Esercizi di Calcolo Vettoriale

Esercitazioni di Fisica LA per ingegneri - A.A. 2007-2008
indirizzo e-mail: alessandro.tronconi@bo.infn.it
indirizzo internet per la didattica: https://ishtar.df.unibo.it/

Esercizio 1

La proiezioni dei vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ lungo la direzione del vettore $\vec{v}_3$ misurano rispettivamente $2\,m$ e $3\,m$ e il prodotto scalare della somma di $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ con $\vec{v}_3$ vale $30\,m^2$. Calcolare $|\vec{v}_3|$.

(*Ris:* $|\vec{v}_3| = 6\,m$ *se* $-\pi/2 < \theta_{13} < \pi/2$ *e* $-\pi/2 < \theta_{23} < \pi/2$ *oppure* $|\vec{v}_3| = 30\,m$ *se* $\pi/2 < \theta_{13} < 3\pi/2$ *e* $-\pi/2 < \theta_{23} < \pi/2$)

Esercizio 2

Verificare che i vettori $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$ e $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$ sono ortogonali e sono versori; trovarne un terzo, $\vec{v}_3$, che sia versore perpendicolare ad entrambi. Infine, dato il vettore $\vec{w}_{12}$ di modulo 2, giacente sul piano cui appartengono pure $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, e formante angoli rispettivamente di $\pi/3$ e $\pi/6$ con $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, esprimerlo nella forma $\vec{w}_{12} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$ e in rappresentazione cartesiana.

(*Ris:* $\vec{v}_3 = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$; $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{3}/2$)

Esercizio 3

Dati i vettori $\vec{v}_1 = 3\hat{i}+2\hat{j}$, $\vec{v}_2 = -5\hat{k}$, $\vec{v}_3 = \hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, calcolare $p = (2\vec{v}_1)\wedge\left(\frac{1}{5}\vec{v}_2\right)\cdot\vec{v}_1 - (\vec{v}_1 + \vec{v}_3)\cdot\vec{v}_2$. Calcolare inoltre i tre angoli fra di essi compresi (espressi in radianti).

(*Ris:* $p = -15$, $\theta_{12} = \pi/2$, $\theta_{13} = 1.03$, $\theta_{23} = 0.64$)

Esercizio 4

Dati i vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ con $|\vec{v}_1| = 2$ e $|\vec{v}_2| = 3$, determinare $|\vec{v}_3|$ in modo che $\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3 = 0$ essendo $\theta_{12} = 60°$ l'angolo fra $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Calcolare inoltre l'angolo fra $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_3$ e quello fra $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$.

(*Ris:* $\sqrt{19}$, $143.41°$, $156.59°$)

Esercizio 5

Siano dati i due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ di modulo rispettivamente 5 e 3 e formanti un angolo di $\pi/3\, rad$. Determinare le caratteristiche necessarie ad un versore $\vec{v}_3$ in modo che sia complanare ai due vettori dati e che

- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = 0$
- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3 = \vec{0}$

(indicare gli angoli fra $\vec{v}_3$ ed i vettori dati)

(*Ris: caso 1* - $\theta_{13} = \pi/2 \pm 0.38$, $\theta_{23} = \pi/2 \mp 0.67$*; caso 2* - $\theta_{13} = 0.38$, $\theta_{23} = 0.67$ *oppure* $\theta_{13} = \pi - 0.38$, $\theta_{23} = \pi - 0.67$)

Esercizio 6

Determinare l'angolo θ_{ab} fra i il vettore $\vec{a} = \alpha(6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})$ e $\vec{b} = \vec{a} + \hat{\imath}$. Quanto vale il suddetto angolo nel limite $\alpha \to \infty$?

(*Ris:* $\theta_{ab} = 0$)

Esercizio 7

Siano dati due vettori uguali in modulo $\vec{a}$ e $\vec{b}$, determinare il modulo e l'angolo fra essi compreso sapendo che il loro prodotto vettoriale ha modulo 16 e la loro somma ha modulo 4.

(*Ris:* $a = b = 2\sqrt{5}$, $\theta = \arccos[-3/5]$)

Esercizio 8

Le componenti cartesiane di un vettore $\vec{v(t)}$ delle dimensioni di una lunghezza e variabile nel tempo sono $(c_1 t, c_2 t^2 - c_3 t^3, c_4)$ con $c_1 = 4\, m/s$, $c_2 = 5\, m/s^2$, $c_3 = -1\, m/s^3$ e $c_4 = -3\, m$. Determinare la derivata prima, $\vec{a(t)}$, e seconda, $\vec{b(t)}$, di $\vec{v(t)}$ rispetto al tempo. Calcolare quindi l'istante $t_0 \neq 0\, s$ in cui $\vec{a(t_0)}$ e $\vec{b(t_0)}$ sono simultaneamente non nulli ed ortogonali fra di loro.

(*Ris:* $t_0 = 10/3\, s$)

Esercizio 9

Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due vettori di modulo rispettivamente 3 e 5. Le rette direttrici dei due vettori formano un angolo di $\pi/4$. Calcolare il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(*Ris:* $15\sqrt{2}/2$)

Esercizio 10

Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due vettori di componenti cartesiane $(3, 7, 1)$ e $(-1, 6, 0)$. Calcolare il seno dell'angolo θ_{ab} compreso tra di loro.

(*Ris:* $\sin\theta_{ab} = 0.30$)

Esercizio 11

Determinare il valore del parametro α per cui i due vettori $\vec{a} = 30\hat{\imath} + 2\alpha\hat{\jmath} - \hat{k}$ e $\vec{b} = \hat{\imath} + 7\hat{\jmath} + \alpha\hat{k}$ sono ortogonali.

(*Ris:* $\alpha = -30/139$)