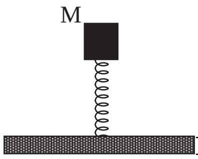
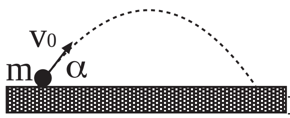
Esercizi di dinamica

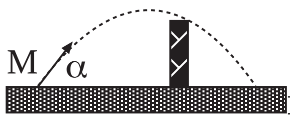
Esercitazioni di Fisica LA per ingegneri - A.A. 2004-2005



F1 ,



F2 ,



F3

Esercizio 1

Un blocco di massa $M = 1.20\,kg$ (figura **F1**) si trova in equilibrio appoggiato su una molla verticale, lineare ($k = 50\,N/m$).

1) Calcolare di quanto è accorciata la molla rispetto alla sua lunghezza a riposo;
2) calcolare di quanto può essere, ulteriormente ed al massimo, compressa la molla affinchè il blocco, lasciato libero, non si stacchi dalla molla;
3) Calcolare la velocità con cui la massa transita per la posizione iniziale e il periodo di oscillazione.

(R: $0.235\,m$, $0.235\,m$, $1.52\,m/s$, $0.973\,s$)

Esercizio 18

Un punto materiale è vincolato su una guida a forma di iperbole. Nel S.R. cartesiano bidimensionale xy (sia y l'asse disposto perpendicolarmente rispetto a terra) l'equazione della guida è $xy = 1$. Determinare il modulo del campo di forze $\vec{F}(y)$ cui è soggetto il punto materiale ed il modulo della reazione vincolare. Nel limite $x \gg 1$, infine, risolvere le equazioni del moto (sviluppare al primo ordine in y).

Esercizio 19

Un blocco del peso di $m = 40\,kg$ scivola su una supervicie ruvida orizzontale. Per effetto dell'attrito esso rallenta in maniera uniforme e, partendo da una velocità iniziale $v_0 = 20\,m/s$, si arresta dopo aver percorso $\Delta l = 40\,m$. Qual è stato il valore (in modulo) della forza di attrito F_a? È possibile, inclinando opportunamente il piano, rendere il moto uniforme? Se si determinare l'angolo α che detto piano deve formare con la terra per determinare queste condizioni. (R: $F_a = 200\,N$, $\alpha = 27°$)

Soluzione

Il corpo è soggetto ad una forza costante data dall'attrito dinamica. L'effetto di questa forza è quello di frenare il corpo. Essa cesserà di esistere dal momento in cui il corpo sì ferma. Immaginando che x sia la coordinata che descrive il moto nella direzione parallela a terra si ha

$$m\ddot{x} = -F_a = -\mu m g \Rightarrow \ddot{x} = -\mu g$$

in cui μ è il coefficiente di attrito dinamico da calcolare. L'equazione sopra è un'equazione differenziale del secondo ordine nel tempo. La sua soluzione generale si può ottenere, ad esempio, integrando parallelamente i suoi membri. Da una prima integrazione (definita) si ottiene:

$$\int_{t_0}^{t} \ddot{x} dt' = -\int_{t_0}^{t} \mu g dt' \Rightarrow \dot{x}(t) - \dot{x}(t_0) = -\mu g(t - t_0)$$

in cui $\dot{x}(t_0)$ indica la velocità del corpo all'istante t_0. Integrando una seconda volta:

$$\int_{t_0}^{t} (\dot{x}(t') - \dot{x}(t_0)) dt' = -\int_{t_0}^{t} \mu g(t' - t_0) dt' \Rightarrow x(t) - x(t_0) = -\frac{1}{2}\mu g(t - t_0)^2 + \dot{x}(t_0)(t - t_0)$$

in cui $x(t_0)$ è la posizione del corpo all'istante t_0. Le quantità $\dot{x}(t_0)$ e $x(t_0)$ sono delle costanti dette costanti di integrazione. Esse devono essere fissate per determinare univocamente le caratteristiche del moto. A diverse scelte delle condizioni iniziali corrispondono traiettorie differenti del corpo: quindi la stessa risultante di forze può determinare moti diversi. La cosa era facilmente prevedibile: un grave soggetto al solo campo gravitazionale terrestre (costante ovunque lungo una qualsiasi sua traiettoria) può avere un moto parabolico se è lanciato, ad esempio, da terra con un qualche angolo rispetto alla verticale, oppure un moto rettilineo se, invece, è lasciato cadere da una torre da fermo. In questo caso è noto che il corpo all'istante iniziale viaggia con velocità v_0 e che si ferma dopo $40\,m$. Si consideri quindi la relazione precedentemente trovata:

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t_0) = -\mu g(t - t_0)$$

essa esprime la velocità del corpo $\dot{x}(t)$ in funzione del tempo e della velocità all'istante t_0. Se t_0 è in tutta arbitrarietà scelto come l'istante iniziale, allora

$$\dot{x}(t_0) = v_0.$$

Siamo interessati all'istante in cui il corpo si ferma. A tale istante t^* vale

$$\dot{x}(t^*) = 0 \Rightarrow 0 - v_0 = -\mu g(t^* - t_0)$$

e se per semplicità fissiamo l'origine dei tempi in modo che $t_0 = 0\,s$ allora

$$t^* = \frac{v_0}{\mu g}.$$

All'istante t^* il corpo ha percorso un tratto pari a $x(t^*) - x(t_0) = \Delta l$ quindi dall'equazione della traiettoria:

$$\Delta l = -\frac{1}{2}\mu g(t^*)^2 + v_0 t^* = \frac{v_0^2}{2\mu g} \Rightarrow \mu = \frac{v_0^2}{2\Delta l g}.$$

La forza d'attrito è quindi determinata.

Veniamo alla seconda domanda: per ottenere un moto rettilineo uniforme è necessario che la risultante delle forze agenti sul corpo sia nulla. Bisognerà quindi bilanciare l'effetto dell'attrito con una forza di verso opposto ovvero che spinga il corpo nella direzione del suo moto come la forza gravitazionale. Inclinando il piano la reazione vincolare dello stesso sul corpo diminuisce (ed ugualmente quindi la forza di attrito) mentre aumenta la componente della forza di gravità che lo spinge verso terra. Per avere uguaglianza delle due:

$$mg \sin\alpha = \mu mg \cos\alpha$$

in cui α è l'angolo che il piano inclinato forma con la direzione orizzontale. Quindi si ha:

$$\alpha = \arctan\mu.$$

Esercizio 20

L'accelerazione di gravità sulla superficie di Marte vale $g_m = 3.62\,m/s^2$. Quanto peserebbe su Marte una persona che pesa sulla terra $800\,N$? (R: $295.5\,N$)

Soluzione

Il peso di un corpo è una forza dovuta al campo gravitazionale in cui è immerso. Essa è proporzionale alla sua massa gravitazionale (che è una sua caratteristica universale) ed all'accelerazione di gravità del pianeta su cui si misura il peso. Essa dipende ovviamente dalle dimensioni e dalla massa del pianeta. Per la terra vale $g_t = 9.81\,m/s^2$. Per Marte $g_m = 3.62\,m/s^2$. Quindi se il peso di oggetto percepito sulla terra vale

$$P_t = mg_t \Rightarrow m = \frac{P_t}{g_t}$$

e il suo peso su Marte è

$$P_m = g_m\,m.$$

Esercizio 21

Un ascensore di massa pari ad $M = 900\,kg$ ha un'accelerazione verso l'alto di $a = 3\,m/s^2$. Quanto vale la tensione del cavo che sorregge e solleva l'ascensore? Se la tensione massima che detto cavo può sopportare è pari a $T_M = 2 \cdot 10^4\,N$ determinarne la capienza massima calcolata per uomini del peso di $80\,kg$. (R: $T = 1.15 \cdot 10^4\,N$, capienza 8 persone)

Soluzione

Anche in questo caso il problema può essere ridotto ad un semplice problema unidimensionale visto che una sola è la direzione lungo si sviluppa il moto. Il moto è uniformemente accelerato ed è verso l'alto quindi la risultante delle forze agenti sul corpo deve essere costante e diretta nello stesso verso. Le sole due forze che sono applicate all'ascensore sono la forza peso e la tensione del cavo che la solleva. Le due forze sono dirette in versi opposti e vale

$$T - Mg = Ma \Rightarrow T = M(a + g).$$

Nel momento in cui l'ascensore trasporta verso l'alto delle persone (massa totale delle persone m), il peso che il cavo deve sopportare è maggiore ed è maggiore pure l'inerzia del sistema ascensore+carico:

$$T - (m + M)g = (m + M)a \Rightarrow T = (m + M)g + (m + M)a$$

quindi la tensione che il cavo deve sopportare è maggiore. Esiste un valore massimo del carico da trasportare tale che $T = T_M$:

$$m = \frac{T_M - M(a + g)}{a + g}$$

che diviso per $80\,kg$ dà la capienza dell'ascensore.

Esercizio 22

Un corpo di massa $m = 1.5\,kg$ viene lanciato da terra con una velocità iniziale $v_0 = 30\,m/s$ lungo un piano, inclinato di $\theta = 35°$ rispetto al suolo. Supponendo che il piano presenti un coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.25$, calcolare l'altezza massima raggiunta dal corpo ed il tempo impiegato per raggiungere tale altezza. (R: $h = 33.8\,m$, $\Delta t = 3.92\,s$)

Esercizio 23

Un proiettile di $15\,g$ che viaggia alla velocità di $2000\,km/h$ si conficca in un blocco di legno penetrando nel legno per $\Delta l = 17\,cm$. Supponendo che la forza frenante del legno sia costante determinare la decelerazione del proiettile nel legno e la forza frenante. (R: $a = -9.07 \cdot 10^5\,m/s^2$, $F = 1.36 \cdot 10^4\,N$)

Esercizio 24

Un corpo di massa $m = 1\,kg$ è appoggiato ad una molla (costante elastica $k = 50\,N/m$ e lunghezza a riposo $l_0 = 1\,m$) fissata a terra e disposta in senso verticale. Il sistema è all'equilibrio: la molla è deformata rispetto alla sua lunghezza a riposo sia a causa della massa che per l'effetto di una ulteriore forza esterna che agisce nello stesso verso della forza peso. Sapendo che le deformazioni dovute ai due effetti sono la prima uguale alla metà della seconda, calcolare la quota massima che può raggiungere la massa (trascurare qualsiasi forma di attrito) una volta che viene a mancare la forza esterna stabilizzante. (R:$1.018\,m$)

Soluzione

Il problema è sostanzialmente unidimensionale. Si fissi quindi un asse di riferimento opportuno x disposto ortogonalmente a terra con origine nel punto corrispondente alla lunghezza a riposo della molla. Attenzione: il corpo non è agganciato alla molla (condizione spesso adottata nei problemi di dinamica che coinvolgono le molle) ma è semplicemente ad essa appoggiato. Questo significa che la molla non è in grado di tirarlo verso il basso ma può semplicemente spingerlo. Possiamo quindi distinguere due zone dinamicamente differenti sull'asse x: nella zona ad $x < 0\,m$ la molla è accorciata ed esercita una forza verso l'alto sul corpo; nella zona $x > 0$ la molla non esercita alcuna forza sul corpo che è da essa staccato. Ovunque lungo x, tuttavia, m sente l'effetto della forza peso. In condizioni di equilibrio statico ed in assenza di forze che non siano forza elastica e forza peso, la massa m appoggiata sulla molla ne darebbe una deformazione tale che

$$k\Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k};$$

nel caso in questione, invece, la molla è inizialmente deformata maggiormente a causa di un'ulteriore forza esterna. A $t = 0\,s$ si ha, per ipotesi

$$x(0) = -3\frac{mg}{k}, \quad \dot{x}(0) = 0\,m/s.$$

In questa regione il corpo m sente una forza totale tale che

$$m\ddot{x} = -kx - mg$$

che risolta, al solito, dà

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t - \frac{mg}{k}, \quad k = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Le condizioni iniziali date mi permettono di fissare le costanti di integrazione:

$$A = -2\frac{mg}{k},\ B = 0$$

da cui l'equazione della traiettoria

$$x(t) = -2\frac{mg}{k}\cos\omega t - \frac{mg}{k}$$

fino al punto $x = 0\,m$. Questo punto è raggiunto all'istante

$$t^* = \frac{2\pi}{3\omega},$$

istante a cui il corpo ha una velocità pari a

$$\dot{x}(\frac{2\pi}{3\omega}) = \frac{\sqrt{3}mg\omega}{2k}.$$

Quest'ultima velocità ad $x = 0\,m$ dà le condizioni iniziali per la seconda parte del problema in cui si esamina il moto del grave m soggetto alla sola forza peso. Per $x > 0\,m$ l'equazione del moto è

$$m\ddot{x} = -mg$$

che, una volta risolta, rende

$$x(t) = -\frac{1}{2}g(t-t^*)^2 + \dot{x}(t^*)(t-t^*).$$

Il corpo termina la sua salita quando

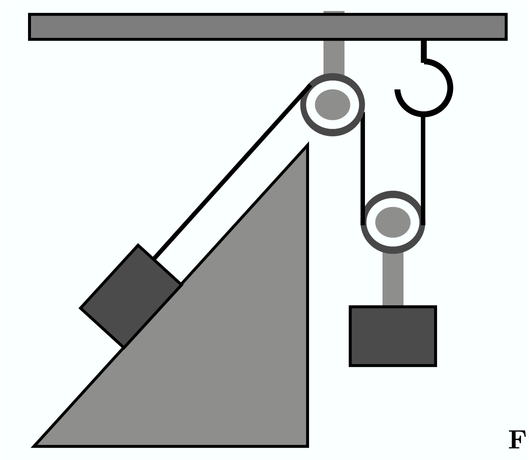
$$t_M = \frac{\dot{x}(t^*)}{g}$$

perciò la quota raggiunta è

$$h_M = l_0 + \frac{\dot{x}(t^*)^2}{2g}.$$

Esercizio 25

Considerare il sistema di carrucole della figura **F7**. Determinare il rapporto fra le masse m/M in cui m è la massa del corpo appoggiato sul piano inclinato (trascurarne l'attrito) ed M è quella appesa alla carrucola più grande in modo che, se $\theta = \pi/3$ è l'angolo che forma il piano inclinato con la terra, il sistema acceleri nel verso discendente del piano inclinato con accelerazione pari ad αg. Esiste un valore massimo per α? Determinare inoltre lo stesso rapporto nel caso in cui il sistema acceleri in senso opposto con accelerazione uguale in modulo alla precedente. Infine determinare le tensioni in gioco e e la reazione vincolare totale del soffitto in entrambi i casi.



F7

Soluzione

Anche in questo caso il problema può essere ridotto ad una sola dimensione. Sia infatti x la coordinata che misura lo spostamento del corpo m sul piano inclinato (rispetto ad un'arbitraria origine in cui m si trova a $t = 0\,s$) ed y la coordinata verticale che misura la quota di M. Per ciascuna delle due masse deve valere la $\vec{F} = m\vec{a}$ quindi, essendoci una sola tensione in gioco:

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - T,$$

$$M\ddot{y} = Mg - T.$$

Le equazioni del moto, formano apparentemente un sistema di 2 equazioni differenziali (con due funzioni incognite da determinare) in cui non è neppure nota la tensione del cavo. Il problema pare quindi indeterminato. In realtà lo spostamento di m lungo il piano inclinato è correlato allo spostamento, in quota, di M. Visto che la lunghezza del cavo è fissa se m scende o sale di un tratto $|x|$ i due tratti di cavo che corrono paralleli e sorreggono la carrucola cui è appesa M si accorceranno o si allungheranno di $|x/2|$. Quindi le coordinate in questione sono legate dalla relazione

$$x = -2y \Rightarrow \ddot{x} = -2\ddot{y}$$

che, sostituita alle equazioni differenziali precedenti determinano univocamente il problema. Dalla seconda delle due quindi ricavo

$$T = M(g + \frac{\ddot{x}}{2})$$

con cui la prima diventa

$$\left(m + \frac{M}{2}\right)\ddot{x} = (m\sin\theta - M)g$$

da cui è evidente che l'accelerazione di m è positiva (quindi scende verso terra) quando

$$m\sin\theta - M > 0$$

mentre essa è negativa quando

$$m \sin\theta - M < 0.$$

Nel caso $m \sin\theta - M = 0$ la risultante delle forze è nulla quindi m ed M si muovono di moto uniforme verso l'alto, verso il basso o sono fermi a seconda delle condizioni iniziali del sistema. L'angolo θ è noto quindi si tratta di capire quale sia il segno delle disuguaglianze scritte sopra al variare del rapporto

$$r = \frac{m}{M}.$$

Sostituendo si ha

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r - 1\right) M > 0$$

quindi il corpo m scende verso terra se $r > \frac{2\sqrt{3}}{3}$. La sua accelerazione vale in questo caso

$$\alpha g = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r - 1\right)}{r + \frac{1}{2}} g$$

che risolta in r dà il risultato cercato. Inoltre variando r da 0 ad $+\infty$ si vede che che α varia da $-2g$ (che corrisponde al caso in cui la massa m è nulla quindi l'unica massa in gioco è M che scende a terra con accelerazione g) a $\sim \sqrt{3}/2$ nel caso in cui $m \gg M$.

Esercizi d'esame

Esercizio 1

Calcolare il periodo T di rivoluzione attorno alla Terra di un satellite artificiale che si muove su di un'orbita circolare a una quota (rispetto alla superficie terrestre) pari a metà della quota dell'orbita geostazionaria (orbita sulla quale un satellite si trova in quiete rispetto alla superficie terrestre).

Soluzione

Sull'orbita geostazionaria il satellite per definizione impiegherebbe 1 giorno per compiere una rivoluzione completa. Quindi la sua velocità angolare sarebbe $\omega_{GS} = 2\pi/T_D$ con $T_D = 1\,\text{giorno}$. Eguaglio, al solito accelerazione centripeta alla forza di attrazione per ottenere:

$$m\omega_{GS}^2 R_{GS} = \gamma \frac{mM}{R_{GS}^2}$$

da cui

$$R_{GS}^3 = \frac{\gamma M}{\omega_{GS}^2}$$

in cui R_{GS} è il raggio dell'orbita geostazionaria ed M è la massa della terra. Il nostro satellite si trova ad $R = R_{GS}/2$. Eguaglio ancora accelerazione centripeta e forza di attrazione gravitazionale sull'orbita di raggio R:

$$m\omega^2 R = \gamma \frac{mM}{R^2}$$

in cui ω è da calcolare risolvendo appunto questa equazione (R è noto!). Dalla definizione di $\omega = 2\pi/T$ si calcola facilmente

$$T = 1/\sqrt{8} \text{ giorni.}$$

(*Totale 28/03/2003*; R: $1/\sqrt{8}$ giorni)