Esercizi di Fisica LB - Ottica

Esercitazioni di Fisica LB per ingegneri - A.A. 2003-2004

Esercizio 1

Un'onda elettromagnetica piana monocromatica di propaga nel vuoto lungo l'asse x di un sistema di riferimento cartesiano. Sapendo che il campo elettrico oscilla come $E(x,t) = E_0 \sin(k\,x - \omega t)$ lungo l'asse y, calcolare come variano nel tempo le componenti non nulle del campo magnetico.

Soluzione

Le equazioni di Maxwell nel vuoto (quindi in assenza di cariche localizzate e/o in movimento) sono

$$\vec{\nabla}\vec{E}(x,y,z) = 0 \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\vec{B}(x,y,z) = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \wedge B(x,y,z) = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}(x,y,z)}{\partial t} \quad \text{(Ampere-Maxwell)} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(x,y,z) = -\frac{\partial\vec{B}(x,y,z)}{\partial t} \quad \text{(Faraday-Lenz)} \tag{4}$$

e si riducono alle 6 equazioni disaccoppiate (equazioni delle onde):

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E}(x,y,z;t) = 0, \tag{5}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B}(x,y,z;t) = 0. \tag{6}$$

Un'equazione del tipo:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(x,y,z;t) = 0$$

ha soluzioni del tipo:

$$f(x,y,z;t) = f_1(\vec{r}\cdot\hat{s} - ct) + f_2(\vec{r}\cdot\hat{s} + ct)$$

con $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ed in cui $f_1(\alpha)$ ed $f_2(\alpha)$ sono funzioni di qualsiasi che, a causa dell'argomento $\alpha = \vec{r}\cdot\hat{s} \pm ct$ traslano nel verso di $\hat{s}$ (f_1) o nel verso opposto (f_2) al variare del tempo. L'onda piana è una soluzione delle equazioni di Maxwell in cui f_1 e/o f_2 sono della forma $\sin\alpha$ o $\cos\alpha$.
Dunque le equazioni di Maxwell in assenza di correnti hanno delle soluzioni non banali anche in assenza di sorgenti di campo.
Nel caso in questione, per ipotesi, è data una soluzione delle equazioni di Maxwell per il campo elettrico. I parametri ω e k che compaiono sono vincolati fra di loro per soddisfare all'equazione delle onde nel vuoto:

$$kx - \omega t = k(x - \frac{\omega}{k}t) = k(x - ct) \rightarrow \frac{\omega}{k} = c.$$

Le equazioni (3) e (4) esprimono il fatto che la presenza di un campo elettrico deve essere accompagnata dalla presenza di campo magnetico che simultaneamente le soddisfa (non possono essere soddisfatte da un campo magnetico nullo!). Per trovare questo campo magnetico cerchiamo una funzione $\vec{B}(x, y, z, ; t)$ che soddisfi alla (4). Il rotore del campo elettrico noto per ipotesi è

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = (\partial_y E_z - \partial_z E_y)\hat{\imath} + (\partial z E_x - \partial_x E_z)\hat{\jmath} + (\partial x E_y - \partial y E x)\hat{k}$$

ma le componenti E_x ed E_z del campo elettrico dato sono nulle quindi non contribuiscono al rotore. Inoltre l'unica componente non nulla è una funzione solo di x e t (e ciò esprime il fatto che l'onda si propaga nella direzione dell'asse x) quindi solo le derivate rispetto ad x sono non nulle. Perciò:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \partial_x E_y \hat{k} = k E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{k}$$

e la legge di faraday-Lenz diventa

$$\partial_t \vec{B} = -k E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{k}$$

che, integrata membro a membro dà:

$$\int dt\, \partial_t \vec{B} = \int dt\, [-k E_0 \cos(kx - \omega t)]\hat{k} \Rightarrow \vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \sin(kx - \omega t)\hat{k} = \frac{E_0}{c} \sin(kx - \omega t)\hat{k}$$

che è proprio la soluzione cercata.

Esercizio 2

Verificare che, per le onde elettromagnetiche piane (prendere l'onda dell'esercizio precedente), la densità di energia dovuta alla presenza del campo elettrico è uguale alla densità di energia dovuta alla presenza del campo magnetico.

Soluzione

I due campi soluzioni delle equazioni di Maxwell dell'esercizio precedente riempiono lo spazio; essi non sono campi indipendenti ma sono legati dalla condizione di soddisfare simultaneamente le equazioni di Maxwell. La sola dipendenza in x indica il fatto che sono costanti al variare di y e z. Si consideri un punto dello spazio a piacere $P : (x_0, y_0, z_0)$ e si scriva la densità di energia in tale punto dovuta alla presenza del campo elettrico, e poi quella dovuta al campo magnetico.
La densità di energia in tale punto ad un certo istante t_0 dovuta al campo elettrico è

$$\rho_E(x_0, y_0, z_0; t_0) = \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2(x_0, y_0, z_0; t_0) = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \sin^2(kx_0 - \omega t_0)$$

mentre quella dovuta al campo magnetico associato ad $\vec{E}$ è

$$\rho_B(x_0, y_0, z_0; t_0) = \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2(x_0, y_0, z_0; t_0) = \frac{1}{2\mu_0}\frac{E_0^2}{c^2} \sin^2(kx_0 - \omega t_0) = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \sin^2(kx_0 - \omega t_0)$$

essendo $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$. Quindi le due densità di energia sono uguali.

Esercizio 3

Calcolare il flusso ed il flusso medio nel tempo del vettore di Poynting di un onda elettromagnetica piana il cui capo elettrico varia secondo la legge $\vec{E}(x,t) = E_y \cos(k\,x - \omega t)\hat{\jmath}$ attraverso una superficie ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda di area L^2 e disposta ad $x = 0$. Calcolare poi l'*intensità* S *dell'onda* definita come la rapidità con cui l'energia attraversa l'area unitaria ovvero la quantità di energia media che attraversa la superficie unitaria nell'unità di tempo.

Soluzione

Il vettore di Poynting in un punto dello spazio dovuto alla simultanea presenza, in quel punto, di un campo elettrico ed un campo magnetico è

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0};$$

come abbiamo visto negli esercizi precedenti un campo elettrico $\vec{E}(x,t) = E_y \cos(k\,x - \omega t)\hat{\jmath}$ è soluzione delle equazioni di Maxwell se è accompagnato da un campo magnetico:

$$\vec{B}(x,t) = \frac{E_y}{c} \cos(k\,x - \omega t)\hat{k}$$

ortogonale al campo elettrico ed alla direzione di propagazione dell'onda. Quindi, quando i due campi sono non nulli si può scrivere un vettore di Poynting non nullo derivante dalla loro simultanea presenza:

$$\vec{S}(x,t) = \frac{E_y^2}{c\mu_0} \cos^2(kx - \omega t)\hat{\imath}.$$

Il suo flusso attraverso una superficie A che sta sul piano $x = 0$ non dipende, ovviamente, dalla posizione della superficie sul piano e dalla sua forma ma solo dalla sua area (visto che il vettore di Poynting non dipende da y e z). Esso vale:

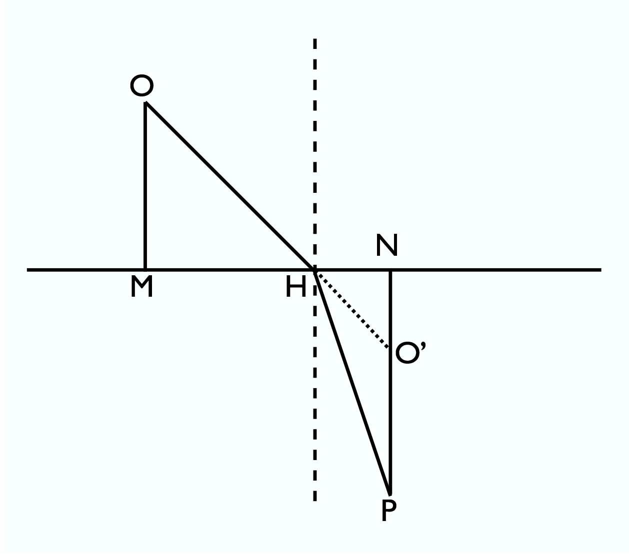
$$\Phi_A(\vec{S}) = \int_A dS\ \hat{\imath} \cdot \vec{S}(0,t) = \frac{A\,E_y^2}{c\,\mu_0} \cos^2(\omega t)$$

essendo $\hat{\imath}$ anche il versore perpendicolare alla superficie A. Tale flusso dipende ovviamente da t e per $\omega t = \pi/2 + m\pi$ è nullo (a quell'istante sono simultaneamente nulli sia il campo elettrico che il campo magnetico in $x = 0$).
Il valore medio nel tempo di tale flusso si ottiene facendo la media su un periodo del flusso. Così facendo (ricordarsi gli integrali delle correnti alternate) il coseno si media ad $1/2$ e rimane:

$$\langle \Phi_A(\vec{S}) \rangle = \frac{A\,E_y^2}{2\,c\,\mu_0}.$$

Calcoliamo, ora la quantità di energia che attraversa una superficie di area unitaria nell'unità di tempo. Nell'esercizio precedente si erano calcolate le densità di energia del campo magnetico ed elttrico di un'onda piana. Il loro valore medio nel tempo in un punto dello spazio vale:

$$\langle \rho_E + \rho_B \rangle = 2\langle \rho_E \rangle = \langle \epsilon_0 E_y^2 \sin^2(kx_0 - \omega t_0) \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_y^2.$$



Se questa energia si propaga con l'onda alla velocità della luce allora nell'unità di tempo ($\Delta t = 1\,secondo$) l'energia contenuta in un cilindro di area di base unitaria ($A = 1\,m^2$) ed altezza $c\,\Delta t$ attraversa la superficie A. Tale energia è (in media):

$$\Delta E = A\,c\,\Delta t \langle \rho_E + \rho_B \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 A\,c\,\Delta t = \frac{A\,E_y^2}{2\,c\,\mu_0}\Delta t = \frac{E_y^2}{2\,c\,\mu_0}(m^2\,s)$$

ossia è uguale al flusso medio del vettore di Poynting attraverso la superficie unitaria moltiplicato per $\Delta t = 1\,s$.

Esercizio 13

Un osservatore si trova ad un'altezza h_+ rispetto ad una superficie d'acqua (indice di rifrazione $n_{H_2O} = 1.33$) e guarda un pesce immerso ad una profondità h_-. A quale profondità il pesce appare all'osservatore? (Approssimare a piccoli angoli di incidenza e rifrazione...)

Soluzione

Il problema è descritto nella figura sopra in cui il pesce si trova nel punto S, l'osservatore è in O, $OM = h_+$, $PN = h_-$. Ragionando in modo euristico: il pesce è visibile all'osservatore grazie al raggio luminoso che emette, viene rifratto in H e viene rilevato in O. L'osservatore avrà poi l'impressione che il raggio abbia seguito il percorso rettilineo OO' quindi la lunghezza di $O'N \equiv p$ sarà percepita come la profondità apparente. Gli angoli $\theta_r = P\widehat{H}N$ e $\theta_i = O\widehat{H}N = O'\widehat{H}N$ sono legati dalla legge di Snell:

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r$$

con $n_i = 1$, $n_r = 1.33$; per piccoli angoli ($\sin\theta \sim \theta$) la legge di Snell si riduce a

$$n_r = \frac{\theta_i}{\theta_r}.$$

Dal punto di vista geometrico p si può ottenere sfruttando al similitudine dei triangoli HNO' e HMO:

$$\frac{p}{HN} = \frac{h_+}{HM}$$

con $HN = h_- \tan\theta_r \sim h_-\theta_r$ e $HM = h_+ \tan\theta_i \sim h_+\theta_i$. Sostituendo:

$$\frac{p}{h_-\theta_r} = \frac{h_+}{h_+\theta_i} \Rightarrow p = \frac{\theta_r}{\theta_i} h_-$$

in cui il rapporto fra angolo di incidenza ed angolo di rifrazione si può esprimere con n_r:

$$p = n_r^{-1} h_-.$$

Esercizio 17

Si consideri un condensatore piano con armature circolari di raggio r che distano d. Tale condensatore, inizialmente carico (carica iniziale Q_0), viene fatto scaricare su di una resistenza R. Calcolare il flusso del vettore di pointing attrverso il volume delimitato dal condensatore durante la carica dello stesso. Che cosa rappresenta l'integrale nel tempo (da 0 a t) di tale flusso?

Soluzione

È noto che la carica sulle armature di un condensatore che scarica su di una resistenza varia nel tempo secondo l'equazione

$$Q(t) = Q_0 \exp(-t/RC)$$

essendo C la capacità del condensatore in questione. Il campo elettrico interno al condensatore dipende dalla carica sulle armature e vale (in modulo)

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} = \frac{Q(t)}{\pi r^2 \epsilon_0}.$$

Per come è fatto, il condensatore delimita un volume di forma cilindrica. In tale volume è localizzato il campo elettrico calcolato sopra. Sulla superficie laterale di tale cilindro il campo elettrico è diverso da zero ed è dato dall'espressione precedente; quando questo campo è dipendente dal tempo, nel condensatore scorre una corrente di spostamento non nulla e quindi sulla superficie laterale del condensatore vi è pure un campo magnetico legato ad $E(t)$ dalla legge di Ampere-Maxwell nel vuoto:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = c^{-2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Utilizzando l'espressione integrale della legge di Ampere-Maxwell (vedi appunti del Prof. Galli) si trova un vettore di Poynting sulla superficie laterale del cilindro di modulo pari a

$$|\vec{S}| = \frac{\epsilon_0}{2} r E \frac{\partial E}{\partial t}$$

e diretto verso l'esterno in senso ortogonale alla superficie. Il flusso di questo vettore attraverso la superficie laterale $A = 2\pi r d$ del cilindro è uguale a:

$$\Phi_A(\vec{S}) = \int_A dS \hat{n} \cdot \vec{S} = |\vec{S}| A = 2\pi r d \frac{\epsilon_0}{4} r \frac{\partial E^2}{\partial t} = V \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = V \frac{\partial \rho_E}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}_E}{\partial t}$$

ovvero è uguale alla derivata rispetto al tempo dell'energia elettrostatica $\mathcal{E}_E$ del condensatore. L'integrale nel tempo del flusso, quindi è uguale alla variazione di energia elettrostatica accumulata tra le armature del condensatore:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\Phi_A(\vec{S}) = \mathcal{E}_E(t_2) - \mathcal{E}_E(t_1) \equiv \Delta\mathcal{E}_E$$

Esercizi avanzati e d'esame

Esercizio 3

Sia dato un condensatore costiuito da due armature circolari di raggio $r = R \cdot 10^{-3} m$ ad una certa distanza. A partire dall'istante $t = 0\, s$ il condensatore viene caricato. Durante il processo di carica il vettore di poynting sulla superficie cilindrica che delimita il condensatore varia, in modulo, nel tempo come $|\vec{S}(t)| = (R^{\frac{3}{2}} \cdot W \cdot m^{-2} \cdot s^{-2}) \cdot t^2$. Calcolare la carica accumulata sulle armature all'istante $t = R^{\frac{1}{2}}\, s$. (*Parziale 12/06/2003*)

Soluzione

È noto che l'integrale nel tempo del flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del condensatore è uguale alla variazione della sua energia interna che si può esprimere pure in funzione della carica accumulata sulle armature del condensatore:

$$\Delta\mathcal{E}_E = \frac{Q^2(t_2)}{2C} - \frac{Q^2(t_1)}{2C}.$$

In questo caso, dunque:

$$\int_0^{R^{1/2}} dt\Phi_A(\vec{S}) = \frac{Q^2(R^{1/2})}{2C} - \frac{Q^2(0)}{2C} = \frac{Q^2(R^{1/2})}{2C}$$

essendo $Q(0) = 0$. L'integrale a lato sinistro vale:

$$\int_0^{R^{1/2}} dt\Phi_A(\vec{S}) = 2\pi r d R^{3/2} \int_0^{R^{1/2}} dt\, t^2 = \frac{2\pi r d R^3}{3}$$

e $C = \epsilon_0 S/s = \epsilon_0 \pi R^2/d$. Eguagliando le due espressioni per la differenza di energia ed esplicitando la carica quindi si ottiene

$$Q(t = R^{1/2}\, s) = \sqrt{\frac{4\pi^2\epsilon_0 r^3}{3} R^3}.$$