando l'universo al di sotto di una certa temperatura critica T_c si ha il fenomeno della generazione spontanea del campo di Higgs (nuova fase). In questo passaggio la simmetria del sistema varia bruscamente (infatti prima le interazioni elettrodeboli godono della simmetria di gauge ed i suoi mediatori sono privi di massa, dopo il campo di higgs distrugge la simmetria di gauge ed i suoi mediatori, accoppiandosi con tale campo, acquistano massa).
- ▶ Raffreddando il quark-gluon plasma al di sotto di una certa temperatura critica T_c si permette alle coppie quark antiquark di unirsi in bosoni (condensazione di fermioni) e di formare il mesone sigma (nuova fase). In questo passaggio la simmetria del sistema varia bruscamente (infatti prima le interazioni cromodinamiche godono della simmetria chirale ed i quark sono privi di massa, dopo la sigma distrugge tale simmetria ed i quark, accoppiandosi con la sigma, acquistano massa. Generazione della massa degli adroni la vera sorgente della massa della materia!).
- ▶ Raffreddando un superconduttore al di sotto della temperatura critica T_c si annulla la resistività e si espelle l'eventuale campo magnetico (effetto Meissner) (nuova fase). In questo passaggio qualcosa cambia bruscamente (cosa lo vedremo più avanti).

Classificazione delle transizioni di fase

La prima classificazione delle transizioni di fase fu proposta da *Ehrenfest* ed era basata sull'ordine della derivata della energia del sistema, espressa in funzione delle variabili termodinamiche, che risultava discontinua.



Ora però si preferisce adottare una nuova classificazione:

un sistema termodinamico subisce una *transizione di fase del primo ordine* se durante la transizione il sistema assorbe o cede energia

un sistema termodinamico subisce una *transizione di fase del secondo ordine* (transizione di fase continua) se durante la transizione il sistema non assorbe o cede energia

esiste una terza classe di transizioni di fase dette *transizioni di fase di ordine infinito*.

Caratteristiche generali delle transizioni di fase

In una *TF del I ordine* viene scambiata energia, poiché gli scambi di energia non possono essere istantanei le varie parti del sistema lo fanno con tempi diversi il che comporta forti gradienti nella concentrazione di energia (turbolenza), avvengono quindi in tempi diversi anche i cambiamenti di fase per cui coesistono per un certo tempo fasi differenti (fase mista), (Es. nella transizione liquido gas si osservano moti turbolenti, miscuglio di liquido e vapore sotto forma di bollicine). Tali TF sono le più difficili da studiare.

In una *TF del II ordine* non viene scambiata energia per cui non si hanno gradienti nella sua concentrazione all'interno del sistema il quale passa interamente da una fase all'altra (assenza della fase mista) (Es. transizione ferromagnetica, superconduttiva e la maggior parte delle transizioni di fase in fisica delle particelle). Sono le più semplici da studiare.

Cambiamenti di simmetria nelle transizioni di fase

Spesso (non sempre), in una transizione di fase, le due fasi coinvolte possiedono differenti proprietà di simmetria. In questi casi la transizione di fase comporta anche un brusco cambiamento delle proprietà di simmetria (rottura della simmetria).

Esempi

- ▶ In una transizione di fase liquido-solido la distribuzione di materia inizialmente continua si organizza in un reticolo cristallino. Nella fase liquida sussiste dunque una simmetria per traslazioni continue che scompare nella fase solida (in questa fase sussiste una simmetria per traslazioni discrete). La transizione di fase comporta dunque la rottura della simmetria delle traslazioni continue (TF del I ordine).
- ▶ In un ferromagnete portato al di sotto della temperatura di curie T_c compare il fenomeno della magnetizzazione spontanea (transizione di fase). Inizialmente il sistema è simmetrico per rotazioni continue attorno ad un asse arbitrario. Tale simmetria sparisce nella fase ferromagnetica a causa della magnetizzazione spontanea che definisce una direzione privilegiata. La transizione di fase comporta la rottura della simmetria per rotazioni continue (TF del II ordine)
- ▶ Nell'universo al di sotto di una certa temperatura critica T_c si ha una transizione di fase che comporta l'insorgenza del campo di Higgs. Inizialmente le interazioni elettrodeboli del sistema soddisfano la simmetria di gauge (che comporta una massa nulla dei mediatori della interazione debole) ma dopo la transizione, a causa del campo di Higgs, tale simmetria viene persa e tre dei quattro mediatori, accoppiandosi con tale campo acquisiscono una massa (TF del II ordine)

Oss: Gli esempi mostrano che nel corso di una transizione di fase non solo le variabili termodinamiche del sistema ma anche le proprietà di simmetria possono cambiare bruscamente. Spesso anzi ci si rende conto che il sistema ha subito una transizione di fase proprio perché alcune proprietà di simmetria sono cambiate bruscamente. Questo è particolarmente vero in fisica delle particelle dove le variabili termodinamiche non sono di solito accessibili mentre le proprietà di simmetria sono facilmente osservabili.

Dalla analisi di esempi come i precedenti è possibile individuare alcune ulteriori proprietà generali dei cambiamenti di simmetria che ricorrono nelle TF del I e II ordine.

Nelle TF del I ordine avviene scambio di energia questo comporta che nel corso della TF lo stato vari in modo discontinuo il che a sua volta comporta che anche *le proprietà di simmetria delle due fasi siano completamente differenti.*

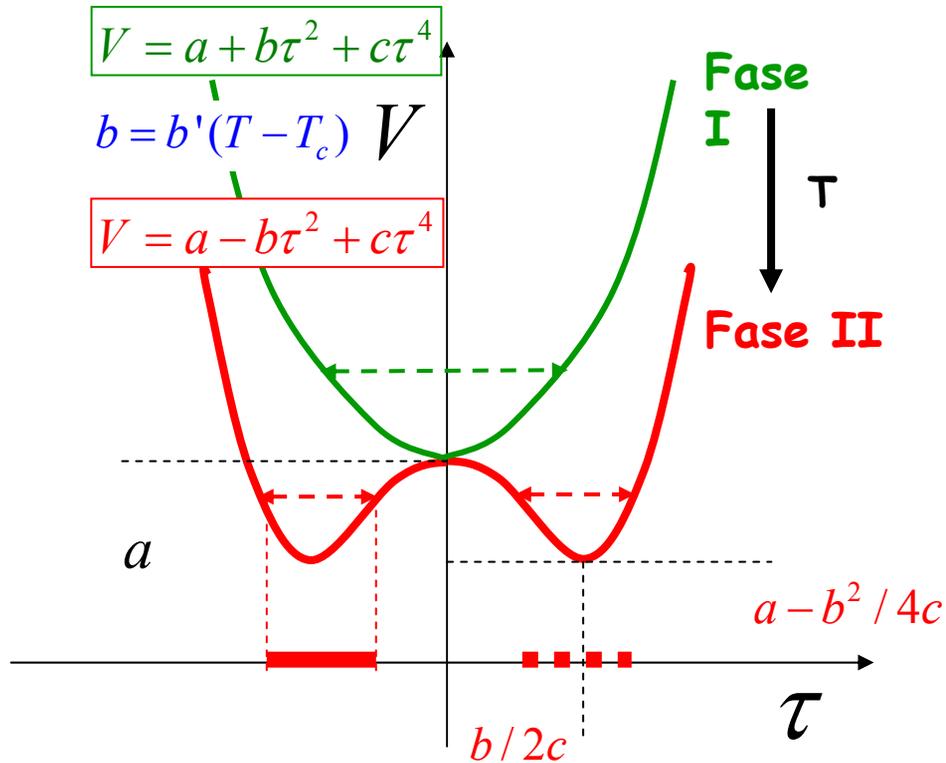
Nelle TF del II ordine invece lo stato del sistema varia con continuità (nella transizione ferromagnetica la magnetizzazione spontanea insorge gradualmente e con continuità) nonostante questo la simmetria del sistema varia bruscamente (la scelta della direzione della magnetizzazione spontanea, che distrugge l'equivalenza di tutte le direzioni dello spazio che il sistema possiede inizialmente, è un fenomeno discontinuo). In questo caso però, nella transizione di fase il sistema perde o acquista proprietà di simmetria per cui accade che *le proprietà di simmetria di una fase siano sempre un sottoinsieme di quelle dell'altra fase* (a differenza delle TF del I ordine). In particolare solitamente accade che la fase a temperatura più alta (fase ordinata) sia più simmetrica di quella a temperatura più bassa (fase disordinata).

Modellizzazione delle transizioni di fase del II ordine

Una modellizzazione delle transizioni di fase del II ordine fu sviluppata da Landau nel 1937. Fu in seguito utilizzata da Ginzburg e Landau nella loro teoria della superconduttività e, negli anni '60, introdotta nella fisica delle particelle elementari da Nambu e Jona-Lasinio dove poi è diventata un elemento basilare (nella sua estensione relativistica) di tutte le teorie delle interazioni fondamentali.

L'idea prevede che

- ▶ esista un valore T_c detto **temperatura critica** al di sotto del quale si verifica la transizione di fase
- ▶ esista un parametro del sistema detto **parametro d'ordine** che caratterizza la transizione di fase (es: densità di magnetizzazione)
- ▶ l'energia potenziale del sistema fisico possa essere espressa come funzione del parametro d'ordine
- ▶ la dipendenza della energia potenziale dal parametro d'ordine cambi bruscamente in corrispondenza della temperatura critica in modo tale che al di sopra della temperatura critica lo stato di minima energia (stato stabile) corrisponda ad un valore nullo del parametro d'ordine mentre al di sotto della temperatura critica corrisponda ad un valore non nullo del parametro d'ordine



□ Simmetria. Il potenziale, in entrambe le fasi, è simmetrico per trasformazioni speculari $\tau > -\tau$ e tali risultano anche gli stati di minima energia. Le fluttuazioni spontanee del parametro d'ordine però selezionano uno degli stati disponibili di minima energia, il parametro d'ordine acquista un valore definito T_0 e la simmetria speculare del potenziale risulta nascosta (rottura spontanea della simmetria speculare). Tale simmetria speculare si estrinseca nel fatto che ripetendo la transizione il sistema ha una eguale probabilità di finire sullo stato $-T_0$.

□ ponendo $a=a(T)$, $b=b(T)=b'(T-T_c)$ e $c=c(T)$ si ottiene una energia potenziale che in corrispondenza di T_c muta bruscamente il suo andamento (transizione dalla fase I alla fase II)

□ nella fase I l'energia potenziale possiede il minimo $\epsilon=a$ nello stato $\tau=0$ (stato non degenere). Nella fase II l'energia potenziale possiede il minimo $\epsilon=a-b^2/4c$ negli stati $\tau=\pm b/2c$ (stati doppiamente degeneri). In questo caso lo stato $\tau=0$ diventa un massimo locale del potenziale e quindi instabile.

□ caso con energia cinetica nulla. Il sistema si trova esattamente nello stato di minima energia. Si abbassa la temperatura fino a raggiungere la temperatura critica dove il potenziale cambia forma. Il sistema, inizialmente in uno stato stabile, si trova ora in uno stato instabile (massimo locale) e può abbassare la propria energia potenziale. Le fluttuazioni spontanee del parametro d'ordine fanno scivolare il sistema verso uno dei due stati stabili di minima energia che portano un ad valore non nullo del parametro d'ordine.

□ valgono le stesse considerazioni nel caso con energia cinetica non nulla. Si avrà non un valore singolo del parametro d'ordine ma insiemi di valori e quindi non uno stato singolo ma insiemi di stati.

Ipotesi fondamentali della teoria fenomenologica di Landau Ginzburg

□ L-G supposero che il passaggio dallo stato conduttivo normale a quello superconduttivo (che si realizza raffreddando il sistema al di sotto della T_c) potesse essere interpretato come una TF del II ordine (non esiste energia latente nel processo) in seguito alla quale la densità di portatori di carica superconduttivi diventa diversa da zero

□ nello stato superconduttivo i portatori di carica si trovano tutti nello stesso stato quantico (condensato, si noti che questo crea difficoltà con il principio di Pauli) per cui la loro funzione d'onda diventa una grandezza macroscopica

Sistema di una particella: probabilità di localizzare la particella in dV

$$\Psi \Psi^* dV$$

Sistema di N particelle nello stesso stato quantico: probabilità di localizzare dN particelle in dV

$$N \Psi \Psi^* dV = \rho dV$$

$$\rho = N \Psi \Psi^* = N |\Psi|^2$$

dunque la funzione d'onda riveste il doppio ruolo di grandezza macroscopica (densità dei portatori di carica) e grandezza microscopica (funzione d'onda del singolo portatore di carica)

Nota. Stessa situazione in elettromagnetismo. Campo elettromagnetico macroscopico = sistema di N fotoni nello stesso stato quantico

$$\rho = N |\Psi|^2 \quad \rho \propto |\vec{A}|^2 \quad \vec{A} \propto \Psi$$

La versione quantistica dell'elettromagnetismo può assumere come funzione d'onda del singolo fotone il potenziale vettore

□ la densità macroscopica di portatori di carica superconduttivi è assunta come parametro d'ordine, la costante N è riassorbita nella funzione d'onda $\rho = N|\Psi|^2 = |\Psi|^2$

□ l'energia libera è assunta della forma

$$E = \iiint_V (\varepsilon(T) + \alpha(T) |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta(T) |\Psi|^4) dV$$

la teoria non è in grado di predire il comportamento dei coefficienti con la temperatura. L'unica ipotesi riguarda il coefficiente α che si suppone cambi segno in corrispondenza di T_c con un andamento del I ordine. Per questo i coefficienti sono fissati al valore che assumono in corrispondenza di T_c : la teoria dunque è valida in prossimità della temperatura di transizione

$$\varepsilon(T) = \varepsilon(T_c) = \varepsilon \quad \alpha(T) = a(T - T_c) / T_c \quad \beta(T) = \beta(T_c) = \beta$$

in questo modo l'energia libera, nelle due fasi, possiede i minimi

$$|\Psi| = 0 \quad T > T_c \quad |\Psi| = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{a(T - T_c)}{\beta T_c}} \quad T < T_c$$

si aggiunge inoltre alla energia anche quella cinetica dei portatori di carica superconduttivi

$$E_{cin} = \iiint_V \rho \frac{1}{2} m v^2 dV = \iiint_V |\Psi|^2 \frac{1}{2} m \frac{p^2}{m^2} dV = \iiint_V \frac{1}{2m} |p \Psi|^2 dV = \iiint_V \frac{1}{2m} |-i\hbar \vec{\nabla} \Psi|^2 dV = \iiint_V \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla} \Psi|^2 dV$$

e si ottiene allora la seguente energia totale

$$E_{Tot} = \iiint_V (\varepsilon + \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla} \Psi|^2 + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4) dV$$

□ la configurazione stabile del sistema può allora essere ottenuta minimizzando l'energia totale. In termini formali è necessario minimizzare l'integrale della energia al variare della funzione $|\Psi|$ (calcolo delle variazioni) viene così trovata una condizione sulla $|\Psi|$ che rappresenta l'equazione di Landau-Ginzburg per il superconduttore

Minimizzazione della energia libera

$$\Psi'(x) = \Psi(x) + \vartheta \xi(x)$$

variazione infinitesima della funzione Ψ controllata da Θ

$$E'_{tot} = E_0 + \iiint_V \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla}(\Psi + \vartheta \xi)|^2 + \alpha |\Psi + \vartheta \xi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi + \vartheta \xi|^4 \right) dV$$

$$|\vec{\nabla}(\Psi + \vartheta \xi)|^2 \sim |\vec{\nabla}\Psi|^2 + \vartheta \vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{\nabla}\xi^* + \vartheta \vec{\nabla}\Psi^* \cdot \vec{\nabla}\xi$$

$$|\Psi + \vartheta \xi|^2 \sim |\Psi|^2 + \vartheta \Psi \xi^* + \vartheta \Psi^* \xi$$

$$|\Psi + \vartheta \xi|^4 \sim |\Psi|^4 + 2\vartheta |\Psi|^2 \Psi \xi^* + 2\vartheta |\Psi|^2 \Psi^* \xi$$

$$E'_{tot} = E_0 + \iiint_V \left[\frac{\hbar^2}{2m} (|\vec{\nabla}\Psi|^2 + \vartheta \vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{\nabla}\xi^* + \vartheta \vec{\nabla}\Psi^* \cdot \vec{\nabla}\xi) + \right.$$

$$\left. + \alpha (|\Psi|^2 + \vartheta \Psi \xi^* + \vartheta \Psi^* \xi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \beta (|\Psi|^4 + 2\vartheta |\Psi|^2 \Psi \xi^* + 2\vartheta |\Psi|^2 \Psi^* \xi) \right] dV$$

$$= E_0 + \iiint_V \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla}\Psi|^2 + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 \right) dV +$$

$$+ \iiint_V \left[\frac{\hbar^2}{2m} (\vartheta \vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{\nabla}\xi^* + \vartheta \vec{\nabla}\Psi^* \cdot \vec{\nabla}\xi) + \right.$$

$$\left. + \alpha (\vartheta \Psi \xi^* + \vartheta \Psi^* \xi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \beta (2\vartheta |\Psi|^2 \Psi \xi^* + 2\vartheta |\Psi|^2 \Psi^* \xi) \right] dV =$$

$$= E + \iiint_V \left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\vartheta \xi^* \vec{\nabla}^2 \Psi + \vartheta \xi \vec{\nabla}^2 \Psi^*) + \right.$$

$$\left. + \alpha (\vartheta \xi^* \Psi + \vartheta \xi \Psi^*) + \right.$$

$$\left. + \beta (\vartheta \xi^* |\Psi|^2 \Psi + \vartheta \xi |\Psi|^2 \Psi^*) \right] dV =$$

$$= E + \vartheta \xi^* \iiint_V \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi \right) dV +$$

$$+ \vartheta \xi \iiint_V \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi^* + \alpha \Psi^* + \beta |\Psi|^2 \Psi^* \right) dV$$

energia corrispondente alla funzione non incrementata

$$\vartheta \vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{\nabla}\xi^* = \vartheta (\partial_j \Psi) (\partial_j \xi^*) =$$

$$= \vartheta [\partial_j (\xi^* \partial_j \Psi) - \xi^* \partial_j \partial_j \Psi] = \vartheta [\vec{\nabla} \cdot (\xi^* \vec{\nabla}\Psi) - \xi^* \vec{\nabla}^2 \Psi]$$

$$\iiint_V \vartheta [\vec{\nabla} \cdot (\xi^* \vec{\nabla}\Psi) - \xi^* \vec{\nabla}^2 \Psi] dV = \iint_{S(V)} \vartheta \xi^* \vec{\nabla}\Psi \cdot d\vec{S} - \iiint_V \vartheta \xi^* \vec{\nabla}^2 \Psi dV =$$

$$= - \iiint_V \vartheta \xi^* \vec{\nabla}^2 \Psi dV$$

l'integrale si annulla poiché Θ si azzerava sulla superficie $S(V)$

affinchè la funzione non incrementata corrisponda alla minima energia si devono azzerare i termini lineari in Θ : equazione di Ginzburg Landau

Riassumendo l'energia del super conduttore in assenza di campi elettromagnetici esterni

$$E_{Tot} = \iiint_V \left(\varepsilon + \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla} \Psi|^2 + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 \right) dV$$

$$\varepsilon = k_1 \quad \beta = k_2 \quad \alpha = a(T - T_c) / T_c$$

risulta minimizzata dalla funzione d'onda che soddisfa la seguente equazione (Equazione di Landau-Ginzburg)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0$$

Da questa otteniamo l'espressione delle densità di corrente di elettroni superconduttivi

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = e |\Psi|^2 \frac{\vec{p}}{m} = \frac{e}{2m} \left(\Psi^* \vec{p} \Psi + \Psi \vec{p}^* \Psi^* \right) = -\frac{i e \hbar}{2m} \left(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^* \right)$$

con la seguente densità di corrente elettromagnetica di cariche superconduttive

$$\vec{j} = -\frac{i e \hbar}{2m} \left(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^* \right)$$

Note:

□ l'equazione di L-G fornisce la funzione d'onda di minima energia associata al sistema di portatori di carica nello stesso stato quantico (condensato, cariche di superconduzione). Equazione di Schroedinger con un potenziale repulsivo proporzionale alla densità di cariche di superconduzione (resistenza delle cariche alla compressione tipo liquido, termine non lineare: non vale il principio di sovrapposizione)

□ la teoria vale in prossimità della temperatura critica ovvero in prossimità della transizione di fase. Inoltre, in questa forma, vale in assenza di campi elettromagnetici esterni

Caratteristiche generali della equazione di G-L in assenza di campi elettromagnetici esterni

Immaginiamo di avere un SC (non specifichiamo se del I o II tipo) in assenza di campi elettromagnetici esterni. Inizialmente il SC si trova al di sopra di T_c , gradatamente la temperatura viene portata sotto T_c . Sappiamo che deve avvenire la transizione allo stato superconduttore.

Cominciamo con l'analizzare lo stato più semplice: quello corrispondente ad assenza di correnti di superconduzione (se tale stato non può esistere otterremo equazioni incongruenti). In questo stato la densità di corrente è nulla

$$\vec{j} = -\frac{ie\hbar}{2m}(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*) = \vec{0} \quad \Psi = 0 \quad \text{stato normale}$$

$$\Psi \neq 0 \quad \vec{\nabla} \Psi = 0 \quad \text{stato superconduttivo con distribuzione uniforme. Può realizzarsi all'interno del SC}$$

Dalla equazione di G-L otteniamo il seguente valore della funzione d'onda nello stato di minima energia

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad |\Psi|^2 = 0 \quad |\Psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$$

$$|\Psi|^2 = 0 \quad \alpha > 0 \quad a \frac{(T - T_c)}{T_c} > 0 \quad T > T_c$$

assenza di cariche superconduttive se $T > T_c$: stato normale

$$|\Psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \alpha < 0 \quad a \frac{(T - T_c)}{T_c} < 0 \quad T < T_c$$

presenza di cariche superconduttive se $T < T_c$: stato superconduttivo

l'energia nelle due differenti fasi vale

$$E_{Tot} = \iiint_V \left(\varepsilon + \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla} \Psi|^2 + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 \right) dV =$$

$$\vec{\nabla} \Psi = 0 \quad |\Psi|^2 = 0 \quad \alpha > 0 \quad = \iiint_V \varepsilon dV$$

$$\vec{\nabla} \Psi = 0 \quad |\Psi|^2 = \frac{|\alpha|}{\beta} \quad \alpha < 0 \quad = \iiint_V \left(\varepsilon - \frac{|\alpha|^2}{2\beta} \right) dV$$

l'energia della fase super conduttiva è inferiore a quella della fase normale, la fase superconduttiva si innesca in quanto energeticamente favorevole

L'equazione di G-L introduce nella descrizione della superconduttività una nuova lunghezza caratteristica (è proprio l'esistenza di tale nuovo parametro che rende la teoria sufficientemente flessibile per descrivere e distinguere tra superconduttività del I tipo e del II tipo. La descrizione della SC del II tipo non era possibile all'interno della teoria di London)

$$-\frac{\hbar^2}{2m\alpha} \vec{\nabla}^2 \Psi + \Psi + \frac{\beta}{\alpha} |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad \Psi = \Psi' \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m\alpha} \vec{\nabla}^2 \Psi' + \Psi' + |\Psi'|^2 \Psi' = 0$$

l'equazione di G-L contiene un solo parametro caratteristico avente le dimensioni di una lunghezza al quadrato. Si pone pertanto

$$\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\alpha}}$$

lunghezza di coerenza: essendo un termine moltiplicativo della derivata stabilisce la distanza caratteristica di variazione della funzione d'onda

superconduttore in assenza di campi elettromagnetici al di sotto della temperatura critica ($\alpha < 0$)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dy^2} - \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'\Psi'' - \alpha\Psi'\Psi + \beta\Psi'\Psi^3 = 0$$

$$\frac{d}{dy} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'^2 - \alpha\Psi^2 + \frac{\beta}{2}\Psi^4 \right) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'^2 - \alpha\Psi^2 + \frac{\beta}{2}\Psi^4 = K$$

dalla eq. di G-L si ottiene il valore della funzione d'onda al centro del SC (derivata nulla)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'' - \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = 0$$

$$-\alpha\Psi + \beta\Psi^3 = 0 \quad \Psi^2 = \alpha/\beta$$

la costante K deve valere allora

$$K = -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'^2 - \alpha\Psi^2 + \frac{\beta}{2}\Psi^4 = -\alpha\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{2}\frac{\alpha^2}{\beta^2} = -\frac{\alpha^2}{2\beta}$$

riotteniamo allora l'equazione

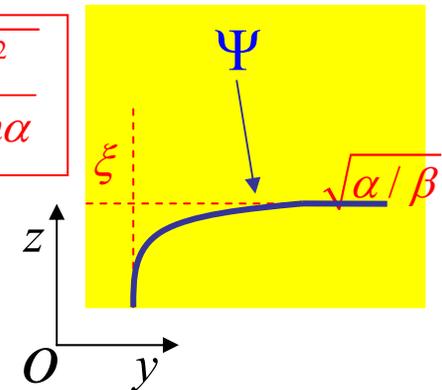
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'^2 - \alpha\Psi^2 + \frac{\beta}{2}\Psi^4 = -\frac{\alpha^2}{2\beta}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'^2 = \frac{\alpha^2}{2\beta} \left(\frac{\beta}{\alpha} \Psi^2 - 1 \right)^2$$

$$\sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\alpha}} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \Psi' = \left(\frac{\beta}{\alpha} \Psi^2 - 1 \right)$$

$$\Psi = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \operatorname{tgh}\left(\frac{y}{\sqrt{2}\xi}\right) \quad \xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\alpha}}$$

la densità di elettroni di superconduzione è nulla sulla superficie esterna del superconduttore ed aumenta avanzando verso il centro. La lunghezza di coerenza controlla la variazione spaziale della funzione d'onda e quindi lo spessore superficiale necessario perché la funzione d'onda raggiunga il suo valore massimo



Caratteristiche generali della equazione di G-L in presenza di campi elettromagnetici esterni

Immaginiamo di avere un SC generico in presenza di campi esterni. Inizialmente il SC si trova al di sopra di T_c , gradatamente la temperatura viene portata sotto T_c . Sappiamo che anche in questo caso, purchè il campo elettromagnetico non sia troppo intenso, deve avvenire la transizione alla fase superconduttiva.

Come si scrivono le equazioni di G-L in presenza di campi elettromagnetici esterni? Si tratta di un problema generale (che discuteremo in dettaglio nel seguito) e che viene risolto con la seguente procedura: *note le equazioni del sistema fisico in assenza di campi elettromagnetici le equazioni relative allo stesso sistema in presenza di campi elettromagnetici si ottengono attraverso le seguenti trasformazioni*

$$\vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar} \vec{A} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie}{\hbar} V$$

Con queste trasformazioni il sistema di equazioni di G-L in assenza di campi esterni fornisce le equazioni seguenti

$$E_{Tot} = \iiint_V \left(\varepsilon + \frac{\hbar^2}{2m} \left| \vec{\nabla} \Psi - \frac{ie}{\hbar} \vec{A} \Psi \right|^2 + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 + \frac{1}{2\mu_0} B_{sup}^2 \right) dV$$

$$\varepsilon = k_1 \quad \beta = k_2 \quad \alpha = a(T - T_c) / T_c$$

$$\vec{j} = -\frac{ie\hbar}{2m} \left(\Psi \left(\vec{\nabla} + \frac{ie}{\hbar} \vec{A} \right) \Psi^* - \Psi^* \left(\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar} \vec{A} \right) \Psi \right)$$

Eq. di Maxwell nel vuoto

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar} \vec{A} \right) \left(\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar} \vec{A} \right) \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0$$

Nota: con la prescrizione suddetta si ottengono le equazioni per le cariche superconduttive che ora sono solo una parte del sistema complessivo e quindi della energia libera complessiva. Bisogna aggiungere l'energia contenuta nei campi elettromagnetici generati dalle correnti superconduttive.

Consideriamo il caso più semplice dal punto di vista geometrico: un superconduttore che occupa tutto il semispazio $y > 0$ immerso in un campo magnetico uniforme diretto lungo l'asse delle z positive. Per simmetria si deve avere $\Psi = \Psi(y)$, $B = B(y)$, $A = A(y)$.

Dalle equazioni di Maxwell

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{B} = (0, 0, B) \quad \vec{A} = (A_x(y), A_y(y), A_z(y))$$

$$(0, 0, B) = \left(\frac{\partial A_z(y)}{\partial y}, 0, -\frac{\partial A_x(y)}{\partial y} \right)$$

$$\vec{A} = (A_x, 0, 0) \quad B = -\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

inoltre

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{B} = (0, 0, B(y)) \quad \vec{J} = (J_x(y), J_y(y), J_z(y))$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial y}, 0, 0 \right) = \mu_0 (J_x, J_y, J_z)$$

$$\vec{J} = (J_x, 0, 0) \quad \frac{\partial B}{\partial y} = \mu_0 J_x$$

dalla densità di corrente si ha

$$j_x = -\frac{ie\hbar}{2m} \left(\Psi^*(y) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{ie}{\hbar} A_x \right) \Psi(y) - \right.$$

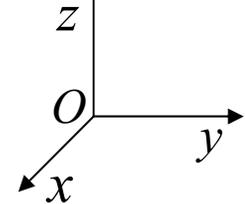
$$\left. \Psi(y) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{ie}{\hbar} A_x \right) \Psi^*(y) \right) = -\frac{e^2}{m} A_x |\Psi|^2$$

la quale sostituita fornisce

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \mu_0 J_x = -\frac{\mu_0 e^2}{m} A_x |\Psi|^2$$

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} = \frac{\mu_0 e^2}{m} A_x |\Psi|^2$$

vuoto sup cond



dalla eq. di G-L si ottiene infine

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar} \vec{A} \right) \left(\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar} \vec{A} \right) \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{ie}{\hbar} A_x, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{ie}{\hbar} A_x \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{e^2 A_x^2}{\hbar^2} \Psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{e^2 A_x^2}{2m} \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0$$

dunque si è ottenuto il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} = \frac{\mu_0 e^2}{m} A_x |\Psi|^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{e^2 A_x^2}{2m} \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0$$

dove Ψ e A sono funzioni di y . Per analizzare le proprietà di questo sistema di equazioni differenziali non lineari è utile riscriverlo nel modo seguente

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} = \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \frac{\mu_0 e^2}{m} A_x |\Psi|^2 \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|$$

$$\tilde{\Psi} = \Psi \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \frac{m}{\mu_0 e^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} = A_x |\tilde{\Psi}|^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}{\partial y^2} + \frac{e^2 A_x^2}{2m} \Psi \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \alpha \Psi \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + |\alpha| |\Psi|^2 \Psi \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial y^2} + \frac{e^2 A_x^2}{2m} \tilde{\Psi} + \alpha \tilde{\Psi} + |\alpha| |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi} = 0$$

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} = A_x |\tilde{\Psi}|^2$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{m\beta}{\mu_0 e^2 \alpha}} \quad \xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\alpha}}$$

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \frac{e}{\hbar} A_x}{\partial y^2} = \frac{e}{\hbar} A_x |\tilde{\Psi}|^2$$

$$\tilde{A}_x = \lambda \frac{e}{\hbar} A_x$$

$$-\xi^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial y^2} + \xi^2 \frac{e^2}{\hbar^2} A_x^2 \tilde{\Psi} + s_\alpha \tilde{\Psi} + |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi} = 0$$

$$s_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha > 0 \\ -1 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$-\xi^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial y^2} + \xi^2 \frac{e^2}{\hbar^2} A_x^2 \tilde{\Psi} + s_\alpha \tilde{\Psi} + |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi} = 0$$

la teoria di G-L contiene due lunghezze indipendenti

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \tilde{A}_x}{\partial y^2} = \tilde{A}_x |\tilde{\Psi}|^2$$

$$-\xi^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial y^2} + \xi^2 \tilde{A}_x^2 \tilde{\Psi} + (|\tilde{\Psi}|^2 + s_\alpha) \tilde{\Psi} = 0$$

$$\tilde{\Psi} = \Psi \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \quad \lambda = \sqrt{\frac{m\beta}{\mu_0 e^2 \alpha}}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\alpha}} \quad \tilde{A}_x = \lambda \frac{e}{\hbar} A_x$$

Ricordiamo che in una equazione differenziale il coefficiente della derivata seconda definisce la lunghezza di variazione della funzione per cui possiamo affermare che la lunghezza di variazione del potenziale vettore A vale λ mentre quella della funzione d'onda Ψ vale ξ . Possiamo allora tentare di risolvere il sistema nelle due situazioni limite $\lambda \ll \xi$ e $\lambda \gg \xi$.

Caso $\lambda \ll \xi$

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \tilde{A}_x}{\partial y^2} = \tilde{A}_x |\tilde{\Psi}|^2$$

$$-\xi^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial y^2} + \xi^2 \tilde{A}_x^2 \tilde{\Psi} + (|\tilde{\Psi}|^2 + s_\alpha) \tilde{\Psi} = 0$$

dato che Ψ varia più lentamente di A possiamo assumere Ψ costante nella prima equazione ottenendo la soluzione

$$A_x = A_{x0} e^{-\frac{y}{\lambda |\tilde{\Psi}|}}$$

la quale mostra che A è approssimativamente nullo quando $y \gg \lambda$. Assumendo tali valori di y la seconda equazione diventa

$$-\xi^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial y^2} + (|\tilde{\Psi}|^2 + s_\alpha) \tilde{\Psi} \approx 0$$

che fornisce quando $s < 1$ l'andamento già studiato nel caso del superconduttore in assenza di campi elettromagnetici esterni

$$\tilde{\Psi} = \text{tgh}\left(\frac{y}{\sqrt{2}\xi}\right)$$

Per $y \gg \xi$ otteniamo pertanto

$$|\tilde{\Psi}| = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

e quindi anche

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} = 0 \quad \text{se } \alpha > 0$$

$$A_x = A_{x0} e^{-\frac{y}{\lambda}} \quad \text{se } \alpha < 0$$

ricordando la relazione tra campo magnetico e potenziale vettore e ripassando alle variabili iniziali otteniamo

$$\alpha > 0 \quad T_c > 0 \quad \Psi = 0$$

B_z uniforme

$$\alpha < 0 \quad T_c < 0 \quad \Psi \approx \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \operatorname{tgh}\left(\frac{y}{\sqrt{2}\xi}\right) \quad B_z = \frac{A_{x0}}{\lambda} e^{-\frac{y}{\lambda}} \quad \lambda = \sqrt{\frac{m\beta}{\mu_0 e^2 \alpha}}$$

esistono due stati differenti di minima energia: uno stato normale ($\Psi=0$), che si realizza per temperature superiori a quella critica ($T > T_c$) e nel quale il campo magnetico è non nullo ed uniforme su tutto il superconduttore; ed uno stato superconduttivo, dove la funzione d'onda assume un valore non nullo, che si realizza per temperature inferiori a quella critica ($T < T_c$). In questo caso il campo magnetico penetra nel superconduttore in uno strato superficiale dell'ordine di λ annullandosi su tutto il rimanente volume (effetto Meissner).

si noti poi che viene previsto un andamento di λ con la temperatura

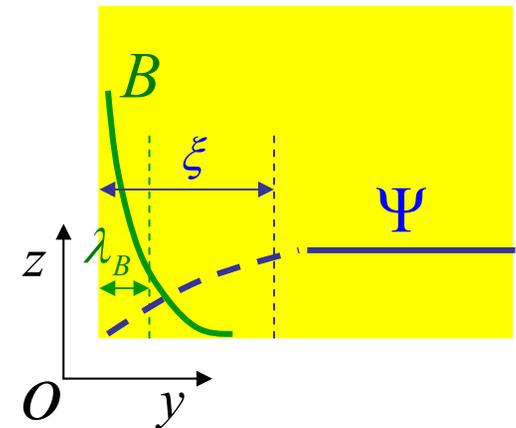
$$\lambda_B = \sqrt{\frac{m\beta}{\mu_0 e^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 e^2} \frac{\beta T_c}{a(T_c - T)}}$$

in accordo con le relazioni sperimentali di Gorter Casimir

NB: alcuni dei risultati discussi sono già stati ottenuti dalla teoria di London. Possiamo pertanto affermare che la teoria di G-L nel limite $\lambda \ll \xi$ è in accordo con la teoria di London.

NB: le caratteristiche suddette corrispondono alla fenomenologia della superconduttività del I tipo. Possiamo quindi affermare che la teoria di G-L, nel limite $\lambda \ll \xi$, descrive la superconduttività del I tipo.

E' utile a questo punto richiamare l'espressione della energia del superconduttore



l' energia nei punti interni del superconduttore vale

$$E_{Tot} = \iiint_V \left(\varepsilon + \frac{\hbar^2}{2m} \left| \vec{\nabla} \Psi - \frac{ie}{\hbar} \vec{A} \Psi \right|^2 + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 + \frac{1}{2\mu_0} B_{sup}^2 \right) dV$$

nello stato normale $\Psi=0$ e $B_{sup}=0$ (il superconduttore non produce campo magnetico) per cui l'energia vale

$$E_{Tot} = \iiint_V \varepsilon dV$$

nello stato superconduttore invece $\Psi^2 = \alpha / \beta$ quasi ovunque mentre il campo magnetico prodotto dal superconduttore deve essere uguale e contrario a quello applicato (effetto Meissner: campo totale nullo quasi ovunque)

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_{sup} + \vec{B}_0 \quad \vec{B}_{tot} = \vec{0} \quad \vec{B}_{sup} = -\vec{B}_0 \quad |\Psi|^2 = \alpha / \beta$$

per cui otteniamo

$$E_{Tot} = \iiint_V \left(\varepsilon + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 + \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 \right) dV = \iiint_V \left(\varepsilon - \left(\frac{|\alpha|^2}{2\beta} - \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) \right) dV$$

il campo magnetico esterno rende la transizione allo stato superconduttivo via via meno vantaggiosa. Esiste un valore del campo magnetico (campo magnetico critico) in grado di annullare il guadagno energetico della transizione superconduttiva e quindi in grado di distruggere la superconduzione $(|\alpha|^2 / 2\beta - B_0^2 / 2\mu_0) = 0$

$$B_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\beta}} |\alpha| = \sqrt{\frac{\mu_0}{\beta}} a \frac{(T - T_c)}{T_c}$$

la relazione fornisce anche l'andamento del campo critico con la temperatura (in accordo con le relazioni sperimentali di Gorter Casimir)

Caso $\lambda \gg \xi$

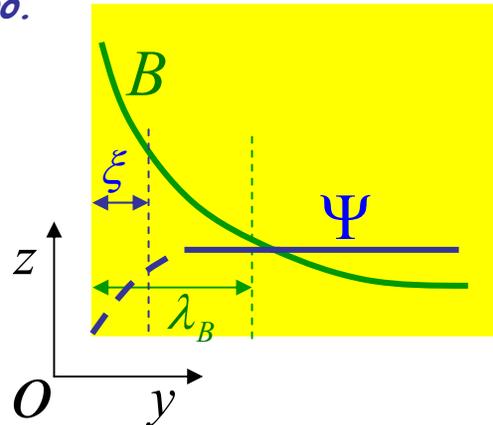
$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \tilde{A}_x}{\partial y^2} = \tilde{A}_x |\tilde{\Psi}|^2$$

$$-\xi^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial y^2} + \xi^2 \tilde{A}_x^2 \tilde{\Psi} + (|\tilde{\Psi}|^2 + s_\alpha) \tilde{\Psi} = 0$$

La trattazione completa di questo caso è molto complessa ed è stata ottenuta per la prima volta in modo analitico da Abrikosov insignito per questo del premio Nobel nel 2003 insieme a Ginzburg e Leggett.

Possiamo comunque osservare che in anche in questo caso limite ci sono due

stati differenti di minima energia: uno stato normale ($\Psi=0$), che si realizza per temperature superiori a quella critica ($T > T_c$) e nel quale il campo magnetico è non nullo ed uniforme su tutto il superconduttore; ed uno superconduttivo, dove la funzione d'onda assume un valore non nullo, che si realizza per temperature inferiori a quella critica ($T < T_c$). In questo caso valori considerevoli della funzione d'onda (ovvero cariche in regime superconduttivo) coesistono con valori considerevoli del campo magnetico dato che $\lambda \gg \xi$. Possiamo quindi intuire che questo caso si adatta alla fenomenologia della superconduttività del II tipo. Così è, infatti Abrikosov ha mostrato che l'equazione di G-L descrive in questo caso correttamente tutta la fenomenologia della superconduttività del II tipo.



Fine

