Esercizi di Fisica LB - Ottica: polarizzazione e diffrazione

Esercitazioni di Fisica LB per ingegneri - A.A. 2003-2004

Esercizio 1

Calcolare la larghezza della frangia centrale della figura di interferenza generata da un fascio di luce di lunghezza d'onda $\lambda = 5 \cdot 10^{-6} m$ in un esperimento di Young sapendo che la distanza fra le due fenditure è pari a $d = 1\, mm$ e che lo schermo dista $L = 0.5\, m$.

Esercizio 2

Un fascio di luce non polarizzato viene fatto incidere su una lastra di vetro (indice di rifrazione $n_V = 1.5$). Calcolare quanto deve essere l'angolo di incidenza θ_i affinchè l'onda riflessa sia completamente polarizzata.

Soluzione

La polarizzazione dell'onda riflessa da una superficie è un fenomeno noto. L'onda riflessa è totalmente polarizzata quando l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di Brewster, ovvero quando l'angolo fra il raggio riflesso ed il raggio rifratto è uguale a 90°. Tramite considerazioni geometriche ed utilizzando la legge di Snell che mette in relazione angoli di incidenza ad angoli di rifrazione è perciò possibile ottenere l'espressione per l'angolo di Brewster θ_B (vedere per i dettagli gli appunti del Prof. Galli):

$$\theta_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}$$

essendo n_1 ed n_2 rispettivamente l'indice di rifrazione del mezzo che contiene il raggio rifratto e quello del mezzo che contiene raggio incidente e raggio riflesso. Nel caso in questione $n_1 = 1$ ed $n_2 = n_V = 1.5$.

Esercizio 3

Un fascio di luce polarizzata circolarmente attraversa un polarizzatore disposto ortogonalmente alla direzione di propagazione dell'onda. Calcolare il rapporto fra l'intensità incidente e l'intensità dell'onda polarizzata linearmente che esce dal polarizzatore.

Soluzione

Per semplicità consideriamo un'onda piana monocromatica che si propaga lungo l'asse delle x. Le componenti non nulle del campo elettrico di quest'onda sono, in generale, quelle perpendicolari alla direzione di propagazione quindi E_y ed E_z. Il campo elettrico totale è dunque

$$\vec{E}(x,t) = E_y(x,t)\hat{j} + E_z(x,t)\hat{k}.$$

Se l'onda è monocromatica le due componenti sopra sono combinazioni lineari di funzioni oscillanti (del tipo sin e cos) di argomento $kx \pm \omega t + \delta$ ciascuna moltiplicata per una qualche ampiezza. Con un opportuna scelta di δ le due componenti si riescono a scrivere (se l'onda avanza nel verso di x) come

$$E_y(x,t) = A_y \cos(kx - \omega t + \delta),\ E_z(x,t) = A_z \cos(kx - \omega t + \delta + \Delta\varphi).$$

La polarizzazione dell'onda descritta dal campo elettrico sopra è circolare quando $A_y = A_z$ e i due coseni sono sfasati di

$$\Delta\varphi = \pi/2 \pm m\pi.$$

In questo caso, sia $\alpha = kx - \omega t + \delta$, calcoliamo l'intenità luminosa I dell'onda piana polarizzata circolarmente: in un punto $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ dello spazio essa è data da

$$I_{x=x_0} \equiv \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{E}(z_0,t) \cdot \vec{E}(z_0,t) =$$

che diventa, esplicitando il prodotto scalare:

$$I_{x=x_0} \equiv \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt[A_y^2 \cos^2(kx_0 - \omega t - \delta) + A_z \cos^2(kx_0 - \omega t + \delta + \Delta\varphi)].$$

Integrali di questo tipo sono già stati affrontati nello studio delle correnti alternate. È quindi noto che

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt[A_y^2 \cos^2(kx_0 - \omega t - \delta)] = \frac{A_y^2}{2}$$

dunque l'intensità dell'onda non dipende nè dalla fase, nè dal punto in cui è calcolata ma solo dall'ampiezza dell'oscillazione. Quindi:

$$I_{x=x_0} = I = \frac{A_y^2}{2} + \frac{A_z^2}{2}.$$

Per l'onda piana polarizzata circolarmente $A_y = A_z = A$ quindi

$$I = A^2.$$

Immaginiamo che l'onda attraversi un polarizzatore disposto ortogonalmente alla direzione di propagazione dell'onda con asse di trasmissione facile nella direzione di un versore $\hat{n}$. Quando l'onda passa attraverso tale polarizzatore le sole componenti dell'onda nella direzione di $\hat{n}$ sopravvivono (le componenti ortogonali vengono "uccise"). Il campo elettrico $\vec{E}_f$ oltre il polarizzatore avrà le sole componenti dell'onda piana iniziale che stanno lungo $\hat{n}$ ovvero

$$\vec{E}_f = (\vec{E} \cdot \hat{n})\hat{n} = [A\cos(\alpha)\hat{\jmath} \cdot \hat{n} + A\cos(\alpha + \frac{\pi}{2} + m\pi)\hat{k} \cdot \hat{n}]\hat{n}$$

in cui, se il prodotto scalare $\hat{\jmath} \cdot \hat{n} = \cos\theta$ (ovvero θ è l'angolo compreso fra $\hat{n}$ ed $\hat{\jmath}$) allora $\hat{n} \cdot \hat{k} = \pm\sin\theta$ e $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2} + m\pi) = \pm\sin(\alpha)$. L'intensità luminosa dell'onda uscente è:

$$\begin{aligned} I_f = \langle \vec{E}_f \cdot \vec{E}_f \rangle = \langle [A\cos(\alpha)\cos\theta \pm A\sin(\alpha)\sin\theta]^2 \rangle = \\ = A^2(\langle \cos^2\alpha \cos^2\theta \rangle + \langle \sin^2\alpha \sin^2\theta \rangle \pm 2\langle \cos\alpha \sin\alpha \cos\theta \sin\theta \rangle) = \\ = A^2(\cos^2\theta \frac{1}{2} + \sin^2\theta \frac{1}{2} + 0) = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

ovvero l'intensità luminosa uscente è uguale alla metà di quella entrante. Si noti che l'intensità luminosa uscente non dipende dalla direzione di $\hat{n}$ purchè, ovviamente, il pino di polarizzazione sia perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda. Questo risultato è generale ossia vale per le onde piane polarizzate circolarmente che si propagano in tutte le direzioni.

Esercizio 4

Un'onda piana è ottenuta tramite la sovrapposizione coerente di due onde monocromatiche che si propagano lungo l'asse x. Il campo elettrico della prima onda elettromagnetica varia come $\vec{E}_1(x,t) = (0, 0, E_1 \cos(kx - \omega t))$ mentre il campo magnetico della seconda varia come $\vec{B}_2(x,t) = (0, 0, B_2 \sin(kx - \omega t))$. Calcolare lo stato di polarizzazione dell'onda risultante.

Soluzione

Per calcolare la polarizzazione dell'onda è necessario calcolare il contributo al campo elettrico totale derivante dall'onda con campo magnetico $\vec{B}_2$. Dall'equazione di Ampere-Maxwell nel vuoto deve valere:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_2(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t}$$

da cui

$$\vec{E}_2 = c^2 \int dt [\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_2(x,t)] = c^2 \int dt [-\partial_x E_z \, \hat{\jmath}] =$$

$$= c^2 B_2 \hat{\jmath} \int dt [-k \cos(kx - \omega t)] = c B_2 \sin(kx - \omega t) \hat{\jmath}.$$

Quindi il campo elettrico totale derivante dalla sovrapposizione delle due onde piane è

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_1 \cos(kx - \omega t) \hat{k} + c B_2 \sin(kx - \omega t) \hat{\jmath}$$

ed essendo $\sin(kx - \omega t) = \cos(kx - \omega t - \pi/2)$ allora risulta che le due componenti del campo elettrico perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda sono sfasate di $\pi/2$ quindi se le loro ampiezze sono uguali (ovvero $cB_2 = E_1$) l'onda totale è polarizzata circolarmente, altrimenti è polarizzata in modo ellittico.

Esercizio 5

Un'onda piana monocromatica (lunghezza d'onda nel vuoto λ_0) che si propaga lungo l'asse x è polarizzata circolarmente. Ad un certo istante essa attraversa una lamina di ritardo disposta ortogonalmente alla sua direzione di propagazione (asse veloce parallelo all'asse y) larga $\Delta x = 3 \cdot \lambda_0$. Sapendo che la differenza fra l'indice di rifrazione dell'asse lento e l'indice di rifrazione di quello veloce è $\Delta n = 1/12$ indicare lo stato di polarizzazione dell'onda uscente dalla lamina ed il campo elettrico $\vec{E}(t)$ uscente.

Soluzione

La presenza della lamina di ritardo induce un ulteriore sfasamento fra le componenti perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda entrante. Lo sfasamento iniziale dell'onda (prima dell'ingresso nella lamina di ritardo) fra le componenti E_y ed E_z è $\pi/2 + m\pi$ visto che l'onda è polarizzata circolarmente. Lo sfasamento aggiuntivo (in valore assoluto) dovuto alla lamina è (vedere appunti del Prof. Galli)

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta n \, \Delta x = \frac{2\pi \cdot 3\lambda_0}{12\lambda_0} = \frac{\pi}{2};$$

lo sfasamento totale risultante quindi vale $\delta_f = m'\pi$ ovvero l'onda uscente dalla lamina è polarizzata linearmente.

Esercizi avanzati e d'esame

Esercizio 1

Un'onda piana polarizzata circolarmente $\vec{E}_i(z,t) = E_{0,i}\cos(\omega t - kz)\hat{\imath} + E_{0,i}\sin(\omega t - kz)\hat{\jmath}$ si propaga lungo l'asse $\hat{z}$ di un sistema di riferimento cartesiano opportunamente scelto. L'onda attraversa due polarizzatori il cui asse di polarizzazione è disposto rispettivamente lungo l'asse x (il primo), lungo una direzione $\hat{n}$ che forma un angolo pari a $\theta = \xi \cdot 10^{-3}\frac{\pi}{2}$ con l'asse x (il secondo). Calcolare il rapporto fra l'ampiezza di oscillazione del campo elettrico uscente $E_{0,f}$ ed il modulo iniziale $E_{0,i}$ ($R_A \equiv E_{0,f}/E_{0,i}$), calcolare inoltre il rapporto fra l'intensità luminosa in uscita e quella in entrata nei due polarizzatori ($R_I \equiv I_f/I_i$). (*Totale 19/09/2003*)

Soluzione

Passando attraverso il primo polarizzatore, la sola componente del campo elettrico che sopravvive è quella nella direzione dell'asse di trasmissione facile (ovvero, per ipotesi, la componente lungo l'asse x). Quindi, l'onda uscente sarà:

$$\vec{E}_1 = E_{0,i}\cos(\omega t - kz)\,\hat{\imath};$$

questa onda uscente attraversa il secondo polarizzatore con asse di trasmissione lungo una direzione $\hat{n}$ con $\hat{n}\cdot\hat{\imath} = \cos\theta$, quindi il campo elettrico da esso uscente sarà dato dalla sola componente di $\vec{E}_1$ lungo $\hat{n}$:

$$\vec{E}_2 = (\vec{E}_1 \cdot \hat{n})\hat{n} = E_{0,i}\cos(\omega t - kz)\cos\theta\,\hat{n}.$$

Questa espressione per $\vec{E}_2$ essendo $\cos\theta$ un numero costante (e noto!) rappresenta un'onda piana polarizzata linearmente lungo $\hat{n}$ con un'ampiezza pari a $E_{0,f} = E_{0,i}\cos\theta$. Perciò il rapporto R_A vale

$$R_A = \cos\theta.$$

Ragioniamo ora con le intensità luminose: sia $I_i = E_{0,i}^2$ l'intensità luminosa dell'onda entrante. Abbiamo già spiegato che un'onda polarizzata circolarmente perde il cinquanta per cento della sua intensità luminosa iniziale quando attraversa un polarizzatore. Quindi l'intensità luminosa dell'onda che esce dal primo polarizzatore vale

$$I_1 = \frac{I_i}{2}.$$

L'intensità luminosa dell'onda uscente dal secondo polarizzatore $I_2 \equiv I_f$, invece, si può calcolare semplicemente applicando la *legge di Malus* (vedere appunti Prof. Galli):

$$I_f = I_1\cos^2\theta = \frac{I_i}{2}\cos^2\theta$$

quindi

$$R_I = \frac{\cos^2\theta}{2}$$

Esercizio 2

In un esperimento di Young per verificare l'origine non corpuscolare della luce, un'onda piana con lunghezza d'onda pari a $\lambda = \xi \cdot 10^{-8}\, m$ viene fatta incidere, al solito, su uno schermo su cui sono praticate due fenditure distanti d. La luce che le attraversa raggiunge poi un secondo schermo parallelo al primo e distante da esso $D = 4\, m$. Sapendo che la figura di interferenza che si osserva sul secondo schermo è tale che la distanza fra i massimi e i minimi ad essi adiacenti misura (per piccoli angoli di incidenza) $\Delta y = 10^{-3}\, m$ calcolare quanto vale d. (*Totale 12/01/2004*)

Soluzione

La distanza dal centro della figura di interferenza (vedere dispense Prof. Galli) dell'n-esimo massimo di luminosità vale

$$y_M = \frac{nD\lambda}{d}$$

mentre la distanza dal centro dell'n-esimo minimo è

$$y_m = (n + \frac{1}{2})\frac{D\lambda}{d}.$$

Quindi la distanza fra un minimo ed il massimo adiacente vale

$$\Delta y = \frac{D\lambda}{2d}$$

e perciò

$$d = \frac{D\lambda}{2\,\Delta y} = 2\xi \cdot 10^{-5}\, m$$

Esercizio 3

Un'onda monocromatica piana si propaga lungo lungo l'asse z di un sistema di riferimento cartesiano opportunamente scelto. Il campo elettrico inizialmente varia come $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz) \cdot (\hat{\imath} + \hat{\jmath})$. L'onda va ad incidere, in modo perpendicolare, nell'ordine: una lamina a quarto d'onda con asse veloce lungo x, un polarizzatore lineare con asse di trasmissione lungo y ed un secondo polarizzatore il cui asse di trasmissione forma, con l'asse del precedente, un angolo pari a $\theta = \frac{\pi}{2} \cdot (\xi \cdot 10^{-3})$. Calcolare il rapporto fra l'intensitá luminosa iniziale e quella dell'onda uscente $R = \frac{I_i}{I_f}$ dal secondo polarizzatore.

Soluzione

Il campo elettrico iniziale $\vec{E}_i$ rappresenta un'onda piana polarizzata linearmente (le due componenti sono in fase) nella direzione della bisettrice del I e III quadrante del piano xy. È noto (vedere appunti del Prof. Galli) che un'onda polarizzata in questo modo che attraversi una lamina a quarto d'onda con assi veloce e lento lungo gli assi x ed y (indipendentemente dall'ordine) ne deve uscire polarizzata circolarmente. Immaginando che il ritardo si sia accumulato nella componente lungo $\hat{\imath}$ (è indipendente rispetto a quello che vogliamo calcolare) allora il campo elettrico uscente dalla lamina sarà

$$\vec{E}_L = E_0 \cos(\omega t - kz + \delta + \frac{\pi}{2})\hat{\imath} + E_0 \cos(\omega t - kz + \delta)\hat{\jmath} =$$

$$= -E_0 \sin(\omega t - kz + \delta)\hat{\imath} + E_0 \cos(\omega t - kz + \delta)\hat{\jmath}.$$

Quindi la sua intensità luminosa sarà

$$I_L = \langle \vec{E}_L \cdot \vec{E}_L \rangle = E_0^2(\langle \sin^2(\omega t - kz + \delta)\rangle + \langle \cos^2(\omega t - kz + \delta)\rangle) = E_0^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = E_0^2$$

mentre l'intensità luminosa iniziale è

$$I_i = \langle \vec{E}_i \cdot \vec{E}_i \rangle = E_0^2(\langle \cos^2(\omega t - kz)\rangle + \langle \cos^2(\omega t - kz)\rangle) = E_0^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = E_0^2$$

il che vuole dire che le intensità luminose sono le stesse: $I_i = I_L$! A questo punto l'onda uscente dalla lamina (ora polarizzata circolarmente) attraversa la un polarizzatore da cu emergerà un'onda polarizzata linearmente con intensità luminosa dimezzata:

$$I_2 = \frac{I_L}{2};$$

infine quest'onda attraversa un secondo polarizzatore e da cui esce un'onda con intensità luminosa data dalla legge di Malus

$$I_f = I_2 \cos^\theta = \frac{I_L}{2} \cos^2\theta$$

perciò:

$$R = \frac{2}{\cos^2\theta}.$$