

Esercizi di Fisica LB: elettrostatica-esercizi svolti

Esercitazioni di Fisica LB per ingegneri - A.A. 2003-2004

Esercizio 1

Si immagini che il nucleo di un atomo di idrogeno si possa approssimare come una sferetta uniformemente carica Q di raggio $r = 10^{-10}m$ all'interno della quale possa muoversi liberamente una carica puntiforme (l'elettrone) di carica $-Q$, calcolare i livelli energetici (l'energia totale dell'elettrone) delle orbite circolari. Con quale velocità ruota l'elettrone quando il raggio dell'orbita vale $r_0 = 0.5 \cdot 10^{-10}m$. Quanta energia deve perdere (o eventualmente acquistare) per passare dallo stato in cui orbita con raggio r_0 a quello in cui oscilla intorno al centro di massa del nucleo con ampiezza r_0 ?

Soluzione

Per ipotesi il nucleo di un atomo si deve pensare essere costituito da una distribuzione sferica uniforme di cariche positive. A tale distribuzione si potrà associare una densità di carica ρ costante ed uguale a:

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

essendo V il volume della sfera in cui è distribuita la carica e quindi $V = \frac{4}{3}\pi r_0^3$. Un elettrone che si muove in questa distribuzione di cariche sentirà il capo elettrico da esse generato. Per calcolare tale campo elettrico utilizziamo il teorema di Gauss. Si consideri una superficie sferica S di raggio $r < r_0$ concentrica con il nucleo in questione. Si scriva quindi il flusso del vettore campo elettrico \vec{E} che si vuole calcolare attraverso tale superficie. Per questioni di simmetria, il campo elettrico all'interno della distribuzione di cariche deve avere direzione radiale ed avrà verso diretto verso l'interno a verso l'esterno (bisogna calcolarlo!). Il flusso di questo campo attraverso la superficie sferica S di raggio r vale:

$$\Phi(\vec{E}) \equiv \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

in cui \hat{n} è un versore, per definizione, diretto ortogonalmente a dS e quindi, di punto in punto, diretto in senso radiale verso l'esterno della superficie S . Per le considerazioni fatte in precedenza dunque

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = E_r$$

essendo E_r l'unica componente, diretta in senso radiale, del campo elettrico. Tale componente può dipendere solamente dal raggio della sfera S in questione. Quindi è costante nell'integrazione che definisce $\Phi(\vec{E})$ posso fattorizzarlo all'esterno dell'integrazione. Per il teorema di Gauss, il flusso del campo elettrico attraverso S , inoltre, è uguale a Q_S/ϵ_0 essendo Q_S la carica interna ad S . Quindi:

$$\Phi(\vec{E}) = E_r \int_S dS = \frac{Q_S}{\epsilon_0}$$

dove

$$\int_S dS = S = 4\pi r^2$$

e

$$Q_S = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Rimane quindi:

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

da cui si può ricavare

$$E_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \equiv \tilde{k} r$$

che mi dice che il campo elettrico all'interno della distribuzione di cariche è diretto dall'interno verso l'esterno ed aumenta con la distanza dal centro fino ad un massimo che si ha per $r = r_0$. Per $r \geq r_0$, ovviamente, il campo elettrico sarà descritto da una diversa funzione di r che è la relazione standard:

$$E_r^{(r > r_0)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

Esternamente alla sfera, dunque, il campo elettrico è uguale a quello generato da una carica puntiforme posizionata nel centro della distribuzione di cariche, con una carica uguale alla carica totale della sfera. Si noti che questa considerazione vale in generale per distribuzioni sfericamente simmetriche di carica. Per dimostrare la relazione scritta sopra, si consideri una superficie sferica \tilde{S} con raggio $r \geq r_0$ concentrica alla distribuzione di carica. Il ragionamento visto in precedenza per il flusso del campo elettrico si può ripetere identicamente a parte il fatto che ora la carica totale interna alla superficie scelta non dipende da r ma è sempre costante ed uguale a Q quindi:

$$\Phi(\vec{E}) \equiv 4\pi r^2 E_r = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

da cui:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

come volevasi dimostrare.

Tornando al problema iniziale; dunque ormai noto il campo elettrico nella distribuzione di cariche: $\vec{E} = E_r \hat{n}$ in cui \hat{n} è un versore che, di punto in punto cambia verso essendo sempre diretto in modo radiale. La forza a cui è soggetto l'elettrone in tale campo è $\vec{F}_e = -Q \cdot \vec{E}$. A causa della sua carica negativa, dunque, l'elettrone sente un forza centripeta che lo può tenere vincolato al nucleo se la sua velocità non è troppo grande da permettergli di "scappare" via. L'energia dell'elettrone quindi è data da un'energia cinetica ed un'energia potenziale

$$E = T + U$$

essendo

$$U = U(r) = - \int F_r dr = \frac{1}{2} \tilde{k} Q r^2$$

Si noti che la forza che sente l'elettrone è proporzionale ad r ovvero è formalmente uguale ad una forza di tipo elastico: l'effetto della distribuzione di cariche positive è analogo all'effetto di un elastico che tiene l'elettrone vincolato al centro della sfera. L'energia potenziale è dunque analoga a quella di una molla.

Su un'orbita circolare la forza centripeta genera un'accelerazione centripeta della forma v^2/r . Quindi vale (dalla $F = ma$)

$$m \frac{v^2}{r} = Q\tilde{k}r$$

e quindi

$$mv^2 = Q\tilde{k}r^2$$

e

$$T(r) = \frac{1}{2}Q\tilde{k}r^2 = U(r)$$

ovvero l'energia cinetica e l'energia potenziale dell'elettrone dentro al nucleo su un'orbita circolare sono uguali. Ricordando che l'energia totale si conserva (il campo elettrostatico è un campo conservativo) si immagini ora di posizionare (fermo), ad un certo istante, l'elettrone a distanza r dal centro con velocità nulla. Visto che su di esso viene esercitata una forza centripeta, esso incomincerà ad oscillare passando per il centro della sfera. l'ampiezza dell'oscillazione è r . All'istante iniziale l'elettrone ha un'energia totale pari alla sola energia potenziale $U(r)$. Essa si conserverà durante il moto. È quindi evidente che la differenza di energia fra uno stato di moto circolare E_{mc} ed uno stato di pura oscillazione E_{po} è:

$$\Delta E = E_{mc} - E_{po} = 2U(r) - U(r) = U(r).$$

Esercizio 2

Su una retta sono vincolate tre cariche: due cariche positive uguali entrambe a Q distanti $2d$ fisse, ed una terza carica positiva q libera di muoversi tra le due fisse. Calcolare la posizione di equilibrio stabile di q ed il periodo delle piccole oscillazioni.

Soluzione

Fissiamo l'origine O del sistema di riferimento unidimensionale nel punto di mezzo delle due cariche Q . Vogliamo calcolare il campo elettrico da esse generato. In genere, in questi casi, è comodo calcolare il potenziale elettrostatico V per poi ricavare il campo elettrico derivando, ovvero tenendo presente che

$$\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla} V(x, y, z)$$

Vale il principio di sovrapposizione ovvero il campo elettrico totale generato da una distribuzione di cariche è uguale alla somma dei campi elettrici generati dalle singole cariche in assenza delle altre; analogamente il potenziale elettrostatico totale è dato dalla somma dei potenziali delle cariche considerate singolarmente.

Il problema è unidimensionale: $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$; se V_1 è il potenziale generato dalla carica con ascissa negativa vale:

$$V_1(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d+x}$$

in cui $d+x$ è una distanza e quindi è un numero positivo. Per la seconda carica vale:

$$V_2(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d-x}.$$

Il potenziale complessivamente generato lungo x nell'intervallo $-d < x < d$ vale dunque

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{(d^2 - x^2)}$$

e quindi il campo elettrico lungo x vale

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{dQ}{\pi\epsilon_0} \frac{x}{(d^2 - x^2)^2}.$$

È evidente che, visto che il denominatore è positivo il segno del campo elettrico dipende solo da x : il campo elettrico punta verso l'origine del sistema di riferimento scelto. La forza agente sulla carica q è uguale a $F_x = qE_x$ e si annulla per $x = 0$. Dunque, l'origine è un punto di equilibrio del sistema. Visto, inoltre, che il campo di forze è diretto verso tale origine, tale punto di equilibrio è stabile: spostando leggermente la carica dall'equilibrio il campo di forze presente tende a riportarla in O .

Studiare le piccole oscillazioni del sistema significa limitarne lo studio ad un intorno sufficientemente piccolo di un punto di equilibrio stabile, tale per cui, in tale intorno la forza è ben approssimata da un'espressione del tipo $-kx$ (in cui x è la generica coordinata che è, di volta in volta, utilizzata per descrivere il sistema in esame), analoga alla forza elastica.. È sempre possibile farlo su intorni opportuni. Per ottenere tale espressione, è sufficiente fare uno sviluppo di Taylor al primo ordine intorno al punto di equilibrio stabile x_0 dell'espressione della forza $F(x)$:

$$F(x) \sim F(x_0) + \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) = \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0).$$

Nel caso in questione $x_0 = 0$:

$$F(x) = -\frac{dqQ}{\pi\epsilon_0} \frac{x}{(d^2 - x^2)^2} \sim -\frac{qQ}{\pi\epsilon_0 d^3} x \equiv -kx.$$

A questo punto il problema è quello di un oscillatore armonico ben analizzato in fisica LA; se m è la massa di q vale $m\ddot{x} = -kx$ ed il periodo di tale moto è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

con

$$k = \frac{qQ}{\pi\epsilon_0 d^3}.$$

Esercizio 3

Una particella di massa m e carica $-q$ è vincolata a muoversi lungo l'asse x . La particella interagisce con una circonferenza centrata nell'origine, di carica Q e raggio R totalmente simmetrica rispetto all'asse. Calcolare l'energia potenziale della particella carica e la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

Soluzione

Incominciamo calcolando il potenziale elettrostatico lungo l'asse x . La carica sulla circonferenza è distribuita in modo uniforme, quindi è possibile utilizzare la densità lineare di carica $\lambda = Q/c$ che è una quantità costante (essendo c la misura della circonferenza $c = 2\pi R$). Dividiamo tale circonferenza in elementi di lunghezza infinitesima dl . Ciascun elemento ha una carica $dQ = \lambda dl$ e contribuisce al potenziale totale in un punto che dista r da esso tramite:

$$dV_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r}$$

. Interessa calcolare il potenziale sull'asse: sia x la coordinata di un generico punto, avendo scelto l'origine del sistema di riferimento O coincidente con il centro della circonferenza. La distanza di tale punto da dl vale, per il teorema di Pitagora:

$$r = \sqrt{R^2 + x^2};$$

inoltre scelto x in cui calcolare il potenziale tutti i segmenti infinitesimi della circonferenza contribuiscono al potenziale totale allo stesso modo (per questioni di simmetria). Dunque:

$$V(x) = \int_c dV = \int_c \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

L'energia potenziale di una carica $-q$ posta in x è

$$U(x) = -qV(x)$$

e, il campo di forze a cui è soggetta vale

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

I punti di equilibrio, in questo campo di forze, si ottengono, al solito, risolvendo l'equazione $F_x = 0$. In questo caso si trova che questa relazione è soddisfatta quando $x = 0$. Siccome in tale punto di equilibrio vale pure (dimostare!)

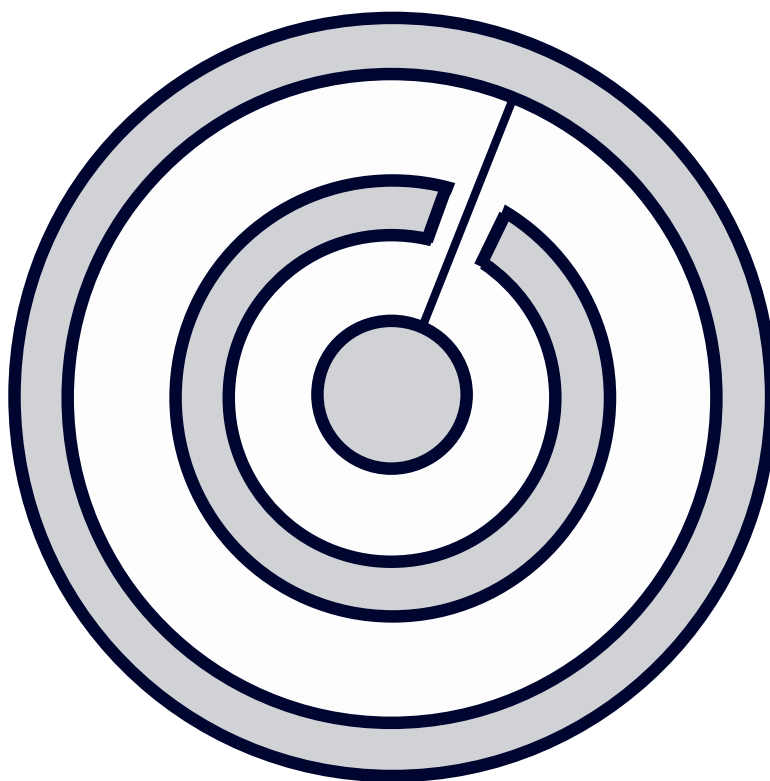
$$\left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x=0} > 0$$

allora il punto di equilibrio è stabile. Intorno a tale punto possiamo andare a considerare l'approssimazione delle piccole oscillazioni: sviluppiamo con Taylor al primo ordine la forza:

$$F_x \sim -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} x \equiv -kx$$

ed infine scriviamo la frequenza in questa approssimazione:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$



Esercizio 4 - (esercizi d'esame)

Una sfera conduttrice di raggio $r_1 = (\xi/1000) \text{ cm}$ è circondata da due gusci sferici conduttori concentrici di raggio $r_2 = 2 \text{ cm}$ e $r_3 = 4 \text{ cm}$ e spessore trascurabile (vedi figura). Il guscio sferico di raggio r_2 viene caricato con una carica $q_2 = \xi \cdot 10^{-8} \text{ C}$. La sfera di raggio r_1 e il guscio sferico di raggio r_3 vengono poi posti a contatto con un filo conduttore passante per un piccolo forellino praticato sul guscio sferico di raggio r_2 , che non tocca quest'ultimo guscio sferico. Calcolare la carica elettrica q_1 indotta sulla sfera di raggio r_1 . (Totale 01/07/2003)

Soluzione

Inizialmente, in assenza di cariche (i conduttori sono tutti neutri) non è ovviamente presente alcun campo elettrico e i conduttori c_1 (la sfera interna) e c_3 (il guscio più esterno) hanno lo stesso potenziale (altrimenti ci sarebbe passaggio di cariche attraverso il filo conduttore che li collega). Quando viene caricato il conduttore c_2 esso produce, in prima istanza, un campo elettrico diretto esternamente che modifica il potenziale elettrostatico di c_3 via induzione elettrostatica ma non ha alcun effetto diretto su c_1 . A questo istante, quindi, incominceranno a fluire cariche nel filo conduttore per riportare i due conduttori c_1 e c_3 allo stesso potenziale. Alla fine del processo, c_1 conterrà una carica q_1 e c_3 una carica q_3 con $q_1 + q_3 = 0$.

Per calcolare q_1 , all'equilibrio, è dunque sufficiente richiedere che la differenza di potenziale fra i conduttori c_1 e c_3 sia uguale a zero. Si noti che il campo elettrico fra c_1 e c_2 (E_{12}) ha un'espressione

diversa rispetto al campo elettrico fra c_2 e c_3 (E_{23}). Entrambi i campi, per questioni di simmetria sono diretti radialmente e la loro componente radiale è

$$E_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2}$$

mentre

$$E_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r^2}$$

come si dimostra facilmente applicando il teorema di Gauss (vedere il primo esercizio in cui si calcola il campo elettrico esternamente alla sfera). La differenza di potenziale fra c_1 e c_3 vale

$$\Delta V_{31} = - \int_{r_1}^{r_3} E_r dr = - \int_{r_1}^{r_2} E_{12} dr - \int_{r_2}^{r_3} E_{23} dr$$

e deve essere nulla quando le cariche smettono di muoversi. Dunque

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_2} - \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_1 + q_2}{r_3} - \frac{q_1 + q_2}{r_2} \right) = 0$$

che risolta dà:

$$q_1 = q_2 \frac{r_1 r_3 - r_2}{r_3 r_1 - r_3}$$

che è negativa: sul conduttore c_1 si accumula un eccesso negativo di cariche.