Esercizi di Fisica LB: Induzione Elettromagnetica

Esercitazioni di Fisica LB per ingegneri - A.A. 2003-2004

Esercizio 1

Una sbarra conduttrice di lunghezza l è fissata ad un estremo ed è fatta ruotare con velocità angolare costante ω in senso ortogonale ad un campo magnetico costante $\vec{B}$. Calcolare la differenza di potenziale indotta agli estremi della sbarra.

Soluzione

Gli elettroni (che sono gli unici portatori di carica che si possono spostare) sulla sbarra hanno, in generale una velocita' composta da una componente $\vec{v}_t$ dovuta al trascinamento della sbarra stessa ed una componente $\vec{v}_r$ diretta longitudinalmente alla sbarra:

$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}_r.$$

A causa della presenza di un campo magnetico ortogonale al piano su cui ruota la sbarra (e quindi ortogonale pure a $\vec{v}$) gli elettroni sentono una forza di Lorentz

$$\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

che è ortogonale ai $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Essa si può decomporre in due componenti: una diretta in senso longitudinale alla sbarra $\vec{F}_r$ ed una ad essa ortogonale $\vec{F}_t$. Quest'ultima componente (quella ortogonale) ha un'effetto nullo perchè annullato dalla reazione vincolare della sbarra che non permette agli elettroni di spostarsi se non in senso longitudinale. Quindi l'unica forza che sentono gli elettroni è data da:

$$\vec{F}_r = -e\vec{v}_t \wedge \vec{B}$$

espressa in funzione del fatto che la forza di Lorentz longitudinale è dovuta al moto delle cariche $\vec{v}_r$. Ma $\vec{v}_r$ dipende unicamente dalla rotazione della sbarra: un elettrone a distanza r dal centro di rotazione della sbarra ha una velocità $\vec{v}_t$ che, in modulo, vale

$$|\vec{v}_t| = \omega r.$$

La forza di Lorentz in senso longitudinale, quindi, è diretta verso il centro della sbarra (regola della mano destra) e in modulo vale

$$F_r = e\omega r B$$

ovvero aumenta con la distanza dal centro di rotazione. L'effetto di questa forza è accumulare gli elettroni vicino al centro di rotazione. Questa accumulo genera una differenza di potenziale fra gli estremi della sbarra che vale (in modulo):

$$\Delta V = \int_0^l \frac{F_r\, dr}{e} = \frac{1}{2}\omega l^2 B.$$

Per definizione $\omega = d\theta/dt$ ma

$$\frac{1}{2} l^2 d\theta = dA$$

è l'area spazzata dalla sbarra nel periodo di tempo dt; inoltre $BdA = d\Phi(\vec{B})$ ovvero è il flusso del campo magnetico attraverso l'area infinitesima spazzata. Quindi:

$$|\Delta V| = \left| \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \right|$$

ovvero la differenza di potenziale fra gli estremi della sbarra è uguale alla derivata rispetto al tempo del flusso del campo magnetico tagliato dalla sbarra in movimento.

Esercizio 2

Una spira quadrata di lato L è complanare ad un filo rettilineo di lunghezza infinita percorso da una corrente che varia con il tempo $i(t) = k \cdot t^2$. Sia d la distanza fra il filo ed il lato più vicino della spira (parallelo al filo). Calcolare l'intensità della corrente indotta sulla spira essendo R la sua resistenza totale (trascurare tutti gli effetti di autoinduzione).

Soluzione

Se si trascurano tutti gli effetti di autoinduzione, allora la corrente che può essere indotta sulla spira è solamente dovuta ai campi magnetici generati nello spazio da tutte le possibili sorgenti tranne la spira. In questo caso il campo magnetici nello spazio, è conseguenza della corrente che circola sul cavo infinito. Essa produce un campo magnetico descritto da linee di forza circolari centrate nel cavo. Il modulo del campo magnetico a distanza r dal cavo vale

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}.$$

Essendo la spira complanare al filo, il campo magnetico generato da quest'ultimo è perpendicolare ad essa. Il flusso di B attraverso la spira vale

$$\Phi(\vec{B}) = \int_S BdS = \int_0^L dy \int_d^{L+d} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{x} dx$$

in cui abbiamo espresso l'integrazione nel SR cartesiano con l'asse y coincidente con il cavo e l'asse x ad esso perpendicolare. Quindi il flusso vale:

$$\Phi(\vec{B}) = \frac{\mu_0 Li}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d}$$

che è un'espressione dipendente dal tempo visto che la corrente che circola nel filo è variabile nel tempo. Se il flusso dipende dal tempo, per la legge di Farday-Lenz, sulla spira è indotta una forza elettromotrice (in modulo)

$$f = \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{\mu_0 L}{\pi} kt \ln \frac{d+L}{d}$$

e quindi una corrente

$$i = \frac{f}{R}.$$

Esercizio 3

È dato un circuito composto da un'induttanza L ed un condensatore C. Inizialmente il circuito è aperto ed sul condensatore è accumulata una carica Q. Calcolare quanto tempo è necessario (una volta chiuso il circuito) affinchè il condensatore perda completamente la carica sulle armature. Come si distribuisce con il tempo l'energia del circuito?

Soluzione

La legge di Ohm, per un circuito di questo tipo (in cui la resistenza totale è nulla $R = 0$) si scrive

$$\Delta V = Ri \Rightarrow \Delta V_c(t) + f_i(t) = 0$$

essendo $\Delta V(t) = Q(t)/C$ la differenza di potenziale ad un certo istante agli estremi del condensatore e $f_i(t)$ la forza elettromotrice simultaneamente autoindotta dall'induttanza. Tale forza elettromotrice si oppone al passaggio di corrente e vale

$$f_i(t) = -L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}$$

se espressa in funzione della variazione della carica sulle armature del condensatore. Quindi la legge di Ohm si scrive:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} = -\omega^2 Q.$$

La carica sulle armature varia secondo l'equazione differenziale che in FIsica LA è servita per analizzare il moto armonico. La sua soluzione è ben nota. Se a $t = 0$ $Q(0) = Q$, $i(0) = -dQ/dt\,(0) = 0$ allora la sua soluzione vale:

$$Q(t) = Q\cos\omega t$$

ovvero il condensatore si scarica completamente, poi si carica in modo opposto e poi si riscarica per tornare alla condizione iniziale. Questo avviene all'infinito, ovvero le cariche continuano a spostarsi nel circuito perchè il circuito è ideale avendo una resistenza nulla (non realizzabile nella realtà visto che tutti gli elementi di un circuito hanno una resistenza piccola). La carica sulle armature è nulla quando il coseno si annulla ovvero

$$\omega t = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

quindi il primo istante in cui ciò si verifica è

$$t_0 = \frac{\pi}{2\omega}.$$

Il fatto che il fenomeno ideale descritto dall'ipotesi sia di tipo periodico (e quindi di durata infinita) è sinonimo del fatto che l'energia del sistema non viene dissipata e si conserva. Tale energia inizialmente è accumulata sotto forma di una campo elettrico all'interno del condensatore carico. Quando la corrente incomincia a circolare il campo elettrico nel condensatore diminuisce ma compare un campo magnetico nell'induttanza. La somma delle energie di campo elettrico e magnetico in qualsiasi istante è costante (verificarlo!). All'istante t_0 il campo elettrico nel condensatore è nullo, e quindi tutta l'energia è in forma di campo magnetico. Vediamo in dettaglio. Quando $Q(t_0) = 0$ nel circuito circola una corrente $i(t_0) = -dQ/dt(t_0)$ uguale a

$$i(t_0) = \omega Q\sin\omega t_0 = \omega Q$$

e nell'induttanza è presente un campo magnetico e quindi è accumulata un'energia pari a

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2}Li^2.$$

Esprimendo le grandezze nel nostro caso specifico a $t = t_0$:

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{Q^2}{2LC}L = \frac{Q^2}{2C}$$

che è proprio l'energia che era inizialmente (all'istante t=0 s) presente all'interno del condensatore causa la presenza di carica sulle sue armature e quindi di un campo elettrico fra le stesse.

Esercizi avanzati e d'esame

Esercizio 2

Si consideri un circuito RL composto da una resistenza $R = 10\,\Omega$, un'induttanza $L = 2 \cdot 10^{-2} H$ e un generatore $f = 12\,V$ in serie. Calcolare il lavoro che deve compiere il generatore (una volta chiuso il circuito) per portare la corrente a un valore pari a $i_0 = \alpha f/R$, con $\alpha = 1/2$. (*Parziale 27 maggio 2003*)

Soluzione

Il lavoro che il generatore di corrente deve fare per portare la corrente ad un'intensità pari a i_0 può pensarsi suddiviso in due contributi: una parte serve a vincere la forza elettromotrice autoindotta dell'induttanza che si oppone alla variazione di corrente, una parte viene, invece, dissipata per effetto Joule dalla resistenza. Per calcolare in quale modo la corrente vari nel tempo in un circuito di questo tipo si scrive, al solito la legge di Ohm:

$$f - L\frac{di}{dt} = Ri$$

che in questo casa è un'equazione differenziale del primo ordine per la funzione $i(t)$ e si risolve per separazione delle variabili:

$$\int_0^{i(t)} \frac{L}{f - Ri} di = \int_0^t dt \Rightarrow i(t) = \frac{f}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right).$$

La corrente dunque, a causa della forza elettromotrice autoindotta, tende asintoticamente al valore f/R. All'istante

$$t_0 = \frac{L}{R}\ln(2)$$

essa vale $i_0 = f/2R$.
Come accennato all'inizio, il lavoro del generatore si può essere scomposto in due contributi: la parte che viene dissipata per effetto Joule dalla resistenza nel periodo da $t = 0\,s$ a $t = t_0$ ed una parte che serve per vincere l'effetto dell'induttanza e che, una volta che la corrente vale i_0 è accumulato nell'induttanza stessa sotto forma di campo magnetico. Quest'ultimo contributo è presto calcolato:

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{f^2L}{8R^2}.$$

L'energia dissipata per effetto Joule, invece è data da:

$$\mathcal{E}_J = \int_0^{t_0} d\mathcal{E}_J$$

essendo $d\mathcal{E}_J$ l'energia dissipata nell'interavallo infinitesimo dt. Essendo la potenza dissipata per effetto Joule:

$$P_J(t) = Ri^2(t) \equiv \frac{d\mathcal{E}_J}{dt} \Rightarrow d\mathcal{E}_J = Ri^2(t)\,dt$$

in cui $i(t)$ è nota. Dunque

$$\mathcal{E}_J = \int_0^{t_0} d\mathcal{E}_J = \int_0^{t_0} Ri^2(t)\,dt = \int_0^{t_0} \frac{f}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right) R\,dt = \frac{f^2L}{R^2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right).$$

La somma dei due contributi dà il lavoro fatto dal generatore:

$$L = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_J = \frac{f^2L}{R^2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$

Lo stesso risultato si poteva ugualmente ottenere realizzando che il lavoro che deve fare un generatore per fare circolare una carica dq nel circuito (spostandola dal polo carico negativamente a quello carico positivamente se dq è positivo, viceversa se è negativo) è

$$dL = dqf.$$

Nel caso in questione $dq/dt = i(t) \rightarrow dq = i(t)dt$ quindi:

$$L = \int_0^{t_0} dL = \int_0^{t_0} fi(t)dt = \int_0^{t_0} f\frac{f}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right) dt = \frac{f^2L}{R^2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$