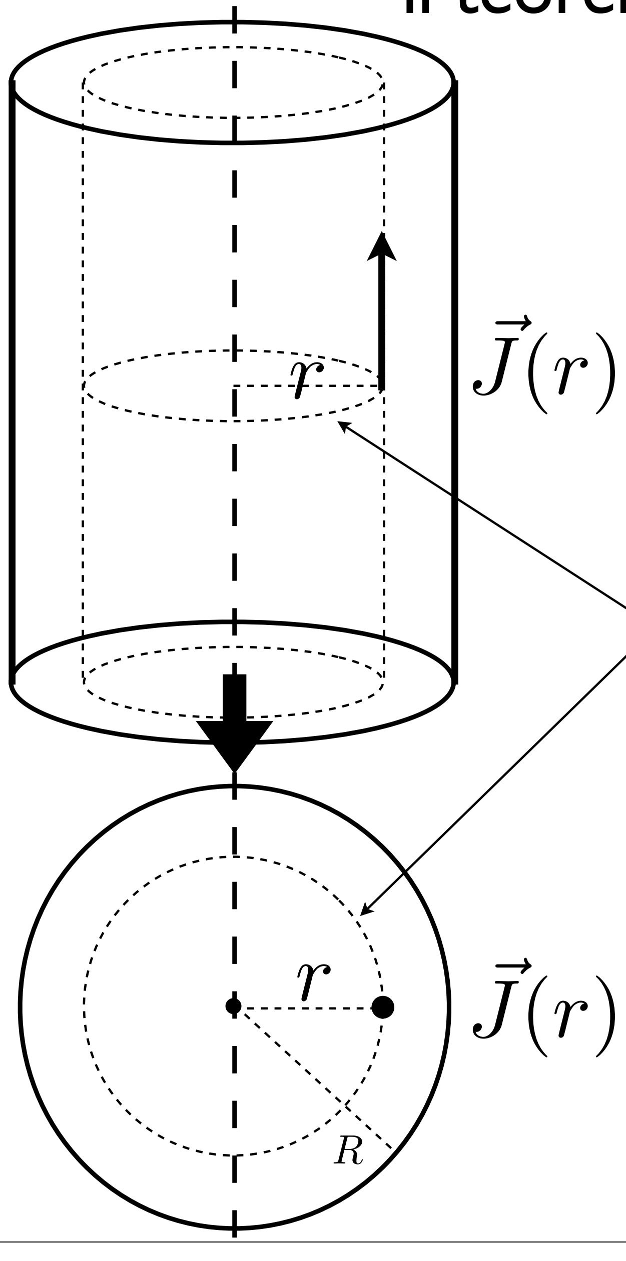
Calcolo di campi magnetici tramite il teorema della circuitazione



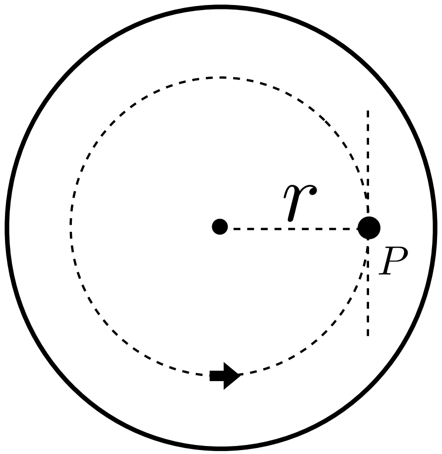
Sia dato un conduttore infinito percorso da corrente;
tale corrente è descritta da una densità di corrente: $\vec{J}(r)$

La densità di corrente sia distribuita nel conduttore in modo simmetrico rispetto all'asse del conduttore stesso: questo significa che il vettore densità di corrente all'interno del conduttore può variare solo al variare della distanza r dall'asse di simmetria.

Il vettore densità di corrente è lo stesso in tutti i punti della superficie laterale del cilindro tratteggiato della figura.
In particolare quindi sarà costante in tutti i punti della circonferenza tratteggiata che si ottiene sezionando tale cilindro con un piano perpendicolare all'asse di simmetria del conduttore.

In questi casi, la simmetria cilindrica della corrente permette di utilizzare il teorema della circuitazione allo scopo di calcolare il modulo e il verso del campo magnetico generato dalla corrente nello spazio (sia internamente che esternamente al conduttore):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i_c$$



Il teorema della circuitazione fornisce un'utile relazione fra la circuitazione del campo magnetico (lato destro) e la somma delle correnti concatenate al percorso lungo il quale tale circuitazione viene calcolata.

Si consideri la circonferenza tratteggiata della figura. Tale circonferenza è simmetrica rispetto all'asse di simmetria delle correnti. Il campo magnetico in tutti i punti di questa circonferenza ha solo una componente tangenziale (vedi appunti del Prof. Galli) quindi, ad esempio, nel punto P evidenziato della circonferenza deve stare sulla retta tratteggiata della figura. Il modulo del vettore campo magnetico sarà inoltre lo stesso in tutti i punti della circonferenza.

Si calcoli ora la circuitazione lungo la circonferenza: per farlo bisogna anzitutto scegliere un verso di percorrenza. Scegliamo quello antiorario (freccia in figura). Il vettore $d\vec{l}$ rappresenta uno spostamento infinitesimo sulla circonferenza quindi è ad essa tangente ed è, punto per punto, equiverso al verso di percorrenza scelto

Per quello che concerne $\vec{B}$ esso ha modulo costante su ogni punto della circonferenza e verso da calcolare. Due sono le possibilità in tale senso: il campo magnetico può essere equiverso a $d\vec{l}$ oppure può avere verso opposto.

Il prodotto scalare $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ sarà quindi positivo o negativo a seconda dei versi relativi dei due vettori e formalmente lo scriveremo come $B\,dl$ in cui $dl = |d\vec{l}| > 0$ mentre $B = \pm|\vec{B}|$.

Il segno di B sarà incluso nel risultato del teorema della circuitazione. Un segno positivo indicherà che $\vec{B}$ e $d\vec{l}$ sono equiversi (si noti che il verso di $d\vec{l}$ lo abbiamo scelto noi ed è rappresentato in figura) mentre il segno negativo indicherà che hanno versi opposti.

Siccome B è costante su tutta la circonferenza:

questo integrale rende la lunghezza della circonferenza

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B\, dl = B \oint dl = B\, 2\pi r$$

Il lato destro del teorema della circuitazione è $\mu_0 \sum i_c$

La somma delle correnti concatenate è uguale, per definizione nei casi che ci interessano, al flusso del vettore densità di corrente attraverso una qualsiasi superficie che ha il contorno scelto (la circonferenza tratteggiata in questo caso) come bordo. Scegliamo, quindi per semplicità, di calcolare il flusso attraverso la superficie piana (il cerchio) che ha come bordo la circonferenza stessa:

$$\sum i_c = \int_{S_r} \vec{J} \cdot \hat{n}\, dS \quad S_r : \text{cerchio di raggio r}$$

Nel calcolo dell'integrale gioca un ruolo essenziale $\hat{n}$ che è il versore normale al cerchio. Il suo verso NON è casuale ma è legato al modo con cui inizialmente si è deciso di percorrere il suo bordo. Verso di percorrenza della circonferenza e vettore normale al cerchio di cui la circonferenza è il bordo sono legati dalla regola della mano destra:

Segue che le correnti concatenate nella somma sono da intendersi positive se equiverse al versore normale alla superficie e negative se di verso opposto.

Sulla superficie attraverso cui calcolo il flusso $\vec{J}$ ed $\hat{n}$ sono paralleli. Il loro prodotto scalare è positivo solo se sono anche equiversi. Per come è dato $\vec{J}$ e per come è stato scelto il verso di percorrenza della circonferenza, nel nostro caso sono equiversi quindi:

$$\vec{J} \cdot \hat{n} = J$$

Inoltre visto che la quantità da integrare sulla superficie scelta dipende solo dalla distanza dal centro del cerchio (considerazione che vale sempre in problemi con la simmetria in ipotesi):

$$dS = 2\pi r \, dr$$

Dunque a lato destro rimane il calcolo di un integrale:

$$\mu_0 \sum i_c = \mu_0 \int_0^r 2\pi r' J(r') dr' = \mu_0 I(r), \quad I(r) = \int_0^r 2\pi r' J(r') dr'$$

Globalmente la relazione fornita dal teorema della circuitazione si legge:

$$2\pi r B = \mu_0 I(r)$$

che esplicitata rende il valore di B a distanza r dall'asse:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I(r)}{r}$$

Si noti anzitutto che se la circonferenza lungo la quale si calcola la circuitazione è esterna al conduttore allora $I(r)$ rappresenta semplicemente la corrente che globalmente in esso circola; il suo valore è indipendente dal raggio della circonferenza ma dipende dal raggio della sezione del conduttore:

$$I(r) = I(R), \quad r > R$$

Si noti inoltre che l'espressione è positiva il che indica che il campo magnetico è equiverso a $d\vec{l}$.