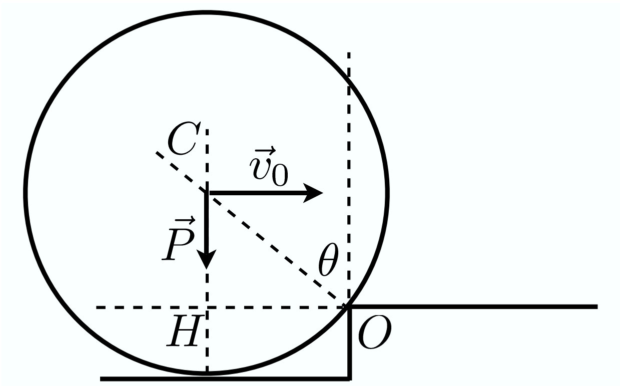
Esercizi terzo principio

Esercitazioni di Fisica LA per ingegneri - A.A. 2004-2005



Esercizio 1

Una ruota di massa $m = 10\,kg$ e raggio $R = 1\,m$ viene tirata contro un gradino di altezza $h = 30\,cm$ con una velocità v_0. Sapendo che la ruota rotola senza strisciare calcolare il valore minimo di v_0 affinchè esse riesca a salire sul gradino.

Soluzione

Prima di incontrare il gradino la ruota rotola senza strisciare. In tali condizioni cinematiche il modulo v_0 della velocità del suo centro di massa C è legato alla velocità angolare ω della ruota (attorno all'asse di rotazione passante per C ed ortogonale al foglio) dalla relazione:

$$v_0 = \omega_0 R.$$

Nelle condizioni di rotolamento ω rappresenta pure la velocità angolare della ruota rispetto all'asse ortogonale al foglio che passa per il punto di contatto fra ruota e terra (o nel momento in cui impatta il gradino fra il punto di contatto ruota gradino O). Il problema può essere schematizzato come segue: appena la ruota tocca il gradino essa ruota intorno a O; se è dotata di velocità sufficiente, quindi, riuscirà a vincere la forza peso che la attira a terra e salirà sul gradino. è possibile studiare la dinamica di questa rotazione attorno a O utilizzando la seconda equazione cardinale della dinamica scritta utilizzando proprio O come centro di riduzione:

$$\frac{d}{dt}\vec{K}_O = -\vec{v}_O \wedge \vec{Q} + \vec{M}_O$$

che si riduce a

$$\frac{d}{dt}\vec{K}_O = \vec{M}_O$$

perchè il centro di riduzione ‘e fermo.
Vediamo di esprimere il momento angolare a lato sinistro: immaginando che la ruota sia costituita da un insieme numerabile di punti materiali di masse m_i:

$$\vec{K}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i$$

in cui i vettori $P_i - O$ e $\vec{v}_i$ giacciono sul piano della figura. Quindi $\vec{K}_O$ è un vettore ortogonale al foglio: la sua proiezione lungo l'asse di rotazione K_u (anch'esso perpendicolare al foglio), in valore assoluto, sarà uguale al suo modulo. Vale:

$$K_u \equiv \omega$$

in cui I è il momento di inerzia della ruota rispetto all'asse di rotazione in O ed $\omega \equiv \dot{\theta}$. Per le scelta fatte, dunque, $K_u > 0$ quando $\dot{\theta} > 0$ ovvero quando θ aumenta nel tempo. Nel moto di risalita θ diminuisce quindi $K_u < 0$.
Il momento di inerzia I lo possiamo calcolare utilizzando il teorema di *Huygens-Steiner*: il momento di inerzia che cerchiamo è uguale al momento di inerzia della ruota rispetto all'asse passante per C più md^2 in cui d è la distanza fra C e O ovvero $d = R$. Vale quindi

$$I = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2.$$

Il lato sinistro della seconda equazione cardinale della dinamica, proiettato lungo l'asse di rotazione, è dunque:

$$K_u = \frac{3}{2} mR^2 \ddot{\theta}.$$

Veniamo al lato destro. Il momento delle forze esterne è per definizione

$$\vec{M}_O = \sum_j (P_j - O) \wedge \vec{F}_j$$

in cui la sommatoria è estesa su tutte le forze agenti sulla ruota. Essendo immersa nel campo gravitazionale terrestre ciascun m_i sente una forza $\vec{P}_i$ diretta verso terra. Inoltre la ruota senta la reazione vincolare del gradino che tuttavia è una forza con braccio nullo per la scelta del centro di riduzione. Dunque solo la forza peso dà contributo al momento totale delle forze:

$$\vec{M}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{g} = \left(\sum_i (P_i - O) m_i \right) \wedge g = m(C - O) \wedge g = (C - O) \wedge \vec{P}$$

ossia il momento è uguale a quello di una particella puntiforme che si trova nel centro di massa della ruota e che peso uguale al peso della ruota stessa. Il modulo di M_O è dunque

$$M_O = mgR \sin(\pi - \theta) = mgR \sin(\theta)$$

essendo $\pi - \theta$ l'angolo fra $\vec{P}$ e $(C - O)$. Visto che inoltre i vettori $\vec{P}$ e $(C - O)$ giacciono entrambi sul piano della figura il loro prodotto vettoriale è ortogonale al foglio. La componente M_u lungo l'asse di rotazione è dunque

$$M_u = mgR \sin\theta$$

che esprime il fatto che $M_u = 0$ quando la ruota è sul gradino mentre è positivo (o comunque equiverso a K_u per come è stato espresso il momento angolare) in fase di rotazione (si noti che durante la risalita $M_u > 0$ mentre $K_u < 0$ per il fatto che il momento delle forze agisce in modo da contrastare tale moto). La seconda equazione cardinale della dinamica, dunque, è (lungo l'asse di rotazione):

$$\frac{3}{2} mR^2 \ddot{\theta} = mgR \sin\theta$$

ed è un'equazione differenziale non lineare del secondo ordine con $\theta(t)$ come funzione incognita (essa è l'equazione del pendolo fisico ovvero descrive la dinamica di un oggetto esteso immerso nel campo gravitazionale costante che ruota intorno ad un asse orizzontale). Purtroppo l'equazione non è risolubile utilizzando le tecniche standard delle equazioni differenziali lineari. Tuttavia per piccoli angoli di rotazione il suo lato sinistro si può approssimare alla luce del fatto che $\sin\theta \sin\theta$ e quindi:

$$\ddot{\theta} = \frac{2g}{3R}\theta.$$

Questa equazione è simile all'equazione per l'oscillatore armonico ma non è la stessa. La sua soluzione generale è

$$\theta(t) = A \cosh \omega t + B \sinh \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$$

o equivalentemente

$$\theta(t) = C \exp(\omega t) + D \exp(-\omega t).$$

Usiamo la seconda espressione ed imponiamo le condizioni iniziali essendo

$$\dot{\theta}(t) = \omega C \exp(\omega t) - \omega D \exp(-\omega t);$$

all'istante iniziale (arbitrariamente $t = 0\,s$) quando inizia la rotazione intorno a P la ruota ha velocità angolare

$$\omega_0 = -\dot{\theta}(0\,s) = -(C - D)\omega \Rightarrow D = \frac{\omega_0}{\omega} + C$$

e

$$\theta(0\,s) = C + D = \theta_0$$

con θ_0 da calcolare con alcune considerazioni geometriche. Nel momento in cui la ruota impatta il gradino $CH = R - h$ e $CP = R$ quindi

$$CO \cos\theta_0 = CH \Rightarrow \theta_0 = \arccos\frac{CH}{CO}.$$

Mettendo a sistema le due equazioni ottenute imponendo le condizioni iniziali si ha:

$$C = \frac{\theta_0}{2} - \frac{\omega_0}{\omega}, \quad D = \frac{\theta_0}{2} + \frac{\omega_0}{\omega}.$$

All'istante t^* in cui la ruota sale sul gradino spinta dalla velocità minima possibile $\theta(t^*) = 0$ e essa ci arriva con velocità nulla $\dot{\theta}(t^*) = 0$. Cerchiamo questo istante richiedendo appunto

$$\theta(t^*) = 0 \Rightarrow Ce^{\omega t^*} = -De^{-\omega t^*} \Rightarrow e^{2\omega t^*} = \frac{\frac{\theta_0}{2} + \frac{\omega_0}{\omega}}{-\frac{\theta_0}{2} + \frac{\omega_0}{\omega}}$$

quindi

$$\omega t^* = \ln\sqrt{\frac{\frac{\theta_0}{2} + \frac{\omega_0}{\omega}}{-\frac{\theta_0}{2} + \frac{\omega_0}{\omega}}}.$$

Sostituendo nel vincolo $\dot{\theta}(t^*) = 0$ si ottiene:

$$0 = -2\omega\sqrt{\left(\frac{\theta_0}{2} + \frac{\omega_0}{\omega}\right)\left(-\frac{\theta_0}{2} + \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \Rightarrow \omega_0 = \theta_0\omega$$

che equivale a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3R}}\arccos\frac{R-h}{R}.$$

Visto che sto considerando il limite di piccoli angoli deve essere $h \ll R$. In tale limite l'arcocoseno si può espandere nel limite $h \to 0$:

$$\arccos\frac{R-h}{R} \sim \sqrt{\frac{2h}{R}}$$

e quindi il risultato finale è:

$$\omega_0 \geq \sqrt{\frac{4hg}{3R^2}}.$$

Avendo potuto utilizzare il principio di conservazione dell'energia nel campo gravitazionale (conservativo terrestre) allora all'istante iniziale (senza utilizzare alcuna approssimazione) la ruota ha energia potenziale nulla ed energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

mentre a quello finale la ruota ha energia cinetica nulla e sola energia potenziale uguale all'energia potenziale del suo centro di massa

$$U = mgh.$$

Eguagliando l'energia totale del sistema all'inizio (solo cinetica) e alla fine della salita (solo potenziale) e risolvendo in ω_0:

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = mgh \Rightarrow \omega_0 \geq \sqrt{\frac{4hg}{3R^2}}.$$