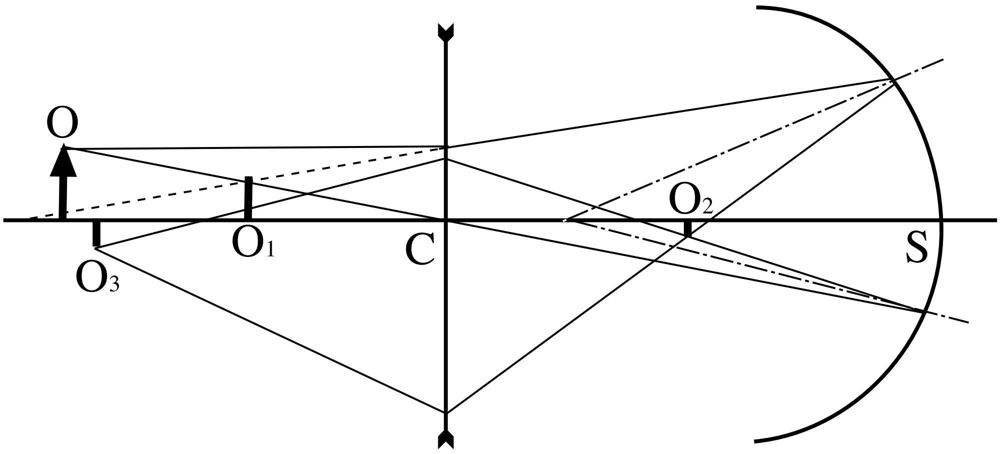
Esercizi di Fisica LB - Ottica

Esercitazioni di Fisica LB per ingegneri - A.A. 2003-2004



Esercizio 1

Un sistema ottico centrato è costituito (da sinistra a destra) da una lente sottile biconcava (l'indice di rifrazione della lente è $n_l = 1.5$) simmetrica di raggio $R_l = \pm 1\,m$ e da uno specchio concavo anch'esso di raggio $R_s = 2\,m$ distante dalla lente $\Delta x = 0.5\,m$. Calcolare la posizione dell'immagine (è reale?) di un oggetto che viene posto $3\,m$ a sinistra della lente e il suo ingrandimento lineare.

Soluzione

Per trattare un sistema ottico centrato complesso, come quello descritto nell'ipotesi, è necessario scomporlo in sistemi ottici centrati più semplici di cui si conosce l'effetto. Una sorgente di luce (oggetto) nello spazio degli oggetti del sistema ottico complessivo formerà un'immagine che è la conseguenza dell'effetto sequenziale dei sistemi ottici elementari.
Nel caso in questione, ad esempio, i raggi provenienti dall'oggetto a $x_O = 3\,m$ dalla lente formeranno un'immagine per effetto della lente stessa e tale immagine si potrà pensare come l'oggetto per lo specchio concavo che a sua volta, dunque, formerà la sua immagine. Questa immagine riflessa sarà infine oggetto, di nuovo, per la lente che formerà un'immagine che risulterà pure essere l'immagine (formata dal sistema ottico complessivo) dell'oggetto di partenza. Partiamo, dunque, dall'effetto della lente biconcava.
Una lente biconcava è una lente sottile con raggi di curvatura rispettivamente negativo (il primo) e positivo (il secondo). La distanza focale di una lente concava è quindi negativa il che significa che un fascio di raggi luminosi parallelo all'asse ottico, diverge una volta attraversata la lente. Quindi un oggetto, posto in una qualsiasi posizione dello spazio oggetti forma sempre un'immagine virtuale.
L'equazione della lente (con indice di rifrazione n ed immersa nell'aria) é:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \equiv \frac{1}{f} \tag{1}$$

in cui x_1 è la coordinata dell'oggetto (e per definizione è sempre positiva visto che lo spazio degli oggetti è definito come la zona in cui l'oggetto è collocato), x_2 è la coordinata dell'immagine (è positiva se l'immagine è nello spazio delle immagini, mentre è negativa se è nello spazio degli oggetti), R_1 è il raggio di curvatura della superficie della lente affacciata allo spazio degli oggetti (positivo se tale superficie è convessa rispetto a tale spazio e negativo se è concava), R_2 è il raggio di curvatura della superficie della lente affacciata allo spazio delle immagini (positivo se tale superficie è concava rispetto a tale spazio e negativo se è convessa).
Nel caso in questione si ha:

$$x_1 = 3\,m,\ R_1 = 1\,m,\ R_2 = -1\,m, n = 1.5,$$

e quindi, risolvendo (1), si calcola x_2 ovvero la coordinata x_{O_1} dell'immagine dell'oggetto formata dalla lente. In generale x_{O_1} è una coordinata negativa ovvero l'immagine O_1 (vedi figura) che si costruisce con la sola lente partendo dall'oggetto (O) in questione si trova nello spazio degli oggetti A questo punto l'immagine si potrà considerare come oggetto per lo specchio concavo Infatti i raggi luminosi che escono da O_1 sono pure i prolungamenti dei raggi deflessi dalla lente e provenienti da O. L'equazione dello specchio è:

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{R} \tag{2}$$

in cui $R > 0$ se lo specchio è convesso mentre $R < 0$ se lo specchio è concavo. In questo caso:

$$x_1 = \Delta x - x_L,\ R = -2\,m,$$

essendo x_1 la distanza dell'immagine formata dalla lente dallo specchio. Tramite (2) è quindi possibile determinare x_2 ovvero x_{O_2} ossia la coordinata dell'immagine formata dallo specchio.
I raggi luminosi riflessi dalla specchio, oltre a formare un'immagine virtuale O_2 (che esiste a prescindere dalla presenza della lente), proseguendo nel loro cammino, ripassano attraverso la lente e, cambiando ancora direzione, formano l'immagine O_3. Questa immagine non è solo l'immagine dell'oggetto costituito dall'immagine dello specchio. Essa costituisce pure l'immagine prodotta dal sistema ottico complessivo dell'oggetto reale in x_O. Per ottenere x_{O_3} si utilizza ancora (1) con $x_1 = \Delta x - x_{O_2}$ e con fuoco uguale a quello utilizzato per la prima rifrazione. Risolvendo si ottiene finalmente x_{O_3}.
L'ingrandimento del sistema ottico è, infine, dato dal prodotto degli ingrandimenti dei sistemi ottici elementari che lo compongono:

$$G_{tot} = G_L^{(1)} \cdot G_S \cdot G_L^{(2)};$$

infatti sia l_O l'altezza di un oggetto[1] in x_O, l_L l'altezza della sua immagine formata dalla lente e l_S l'altezza dell'immagine complessivamente formata in x_S, allora

$$G_{tot} \equiv \frac{l_S}{l_O} = \frac{l_L}{l_O} \cdot \frac{l_S}{l_L} \equiv G_L \cdot G_S.$$

Gli ingrandimenti sopra sono noti:

$$G_L^{(1)} = \frac{x_{O_1}}{x_O},\ G_S = -\frac{x_{O_2}}{\Delta x - x_{O_1}},\ G_L^{(2)} = \frac{x_{O_3}}{\Delta x - x_{O_2}}$$

quindi è noto G_{tot}.

[1]si considerino per semplicità solo i primi due sistemi ottici;

Esercizio 2

Sia data una lente sottile biconvessa simmetrica rispetto al suo asse e di raggio $\pm R = 1\,m$. Sapendo che la convergenza della lente è di 2 *diottrie* calcolare l'indice di rifrazione della stessa. Calcolare l'ingrandimento lineare corrispondente ad un piano che dista $d = 3\,m$ dalla lente ed il suo piano coniugato.

Soluzione

La convergenza della lente mi permette di determinare la sua distanza focale, che è l'opposto della convergenza (essendo $1\,diottria = 1\,m^{-1}$):

$$\frac{1}{f} = 2\,m^{-1} \Rightarrow f = 0.5\,m.$$

La convergenza della lente è legata alle sue caratteristiche fisiche dalla relazione

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

con $R_1 = R$, $R_2 = -R$. L'unica incognita, rimane dunque n che si può ottenere risolvendo l'equazione.
Scriviamo ora l'equazione della lente (1) per un oggetto che si trovi a distanza d dalla lente stessa:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f}$$

e risolviamola in x_2 per ottenere la coordinata dell'immagine. Noti, a questo punto, d, x_2 e f l'ingrandimento si ottiene semplicemente applicando la sua espressione nel caso di una lente:

$$G = \frac{x_2}{d}.$$

Esercizio 3

Un osservatore si trova ad un'altezza h_+ rispetto ad una superficie d'acqua (indice di rifrazione $n_{H_2O} = 1.33$) e dista d da un pesce immerso ad una profondità h_-. A quale profondità il pesce appare all'osservatore? (Approssimare a piccoli angoli di incidenza e rifrazione...)

Esercizio 4

Sia dato uno specchio sferico concavo di distanza focale f. Calcolarne il raggio r. Supponendo, poi, di appoggiare un oggetto di altezza h sull'asse ottico a distanza $2r$ dallo specchio calcolare l'altezza dell'immagine riflessa e specificare se si tratti di un'immagine reale o di un'immagine virtuale, se è diritta o capovolta.

Soluzione

Essendo lo specchio concavo la sua distanza focale sarà negativa (così come il valore del raggio che deve essere utilizzato in (2); tuttavia inteso come distanza il raggio è una quantità positiva per definizione); utilizzando l'equazione (2) con $x_1 = +\infty$ rimane

$$-\frac{1}{f} = -\frac{2}{-r} \Rightarrow f = -\frac{r}{2} \Rightarrow r = 2|f|.$$

Un oggetto a distanza $2r$ dallo specchio forma un'immagine in x_2 soluzione dell'equazione

$$\frac{1}{2r} - \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{-r};$$

noti quindi le coordinate di oggetto ed immagine l'ingrandimento è noto ed è dato da

$$G = -\frac{x_2}{2r} \equiv \frac{h'}{h}$$

ovvero l'altezza dell'immagine di un oggetto di altezza h posto in $x_1 = 2r$ è

$$h' = G \cdot h.$$

Tale immagine è infine reale (perchè costruita con raggi luminosi reali e non con i loro prolungamenti) e capovolta come si realizza con una semplice costruzione geometrica.

Esercizio 5

Sia dato un diottro sferico convesso di raggio r ed indice di rifrazione $n = 1.5$. Calcolarne i fuochi. Determinare quindi l'ingrandimento angolare K relativo ad un piano a distanza $3\,r$ dal diottro (nello spazio degli oggetti) ed il suo piano coniugato.

Soluzione

L'equazione del diottro è probabilmente l'equazione più importante dell'ottica geometrica: il diottro sferico costituisce il sistema ottico più elementare e ogni sistema ottico complesso si può sempre pensare come una successione di diottri. Nonostante ciò non é sempre conveniente decomporre un sistema ottico fino a questi costituenti ultimi perchè, così facendo si rischia di allungare parecchio i conti: quando si ha a che fare con delle lenti immerse nell'aria, è quindi più semplice ragionare con l'equazione (1) piuttosto che utilizzare due volte l'equazione dei diottri che la compongono.
L'equazione del diottro è:

$$\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{3}$$

in cui n_1 è l'indice di rifrazione dello spazio oggetti, n_2 è l'indice di rifrazione dello spazio immagini, R è il raggio della superfici che separa i due mezzi ed è positivo nel caso di diottri convessi (rispetto allo spazio oggetti) e negativo nel caso di diottri concavi.
Equivalentemente l'equazione del diottro si scrive come

$$\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} = 1 \tag{4}$$

in cui f_1 ed f_2 sono i due fuochi: f_2 è la coordinata in cui convergono un fascio di raggi paralleli all'asse ottico provenienti dallo spazio oggetti, f_1 è la coordinata in cui convergono un fascio di raggi paralleli all'asse ottico provenienti dallo spazio immagini.
Nel caso in questione $r > 0$ e per ottenere f_1

$$\frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{r} \Rightarrow f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r;$$

e per ottenere f_1:

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2 - n_1}{r} \Rightarrow f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r.$$

L'ingrandimento angolare di un piano che dista $3r$ (ed il cui piano immagine ha coordinata d_I con d e d_I che soddisfano all'equazione del diottro) vale

$$K \equiv \frac{\theta'}{\theta} = \frac{d}{d_I}$$

in cui $d = 3r$ e d_I si ottiene risolvendo l'equazione (3) in cui

$$n_1 = 1, \; n_2 = 1.5, \; x_1 = d = 3r, \; R = r.$$

Esercizi avanzati e d'esame

Esercizio 4

Un sistema ottico è costituito da una lente biconvessa di indice di rifrazione $n = 1 + \frac{\sqrt{R}}{10}$. I raggi dei due diottri che formano la lente (R_1 ed R_2) sono tali che $|R_1| = |R_2| = 5 \cdot R\, mm$. Calcolare a che distanza dalla lente deve essere messo un oggetto delle dimensioni di $\frac{\sqrt{R}}{10}\, mm$ per formare un'immagine virtuale delle dimensioni di $\frac{R}{2}\, mm$. (*Parziale 12/06/2003*)

Soluzione

Per formare un'immagine virtuale con una lente biconvessa è necessario collocare l'oggetto fra il fuoco e la lente. L'immagine virtuale ha una coordinata negativa perchè si trova nello spazio oggetti. L'ingrandimento che si ottiene mettendo un oggetto nel punto x_1 con $0 < x_1 < f$, in valore assoluto vale

$$|G| = \frac{-x_2}{x_1}$$

essendo x_2 la coordinata dell'immagine; è richiesto in ipotesi che tale ingrandimento debba valere

$$|G| = \frac{l'}{l} = \frac{R \cdot 10}{2 \cdot \sqrt{R}} = 5\sqrt{R}$$

quindi deve valere, simultaneamente alla (1):

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

con

$$R_1 = 5R,\ R_2 = -5R,\ n = 1 + \frac{\sqrt{R}}{10},$$

l'equazione:

$$\frac{-x_2}{x_1} = 5\sqrt{R}.$$

Queste due equazioni formano un sistema di due equazioni in due variabili. La risoluzione di questo sistema da la soluzione cercata:

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{5\sqrt{R}}\right) f$$

con $f = 25\sqrt{R}$.