

---

## Rinormalizzazione

---

## Note storiche

---

- ❑ Già l'elettromagnetismo classico era afflitto da grandezze fisiche di valore infinito (ad esempio la massa elettromagnetica di una carica puntiforme  $U = q^2/6\pi\epsilon_0 c^2 a$  che diverge quando il raggio della carica  $a \rightarrow 0$ ) ma, contrariamente alle attese, le cose peggiorarono con i primi calcoli di elettrodinamica quantistica (Heisenberg e Pauli 1929 e poi Oppenheimer 1930) che evidenziarono, per le stesse grandezze, divergenze con andamento  $1/a^2$  (con  $a \rightarrow 0$ , divergenze ultraviolette) quando si sommava sugli stati virtuali intermedi del campo.
- ❑ La situazione migliorò negli anni seguenti quando si cominciò ad eseguire tali calcoli nel contesto della teoria dell'elettrone di Dirac. Weisskopf, in un lavoro del 1934, mostrò che il ruolo dei positoni introdotti da Dirac era tale da eliminare i termini in  $1/a^2$  ( $a \rightarrow 0$ ) lasciando la più debole divergenza con andamento  $\ln h/2\pi mca$  ( $a \rightarrow 0$ ).
- ❑ Nonostante questo gli infiniti erano da molti considerati un problema che andava risolto con modifiche radicali dell'impianto teorico della nascente QFT: Dirac, nel 1942, introduce una metrica indefinita nello spazio di Hilbert per manipolare probabilità negative ed eliminare le divergenze, mentre Wheeler nel 1937 e Heisenberg nel 1943 suggeriscono di assumere come grandezza fondamentale in QFT la matrice  $S$  piuttosto che i vettori di stato.

# Esempio facoltativo

---

- ❑ Tra le idee in circolazione ve ne era una, ispirata dalla elettrodinamica di Lorentz, che cercava di eliminare le grandezze infinite ridefinendo la carica e la massa delle particelle cariche. Weisskopf imboccò questa strada e, nel 1936, pubblicò un lavoro nel quale mostrò che tutti gli infiniti fino ad allora noti potevano essere riassorbiti in questo modo.
- ❑ La svolta si ebbe subito dopo la seconda guerra mondiale nel corso della *Conference on the Foundations of quantum Mechanics* tenuta a Shelter Island (NY) nel Giugno del 1947. Qui si incontrarono i migliori teorici del tempo ed alcuni fisici sperimentali che richiamarono l'attenzione su due piccoli ma decisivi effetti. Willis Lamb, con una tecnica geniale, riuscì a misurare lo splitting tra i livelli  $2S_{1/2}$  e  $2P_{1/2}$  dell'atomo di idrogeno (circa 1000 MHz) mentre Isidor Rabi misurò una deviazione nel momento magnetico dell'elettrone che risultava essere lievemente maggiore di quello previsto da Dirac (1.0013).
- ❑ Per quanto riguarda lo splitting  $2S_{1/2}$ - $2P_{1/2}$  (Lamb-shift), un primo calcolo non relativistico, che eliminava le divergenze con un semplice taglio sugli integrali, fu eseguito nel 1947 da Bethe e fornì il valore quasi corretto di 1040 MHz. Calcoli relativistici furono eseguiti negli anni seguenti da diversi autori: Feynmann 1948, Tomonaga et al. 1948, Weisskopf & French 1949, Schwinger 1949, Kroll e Lamb 1949. Per quanto riguarda invece il momento magnetico dell'elettrone il primo calcolo relativistico fu compiuto da Schwinger nel 1948. In entrambi i casi la precisione del calcolo era in eccellente accordo con i valori sperimentali e fu determinante nel convincere la comunità dei fisici che le particelle virtuali e gli elaborati metodi per la rimozione degli infiniti dovevano essere prese molto sul serio.

# Esempio facoltativo

---

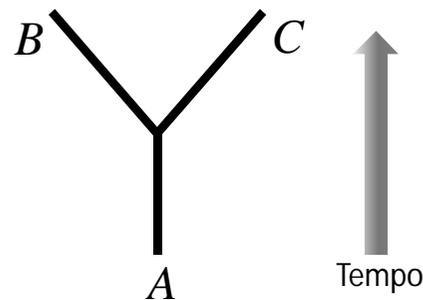
- Gli approcci al problema che per rigore e coerenza emersero in questo periodo furono quelli di Schwinger e Tomonaga da un lato (basato sugli operatori) e quello di Feynman dall'altro (basato sui funzionali e su una razionale e pratica rappresentazione diagrammatica della interazione). Fu Dyson, nel 1949, che dimostrò i) la sostanziale equivalenza degli approcci di Schwinger, Tomonaga e Feynmann; ii) che la tecnica di rimozione degli infiniti utilizzata era capace di rimuovere le divergenze in tutti gli ordini successivi dello sviluppo perturbativo della interazione; iii) che introdusse l'idea di teoria di campo rinormalizzabile, ovvero di una teoria di campo dove tutti gli infiniti possono essere riassorbiti dalla ridefinizione di un numero finito di parametri fisici della teoria.

## Gli aspetti tecnici

---

Per commentare gli aspetti algoritmici della rinormalizzazione nella loro forma più essenziale immagineremo di avere a che fare con una interazione naturale semplificata al massimo grado [vedi Am J. Phys. 60, (1992) 1013]. In particolare supporremo che

- i) esistano solo tre tipi di particelle:  $A$ ,  $B$  e  $C$  di massa  $m_A$ ,  $m_B$  ed  $m_C$ , ciascuna di spin nullo e coincidente con la propria antiparticella;
- ii) esista un solo tipo di interazione che determina il decadimento di  $A$  nella coppia di particelle  $B$  e  $C$  ( $m_A > m_B + m_C$ ) secondo la rappresentazione diagrammatica seguente

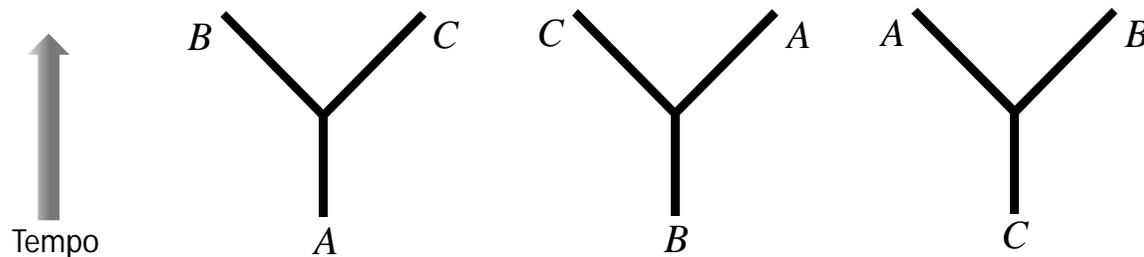


# Esempio facoltativo

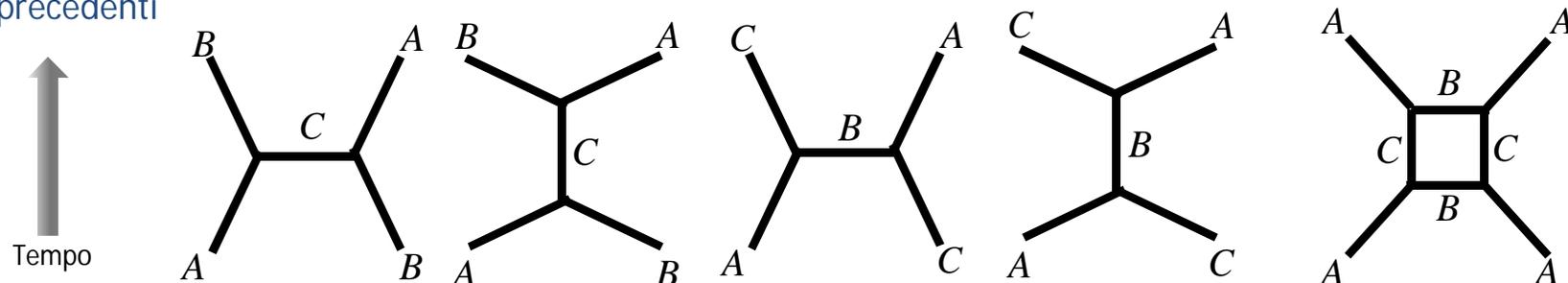
Sviluppando perturbativamente l'hamiltoniano della interazione si otterrebbero, a partire da quello fondamentale, tutta una serie di processi di intensità decrescente e complessità crescente riconducibili comunque a combinazioni del processo fondamentale. Per capire almeno qualitativamente come questo sia possibile occorre riferirsi al principio di indeterminazione (meccanica quantistica) ed alla equivalenza tra massa ed energia (Teoria della relatività ristretta)

$$\Delta E \Delta t \sim h \quad \Delta E = mc^2 \quad \Delta t \sim \frac{h}{mc^2} \quad \Delta x = c \Delta t \sim \frac{h}{mc}$$

all'interno di intervalli temporali (spaziali) molto brevi hanno luogo tutti i seguenti processi (processi virtuali), alcuni dei quali (gli ultimi due) impossibili su tempi lunghi



Con intensità inferiore risultano poi possibili seguenti processi ottenuti combinando tra loro i diagrammi precedenti



# Esempio facoltativo

---

Una volta rappresentata graficamente l'interazione (*diagrammi di Feynmann*) è possibile associare ad ogni elemento grafico una specifica funzione (*regole di Feynmann* per l'interazione considerata) e calcolare l'ampiezza del processo (numero complesso) con la quale calcolare le quantità sperimentalmente misurabili (tasso di decadimento, sezione d'urto, etc. etc.). Attraverso una procedura che qui non riportiamo è possibile calcolare le regole di Feynmann nel caso della nostra interazione:

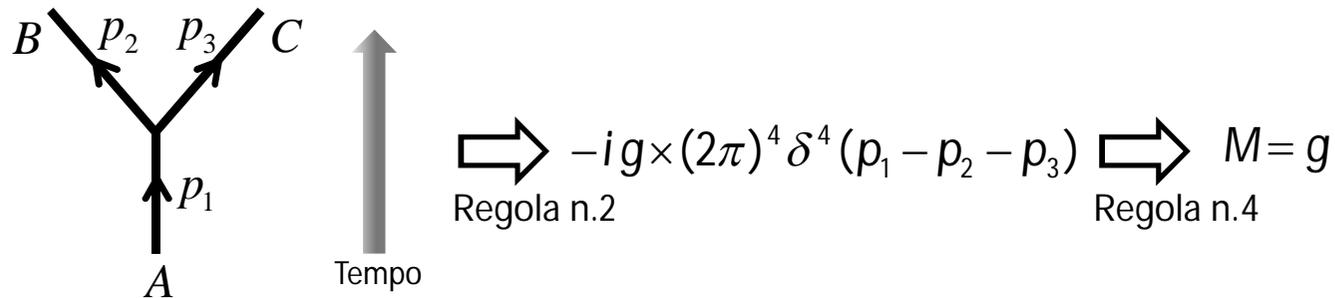
- 1) associare ad ogni linea entrante o uscente il quadrimpulso  $P_j$  e ad ogni linea interna il quadrimpulso  $q_j$  in relazione ad una orientazione arbitraria;
- 2) scrivere per ogni vertice il termine  $-ig$  ( $g$  rappresenta la costante di accoppiamento della interazione) ed il termine  $(2\pi)^4 \delta^4(P_j + P_k - P_l)$  che garantisce la conservazione del quadrimpulso (energia e quantità di moto);
- 3) scrivere, per ogni linea interna, il termine  $i/(q_j^2 - m_j^2)$  (propagatore) dove  $m_j$  è la massa della particella virtuale cui è associata la linea ed il termine  $1/(2\pi)^4 dq_j^4$  integrando sul relativo quadrimpulso;
- 4) si elimini infine il termine  $-i (2\pi)^4 \delta^4(\sum P_j)$ ;

si ottiene allora l'ampiezza del processo associato al diagramma.

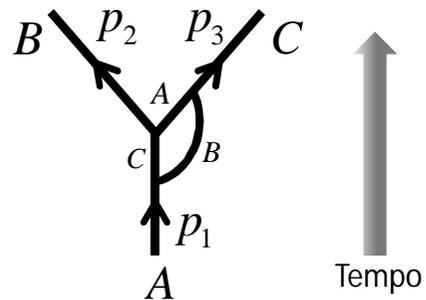
# Esempio facoltativo

## Il decadimento di A in B e C.

Applicando le regole di Feynmann valide per la nostra interazione otteniamo facilmente la seguente ampiezza

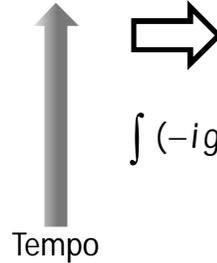
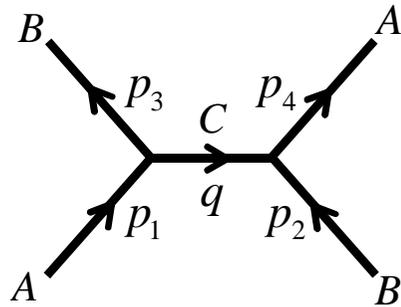


tuttavia se volessimo una valutazione ancora più precisa dell'ampiezza del processo di decadimento dovremmo valutare e sommare anche diagrammi a tre vertici del tipo seguente assai più complesso!



# Esempio facoltativo

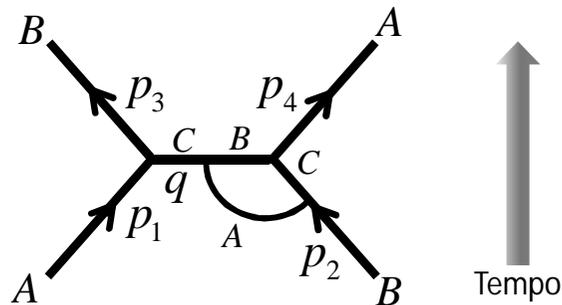
## La diffusione AB.



$$\begin{aligned} & \int (-ig)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - q - p_3) \times \frac{i}{q^2 - m_c^2 c^2} \frac{1}{(2\pi)^4} dq^4 \times (-ig)(2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q - p_4) = \\ & = (-ig)(2\pi)^4 \frac{i}{(p_1 - p_3)^2 - m_c^2 c^2} \frac{1}{(2\pi)^4} (-ig)(2\pi)^4 \delta^4(p_2 + p_1 - p_3 - p_4) = \\ & = (-ig) \frac{i}{(p_1 - p_3)^2 - m_c^2 c^2} (-ig)(2\pi)^4 \delta^4(p_2 + p_1 - p_3 - p_4) \end{aligned}$$

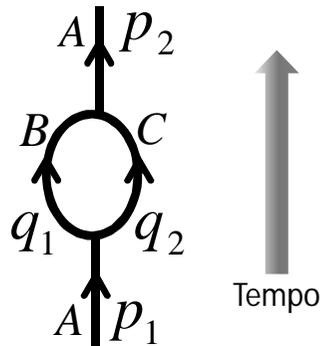
$$\Rightarrow M = \frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2 - m_c^2 c^2}$$

Anche in questo caso, un calcolo più preciso richiederebbe la valutazione di ampiezze a quattro vertici del tipo seguente



# Esempio facoltativo

## Il diagramma a 'loop'.



$$\Rightarrow \int \int (-ig)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - q_1 - q_2) \times$$

$$\times \frac{i}{q_1^2 - m_B^2 c^2} \frac{1}{(2\pi)^4} dq_1^4 \times \frac{i}{q_2^2 - m_C^2 c^2} \frac{1}{(2\pi)^4} dq_2^4 \times$$

$$\times (-ig)(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_2) =$$

$$= -i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2) \times \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[q_1^2 - m_B^2 c^2][(q_1 - p_2)^2 - m_C^2 c^2]} dq_1^4$$

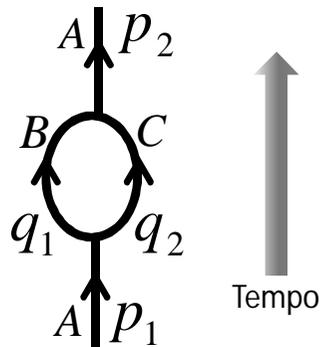
ponendo  $p_1 = p_2 = p$   $q_1 = q$

$$\Rightarrow M(p) = \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[q^2 - m_B^2 c^2][(q - p)^2 - m_C^2 c^2]} dq^4$$

$$= \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[q_0^2 - \vec{q}^2 - m_B^2 c^2][(q_0 - p_0)^2 - (\vec{q} - \vec{p})^2 - m_C^2 c^2]} dq_0 d^3 q$$

# Gli integrali divergenti

Il diagramma a 'loop'.



$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \int & (-ig) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - q_1 - q_2) \times \\ & \times \frac{i}{q_1^2 - m_B^2 c^2} \frac{1}{(2\pi)^4} dq_1^4 \times \frac{i}{q_2^2 - m_C^2 c^2} \frac{1}{(2\pi)^4} dq_2^4 \times \\ & \times (-ig) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_2) = \\ & = -i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2) \times \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[q_1^2 - m_B^2 c^2][(q_1 - p_2)^2 - m_C^2 c^2]} dq_1^4 \end{aligned}$$

ponendo  $p_1 = p_2 = p$   $q_1 = q$

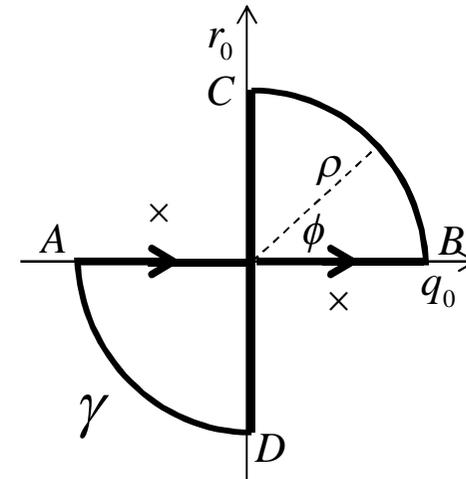
$$\begin{aligned} \Rightarrow M(p) &= \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[q^2 - m_B^2 c^2][(q - p)^2 - m_C^2 c^2]} dq^4 \\ &= \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[q_0^2 - \vec{q}^2 - m_B^2 c^2][(q_0 - p_0)^2 - (\vec{q} - \vec{p})^2 - m_C^2 c^2]} dq_0 d^3 q \end{aligned}$$

# Esempio facoltativo

In primo luogo estendiamo le nostre variabili reali  $q_0$  e  $p_0$  al campo complesso ponendo  $Q_0 = q_0 + i r_0$  e  $P_0 = p_0 + i s_0$  (si noti che viene introdotta una parte immaginaria arbitraria), poi spostiamo poi i poli dall'asse reale di una quantità arbitraria  $\epsilon$  che poi manderemo a zero. Il teorema dei residui, applicato al contorno a forma di 'otto' indicato in figura che esclude i poli, fornisce allora

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{[Q_0^2 - \vec{q}^2 - m_B^2 c^2][(Q_0 - P_0)^2 - (\vec{q} - \vec{p})^2 - m_C^2 c^2] + i\epsilon} dQ_0 d^3 q = 0$$

Assumendo la rappresentazione polare per la variabile d'integrazione e limitandoci a considerare gli archi BC e DA del contorno, si ha  $Q_0 = \rho e^{i\phi}$  e  $dQ_0 = i \rho e^{i\phi} d\phi$  (dato che su BC e DA  $\rho$  è costante). Ora si noti che l'elemento differenziale è proporzionale a  $\rho$  mentre la funzione integranda è proporzionale a  $1/\rho^2$  per cui nel limite  $\rho \rightarrow \infty$  (il che significa che i punti A e B si spostano essi stessi all'infinito sull'asse reale) l'integrazione sugli archi BC e AD può essere trascurata e l'integrale sul percorso chiuso si riduce ai soli integrali su CD e AB con la condizione che tali punti vadano all'infinito. Abbiamo allora



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[q_0^2 - \vec{q}^2 - m_B^2 c^2][(q_0 - p_0)^2 - (\vec{q} - \vec{p})^2 - m_C^2 c^2] + i\epsilon} dq_0 d^3 q + \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1}{[(ir_0)^2 - \vec{q}^2 - m_B^2 c^2][(ir_0 - is_0)^2 - (\vec{q} - \vec{p})^2 - m_C^2 c^2] + i\epsilon} (idr_0) d^3 q = 0$$

da cui, nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  e con ovvi passaggi, si ottiene, per l'integrale che ci interessa l'eguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[q_0^2 - \vec{q}^2 - m_B^2 c^2][(q_0 - p_0)^2 - (\vec{q} - \vec{p})^2 - m_C^2 c^2]} dq_0 d^3 q = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[r_0^2 + \vec{q}^2 + m_B^2 c^2][(r_0 - s_0)^2 + (\vec{q} - \vec{p})^2 + m_C^2 c^2]} dr_0 d^3 q$$

# Esempio facoltativo

Sostituendo nella espressione della ampiezza otteniamo

$$M = -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[r_0^2 + \vec{q}^2 + m_B^2 c^2][(r_0 - s_0)^2 + (\vec{q} - \vec{p})^2 + m_c^2 c^2]} dr_0 d^3 q$$

Si noti ora che la segnatura a denominatore non è più quella pseudoeuclidea tipica dei quadrivettori relativistici ma una normale segnatura euclidea quadridimensionale (a questo è servita la rotazione di Wick). Possiamo a questo punto riesprimere l'integrale attraverso vettori in quattro dimensioni con metrica euclidea

ottenendo

$$\hat{Q} = (r_0, \vec{q}) \quad \hat{P} = (s_0, \vec{p})$$
$$M = -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[\hat{Q}^2 + m_B^2 c^2][(\hat{Q} - \hat{P})^2 + m_c^2 c^2]} d^4 Q$$

Espresso l'integrale in una metrica euclidea quadridimensionale possiamo passare a variabili polari sferiche quadridimensionali ponendo

$$|\hat{Q}| = \sqrt{r_0^2 + q^2} = \lambda \quad dQ^4 = dr_0 dq^3 = \lambda^3 d\lambda d\Omega$$

vediamo immediatamente che la funzione integranda e l'elemento differenziale si comportano asintoticamente come  $1/\lambda^4$  e  $\lambda^3$  rispettivamente da cui

$$M \approx -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^4} \lambda^3 d\lambda d\Omega = -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} d\lambda d\Omega$$

ovvero un integrale logicamente divergente.

Per lungo tempo difficoltà di questo tipo giustificavano un certo scetticismo nei confronti della teoria dei campi. Fu solo con i lavori di Weisskopf (1936) e, nell'immediato dopoguerra, Bethe (1947) che si mise a punto una tecnica di calcolo capace di aggirare il problema e rendere nuovamente predittiva la teoria dei campi. Subito dopo, i lavori, tra gli altri, di Feynmann, Schwinger e Tomonaga (1948-1949) ponevano le intuizioni di Weisskopf e Bethe su di una base generale e più rigorosa anche se le sottili questioni di carattere concettuale ed interpretativo che esse ponevano sono ancora oggi oggetto di dibattito e discussione.

## La regolarizzazione degli integrali

---

Esistono diversi modi per eliminare la parte divergente di un integrale ma tutti basati sulla introduzione di una grandezza estranea alla fisica contenuta nel problema: il regolatore, un parametro che rende finito l'integrale e che viene rimosso nelle fasi successive del calcolo. Quando il risultato ottenuto dipende dallo schema di regolarizzazione adottato si dice che la teoria possiede una anomalia. Gli schemi più importanti nella teoria quantistica dei campi sono

**regolarizzazione di Pauli Villars:** si modificano i propagatori (non i vertici) introducendo particelle massive fittizie (oppure ipotizzandone l'esistenza) la cui massa sarà poi mandata all'infinito al momento della rimozione del regolatore. In QED, ad esempio, l'accoppiamento di queste particelle è definito in modo tale da preservare la gauge invarianza dei propagatori così modificati;

**regolarizzazione su reticolo:** si calcolano gli integrali su uno spazio-tempo discretizzato (reticolo) che risultano convergenti fin tanto che il passo del reticolo rimane finito e che convergono al limite fisico nel momento in cui tale passo va a zero. Si tratta di uno schema che non richiede uno sviluppo perturbativo della interazione e quindi applicabile a teorie non affrontabili perturbativamente come la QCD ad esempio;

**regolarizzazione Zeta:** particolarmente utile in presenza di serie divergenti le quali vengono modificate in modo tale da potere essere eguagliate alla funzione Zeta di Riemann calcolata per un opportuno valore complesso. È usata ad esempio nel calcolo dell'effetto Casimir;

**regolarizzazione dimensionale:** Introdotta da Giambiagi e Bollini nel 1972 fu quasi contemporaneamente utilizzata da Veltman e t'Hooft ed è nella loro forma che viene usata e rappresenta forse il migliore dei metodi di regolarizzazione oggi disponibili. Applicheremo questa tecnica agli integrali divergenti del nostro problema.

---

# Esempio facoltativo

A grandi linee l'idea è quella di eseguire il calcolo dell'ampiezza in uno spazio dove il numero delle dimensioni è diminuito di una frazione  $\varepsilon$  e quindi di dimensione  $4 - \varepsilon$ . Attraverso una tecnica che vedremo risulta così agevole isolare in modo non ambiguo dall'integrale il termine divergente dopodichè  $\varepsilon$  viene mandato a zero per recuperare il risultato finale.

Richiamiamo allora la

$$M = -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[\hat{Q}^2 + m_B^2 c^2][(\hat{Q} - \hat{P})^2 + m_C^2 c^2]} d^4 Q$$

In primo luogo consideriamo l'identità  $\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{1}{[A(1-x) + Bx]} dx$  che ci permette di riscrivere l'ampiezza come

$$\begin{aligned} M &= -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int \frac{1}{\{ [\hat{Q} + m_B^2 c^2](1-x) + [(\hat{Q} - \hat{P})^2 + m_C^2 c^2]x \}^2} dx d^4 Q = \\ &= -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int \frac{1}{\{ (\hat{Q} - \hat{P}x)^2 + \hat{P}^2 x(1-x) + m_B^2 c^2 (1-x) + m_C^2 c^2 x \}^2} dx d^4 Q = \\ &= -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int \frac{1}{\{ \hat{Q}'^2 + \hat{P}^2 x(1-x) + m_B^2 c^2 (1-x) + m_C^2 c^2 x \}^2} dx d^4 Q' = \\ &= -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int \frac{1}{\{ \hat{Q}'^2 + R(x) \}^2} dx d^4 Q' \end{aligned}$$

dove si è posto  $R(x) = \hat{P}^2 x(1-x) + m_B^2 c^2 (1-x) + m_C^2 c^2 x$

# Esempio facoltativo

Dato che  $g$  ha le dimensioni di una quantità di moto possiamo richiamare l'espressione ottenuta esprimendo l'accoppiamento nel modo seguente  $g = g_0 Mc$

$$M = -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int \frac{dx d^4 Q'}{\{\hat{Q}'^2 + R^2(x)\}^2}$$

E' utile ora esprimere l'elemento di volume in coordinate sferiche quadridimensionali. Si noti che non comparendo gli angoli nella funzione integranda possiamo considerare direttamente il volume del guscio sferico quadridimensionale che vale (vedi Appendice 1)

$$dQ'^4 = |Q'|^3 d|Q'| \int \int \int d\Omega_4$$

sostituendo otteniamo l'espressione

$$M = -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int \frac{dx |Q'|^3 d|Q'|}{\{\hat{Q}'^2 + R^2(x)\}^2} \int \int \int d\Omega_4$$

che possiamo riscrivere facilmente nel caso che le dimensioni dello spazio vengano diminuite in modo continuo di una quantità arbitraria  $\varepsilon$ . Richiamando la A.1.3 (Vedi Appendice 1) si ottiene allora

$$M = -\frac{g_0^2 (Mc)^{2+\varepsilon}}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \int_0^1 \int \frac{dx |Q'|^{3-\varepsilon} d|Q'|}{\{\hat{Q}'^2 + R^2(x)\}^2} \int \int \int d\Omega_{4-\varepsilon} = -\frac{g_0^2 (Mc)^{2+\varepsilon}}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \frac{2\pi^{2-\varepsilon/2}}{\Gamma(2-\varepsilon/2)} \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{|Q'|^{3-\varepsilon} d|Q'|}{\{\hat{Q}'^2 + R^2(x)\}^2}$$

Possiamo ora eseguire l'integrale nel modulo di  $Q'$  ponendo per semplicità  $|Q'|=Q$  e sfruttando le funzioni Beta e Gamma (vedi 6.2.1 e 6.2.2 pag 258 Abramowitz & Stegun)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{|Q'|^{3-\varepsilon} d|Q'|}{\{\hat{Q}'^2 + R^2\}^2} &= \int_0^\infty \frac{Q^{3-\varepsilon} dQ}{\{Q^2 + R^2\}^2} = \int_0^\infty \frac{R^{3-\varepsilon} (Q/R)^{3-\varepsilon} R d(Q/R)}{R^4 \{(Q/R)^2 + 1\}^2} = \frac{1}{R^\varepsilon} \int_0^\infty \frac{\xi^{3-\varepsilon} d\xi}{\{\xi^2 + 1\}^2} = \frac{1}{R^\varepsilon} \int_0^\infty \frac{\xi^{3-\varepsilon} \frac{1}{2\xi} 2\xi d\xi}{\{\xi^2 + 1\}^2} = \\ &= \frac{1}{2R^\varepsilon} \int_0^\infty \frac{\xi^{2(1-\varepsilon/2)} d\xi^2}{\{\xi^2 + 1\}^2} = \frac{1}{2R^\varepsilon} \int_0^\infty \frac{\eta^{(1-\varepsilon/2)} d\eta}{\{\eta + 1\}^2} = \frac{1}{2R^\varepsilon} B(2-\varepsilon/2, \varepsilon/2) = \frac{1}{2R(x)^\varepsilon} \frac{\Gamma(2-\varepsilon/2)\Gamma(\varepsilon/2)}{\Gamma(2)} \end{aligned}$$

# Esempio facoltativo

Sostituendo allora nella espressione della ampiezza otteniamo

$$\begin{aligned} M &= -\frac{g_0^2 (Mc)^{2+\varepsilon}}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \frac{\Gamma(2-\varepsilon/2)\Gamma(\varepsilon/2)}{2\Gamma(2)} \frac{2\pi^{2-\varepsilon/2}}{\Gamma(2-\varepsilon/2)} \int_0^1 \frac{dx}{R(x)^{\varepsilon/2}} = -\frac{g_0^2 (Mc)^{2+\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \Gamma(\varepsilon/2) \int_0^1 \frac{dx}{R(x)^{\varepsilon/2}} = \\ &= -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} (4\pi)^{\varepsilon/2} (Mc)^{2\varepsilon/2} \Gamma(\varepsilon/2) \int_0^1 \frac{dx}{R(x)^{\varepsilon/2}} = -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \Gamma(\varepsilon/2) \int_0^1 \left[ \frac{4\pi (Mc)^2}{R(x)} \right]^{\varepsilon/2} dx \end{aligned}$$

In questa espressione l'unica singolarità risiede nella funzione  $\Gamma(\varepsilon/2)$ . Infatti, dalla espressione di R si deduce immediatamente che l'integrale è finito e può, pertanto, essere sviluppato in serie rispetto all'esponente  $\varepsilon$  della funzione integranda. Utilizzando la relazione

$$\lambda^{\varepsilon/2} = e^{\ln \lambda^{\varepsilon/2}} = e^{\varepsilon/2 \ln \lambda} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln \lambda = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{1}{\lambda}$$

si ottiene per l'integrale

$$\int_0^1 \left[ \frac{4\pi (Mc)^2}{R(x)} \right]^{\varepsilon/2} dx \approx \int_0^1 \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} \right] dx = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx$$

mentre per la funzione Gamma (vedi 6.1.34 pag 256 Abramowitz & Stegun relativa a  $1/\Gamma(z)$  da cui si ricava, sviluppando in serie per piccoli valori di  $z$ , l'espressione per  $\Gamma(z)$ )

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \approx \frac{2}{\varepsilon} - a_2 - a_3 \frac{\varepsilon}{2} \quad a_2 \approx 0.57721 \quad a_3 \approx -065587$$

Sostituendo nella espressione della ampiezza otteniamo

# Esempio facoltativo

---

$$M_{\text{Loop}} \approx -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} - a_2 - \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx - \frac{\varepsilon}{2} a_3 + \frac{\varepsilon}{2} a_2 \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx \right)$$

La proprietà rilevante di questa espressione è che la parte divergente risulta separata da quella finita. Infatti, per  $\varepsilon \rightarrow 0$  il primo termine diverge mentre i rimanenti assumono un valore finito o nullo. Si esprime questo fatto affermando che l'integrale che compare nella espressione dell'ampiezza è stato regolarizzato.

## Rinormalizzazione

La regolarizzazione dell'integrale dell'ampiezza serve ad enucleare la parte divergente che, nella fase successiva, detta rinormalizzazione, viene eliminata.

Richiamiamo il solo termine divergente nella espressione dell'ampiezza

$$M_{Loop}^{Divergente} \approx -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon}$$

nella sua forma essenziale l'idea della rinormalizzazione è quella di ritornare all'inizio del calcolo immaginando che, accanto al diagramma a loop che abbiamo calcolato e che contiene il termine divergente appena scritto, esista un diagramma addizionale, esso stesso divergente, capace di produrre nell'ampiezza un contributo di eguale modulo ma opposto in segno

$$M_{Correzione}^{Divergente} = \frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon}$$

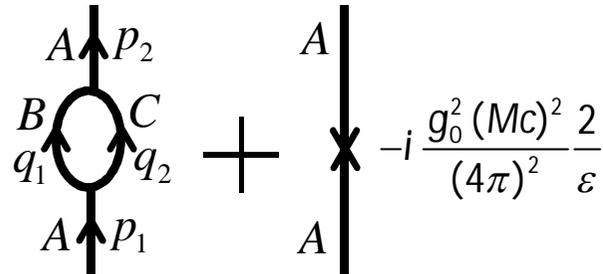
ovvero in grado di eliminare esattamente la parte divergente di  $M_{Loop}$ .

Ora un contributo costante all'ampiezza non può che originarsi dal vertice (vedi il calcolo del Decadimento di A in B e C) e, tenendo conto della seconda regola di Feynmann per il nostro problema, si capisce immediatamente che è necessario ipotizzare un contributo del vertice dato dalla espressione seguente detta **controtermine**

$$-i \frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon}$$

# Esempio facoltativo

Esprimendo attraverso i consueti diagrammi questa strategia avremmo dunque dovuto calcolare i seguenti termini



Loop calcolato con le regole di Feynmann  
(valore divergente)

Controtermine calcolato per definizione con questa regola  
(valore divergente)

che ci avrebbero condotto alla seguente espressione dell'ampiezza chiaramente convergente per qualunque valore di  $\epsilon$

$$M \approx M_{\text{Loop}} + M_{\text{Controt}} \approx -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - a_2 - \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx - \frac{\epsilon}{2} a_3 + \frac{\epsilon}{2} a_2 \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx \right) + \frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \approx$$

$$\approx -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \left( -a_2 - \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx - \frac{\epsilon}{2} a_3 + \frac{\epsilon}{2} a_2 \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx \right)$$

Si può allora ristabilire il numero corretto di dimensioni spaziali che competono al nostro problema mandando  $\epsilon$  a zero ed ottenendo **l'ampiezza rinormalizzata** di valore finito

$$M_{\text{Rinormalizzata}} = M_{\text{Loop}} + M_{\text{Corr}} = -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \left( -a_2 - \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx \right)$$

# Esempio facoltativo

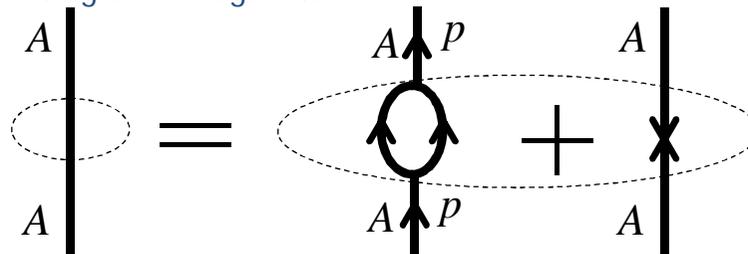
Si noti ora che l'ampiezza rinormalizzata

$$M_{\text{Rinormalizzata}} = -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \left( -a_2 - \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx \right)$$

può essere interpretata come derivante da un vertice che complessivamente assume il valore finito (valido al secondo ordine) dato dalla espressione seguente (vedi il calcolo del Decadimento di A in B e C e la seconda regola di Feynmann)

$$\Sigma(p) = -i \frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \left( a_2 + \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx \right)$$

e dipendente dalla quantità di moto (vedi espressione di R(x)). Esprimendo gli stessi concetti in termini grafici, l'ampiezza rinormalizzata può essere espressa dal diagramma seguente



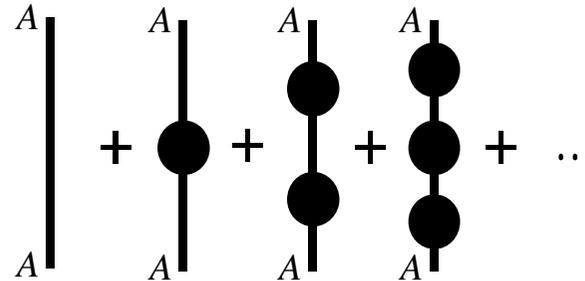
Calcolato per definizione con questa regola  
(valore finito)

con la condizione che il vertice venga calcolato non con le ordinarie regole di Feynmann ma secondo la nuova regola che gli associa il valore  $\Sigma(p)$  dipendente dall'impulso.

Per quanto detto in precedenza la ridefinizione del valore da associare al vertice si riflette non solo nelle interazioni cui la particella A potrà essere soggetta ma anche sulle sue proprietà intrinseche come mostreremo immediatamente.

# Esempio facoltativo

Per vedere quali proprietà intrinseche della particella vengano coinvolte dalla procedura di rinormalizzazione ricordiamo che, in generale, la particella libera può essere pensata come la somma dei processi per cui  $A \rightarrow A$  (diffusione di A in A) per cui vi contribuiscono le seguenti ampiezze



Se tali diagrammi dovessero trovarsi all'interno di altri diagrammi più grandi come linee interne essi porterebbero alla seguente serie di propagatori

$$\frac{i}{q_A^2 - m_A^2 c^2} + \frac{i}{q_A^2 - m_A^2 c^2} (-i\Sigma) \frac{i}{q_A^2 - m_A^2 c^2} + \frac{i}{q_A^2 - m_A^2 c^2} (-i\Sigma) \frac{i}{q_A^2 - m_A^2 c^2} (-i\Sigma) \frac{i}{q_A^2 - m_A^2 c^2} + \dots$$

che può essere facilmente sommata

$$\frac{i}{q_A^2 - [m_A^2 + \Sigma(p)/c^2] c^2}$$

e dalla quale si evince che ogni modifica del vertice si riflette su di una corrispondente variazione della massa della particella per cui la rinormalizzazione del vertice determina una corrispondente rinormalizzazione della massa della particella la quale, oltretutto, diventa una funzione dell'impulso.

# La rinormalizzazione a tutti gli ordini di approssimazione

Ora vogliamo vedere se la nostra teoria è rinormalizzabile anche agli ordini successivi.

Per sviluppare i nostri ragionamenti con una certa generalità osserviamo che per qualunque diagramma sussiste la seguente relazione tra numero  $E$  di linee esterne, numero  $L$  di linee interne e numero  $V$  di vertici

$$E + 2L = 3V$$

D'altra parte ciascuna linea interna porta un propagatore ed una integrazione nel corrispondente impulso, mentre ad ogni vertice è associata una funzione delta sugli impulsi entranti e uscenti

$$\left(\frac{1}{q^2} d^4 q\right)^L \delta^4(q)^V$$

Si possono poi eseguire  $(V-1)$  integrazioni delle funzioni delta (la delta sull'impulso esterno non viene integrata) che eliminano  $(V-1)$  elementi d'integrazione  $d^4 q$  per cui abbiamo l'integrale

$$\int \delta^4(q)^V \left(\frac{1}{q^2} d^4 q\right)^L = \delta^4(q) \int \left(\frac{1}{q^2}\right)^L (d^4 q)^{L-(V-1)} = \delta^4(q) \int \left(\frac{1}{q^2}\right)^L (q^3 dq)^{L-(V-1)} = \delta^4(q) \int q^{L-3V+3} dq^{L-(V-1)}$$

che risulta divergente se

$$L - 3V + 3 \geq -1$$

ovvero, sostituendo  $L=(3V-E)/2$  e tenendo conto che  $E \geq 2$  sempre, se

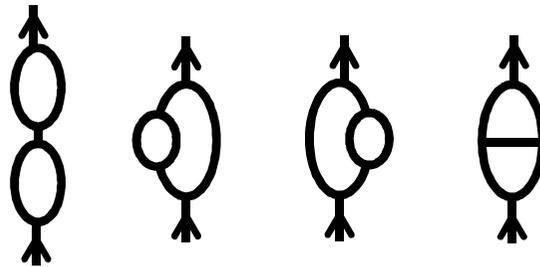
$$V \leq 2$$

Dato che  $V=1$  è un diagramma convergente, l'unico diagramma divergente ha due vertici ( $V=2$ ), almeno due linee esterne ( $E \geq 2$ ) e quindi due linee interne ( $L=(3V-E)/2$ ). Possiamo allora affermare che il diagramma loop è **l'unico diagramma divergente** contenuto nella nostra teoria.

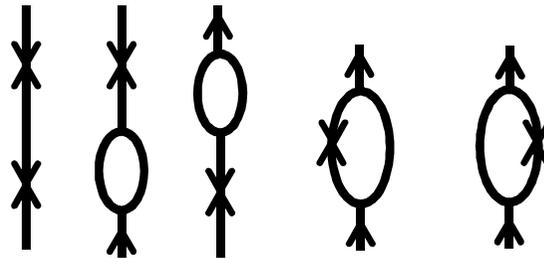
# Esempio facoltativo

Ne consegue allora che un unico controtermine come quello che abbiamo introdotto è sufficiente per eliminare i diagrammi divergenti in ogni ordine successivo di approssimazione nel calcolo dell'ampiezza.

Ad esempio i diagrammi del quarto ordine della nostra teoria sono i seguenti



ed è relativamente semplice mostrare che i seguenti controtermini, costruiti a partire da quello che elimina la divergenza del diagramma loop, eliminano le divergenze che insorgono a questo ordine di approssimazione



Questo stesso ragionamento può essere ripetuto a qualsiasi ordine successivo per cui perveniamo alla conclusione che, nella nostra teoria, un solo controtermine è sufficiente per eliminare le divergenze a qualunque ordine di approssimazione. Quando questo accade si dice che la teoria di campo è rinormalizzabile.

## Considerazioni finali

---

- i) Esistono diverse procedure di regolarizzazione degli integrali divergenti. Oggi si tende a preferire la regolarizzazione dimensionale in quanto conserva tutte le simmetrie del sistema fisico tuttavia il senso fisico della stessa, al pari delle altre, non risulta stabilito;
- ii) la procedura di rinormalizzazione prevede la eliminazione di una grandezza fisica in se divergente attraverso l'introduzione, ad hoc, di un controtermine altrettanto divergente capace di eliminarla. Si tratta di un aspetto evidentemente assai critico sia sotto il profilo del rigore matematico che della interpretazione fisica.

Qualunque sia l'opinione su questo modo di procedere è chiaro che la possibilità di rimuovere tutti i termini divergenti attraverso un numero finito di controtermini (nella nostra teoria un solo controtermine) è in se non banale e permette di dividere le teorie di campo in due classi ben distinte:

- i) le teorie non rinormalizzabili ovvero quelle teorie la cui rimozione degli infiniti richiederebbe un numero infinito di controtermini ;
- ii) le teorie rinormalizzabili ovvero quelle teorie la cui rimozione degli infiniti richiede un numero finito di controtermini ;

Benchè questa ripartizione sia un fatto oggettivo sul suo significato vi sono, ancora una volta, opinioni discordanti. Fino ad oggi si è più o meno implicitamente ritenuto che le teorie di campo associate alle interazioni naturali dovessero essere rinormalizzabili relegando le teorie di campo non rinormalizzabili tra le teorie patologiche. Oggi questo orientamento è cambiato...

## A1 Angolo solido ipersferico

---

Vogliamo calcolare l'elemento di angolo solido di una ipersfera. In analogia con il caso tridimensionale avremo

$$d\Omega_N = \frac{dA_N}{R^{N-1}}$$

dove  $dA_N$  è l'elemento di superficie della ipersfera (sfera immersa nello spazio N-dimensionale). Ora si noti che il differenziale del volume ipersferico  $V_N$  è uguale al volume del guscio ipersferico per cui, indicando con  $A_N$  la superficie della ipersfera, possiamo scrivere

$$dV_N = dR A_N = dR \times \int_{\text{superficie ipersfera}} dA_N = dR \times \int_{\text{angolosolido ipersfera}} R^{N-1} d\Omega_N = dR R^{N-1} \times \int_{\text{angolosolido ipersfera}} d\Omega_N$$

da cui otteniamo la formula seguente che connette l'integrale dell'angolo solido ipersferico alla derivata, rispetto ad R del volume ipersferico

$$\int_{\text{angolosolido ipersfera}} d\Omega_N = \frac{1}{R^{N-1}} \frac{dV_N}{dR} \quad (\text{A1.1})$$

questo significa che ora dovremo calcolare il volume ipersferico.

---

# Esempio facoltativo

Calcoliamo esplicitamente il volume di sfera in 4 dimensioni. Si ha semplicemente

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2 \quad t = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} \quad V_4 = \int_{-\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}}^{+\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}} \int_{-\sqrt{R^2 - z^2}}^{+\sqrt{R^2 - z^2}} \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} \, dx \, dy \, dz$$

e quindi i seguenti passaggi con ovvie sostituzioni di variabile negli integrali

$$V_4 = \int_{-\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}}^{+\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}} \int_{-\sqrt{R^2 - z^2}}^{+\sqrt{R^2 - z^2}} \int_{-R}^{+R} (R^2 - y^2 - z^2) \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2 - y^2 - z^2}} \, d\frac{x}{\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}} \, dy \, dz$$

$$V_4 = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - \xi^2} \, d\xi \int_{-\sqrt{R^2 - z^2}}^{+\sqrt{R^2 - z^2}} \int_{-R}^{+R} (R^2 - z^2)^{3/2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2 - z^2}\right) \, d\frac{y}{\sqrt{R^2 - z^2}} \, dz =$$

$$V_4 = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - \xi^2} \, d\xi \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2) \, d\xi \int_{-R}^{+R} R^4 \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)^{3/2} \, d\frac{z}{R}$$

$$V_4 = \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{1/2} \, d\xi \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{2/2} \, d\xi \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{3/2} \, d\xi \, R^4$$

Possiamo allora intuire che l'espressione generale del volume di una ipersfera in N dimensioni sarà

$$V_N = 2^{N-1} R^N \int_0^1 (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \, d\xi \int_0^1 (1 - \xi^2)^{\frac{2}{2}} \, d\xi \dots \int_0^1 (1 - \xi^2)^{\frac{N-1}{2}} \, d\xi$$

# Esempio facoltativo

Consideriamo ora l'espressione generale appena trovata

$$V_N = 2^{N-1} R^N \int_0^1 (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} d\xi \int_0^1 (1-\xi^2)^{\frac{2}{2}} d\xi \dots \int_0^1 (1-\xi^2)^{\frac{N-1}{2}} d\xi$$

ed eseguiamo il cambio di variabile  $1-\xi^2=t$ , si ottiene

$$V_N = 2^{N-1} R^N \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{1-t}} dt \int_0^1 \frac{t^{\frac{2}{2}}}{2\sqrt{1-t}} dt \dots \int_0^1 \frac{t^{\frac{N-1}{2}}}{2\sqrt{1-t}} dt = R^N \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-t}} dt \int_0^1 \frac{t^{\frac{2}{2}}}{\sqrt{1-t}} dt \dots \int_0^1 \frac{t^{\frac{N-1}{2}}}{\sqrt{1-t}} dt$$

In questa forma gli integrali sono riconducibili alla funzione Beta associata a sua volta alla funzione Gamma di Eulero (vedi Abramowitz & Stegun, pag.258, 6.2.1)

$$V_N = R^N B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{4}{2}, \frac{1}{2}\right) \dots B\left(\frac{N+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

il risultato può essere riespresso attraverso la funzione Gamma (vedi Abramowitz & Stegun, pag.258, 6.2.2) e poi semplificato (pag. 255-256, 6.1.8, 6.1.9, 6.1.15)

$$V_N = R^N \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \dots \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+2}{2}\right)} = 2R^N \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+2}{2}\right)} = 2R^N \pi^{\frac{N-1}{2}} \frac{\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}}{\frac{N}{2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$$

da cui segue il volume di una ipersefera di dimensione N e raggio R

$$V_N = \frac{2R^N \pi^{\frac{N}{2}}}{N \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$$

(A1.2)

# Esempio facoltativo

---

Dalla (1.2), richiamando la (1.1), è immediato ricavare l'espressione dell'integrale dell'angolo solido nello spazio N-dimensionale

$$\int_{\substack{\text{angolo solido} \\ \text{ipersfera}}} d\Omega_N = \frac{2 \pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \quad (\text{A1.3})$$