OFA FISICA 11/02/2011 ***Compito 1***

Cognome Nome Matricola	Fila: Fila Posto: Posto

---

1) Sono dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Il modulo del primo vettore sia $\|\vec{a}\| = 5$ e sia $\theta_{ab} = 2\pi/3$ l'angolo fra essi compreso. Determinare il modulo di $\vec{b}$, sapendo che il modulo di $\vec{s} = \vec{a} - \vec{b}$ è $\|\vec{s}\| = 8$.

Soluzione 1

Si calcoli formalmente il prodotto scalare $\vec{s}\cdot\vec{s} = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\frac{2\pi}{3} = \|\vec{s}\|^2$.

Sostituendo i valori noti per ipotesi di $\|\vec{a}\|$ e di $\|\vec{s}\|$ la precedente relazione diventa l'equazione risolvente per $\|\vec{b}\|$. Definendo $\|\vec{b}\| = x$ la relazione precedente diventa $x^2 + 5x - 39 = 0$ che, risolta, dà le seguenti soluzioni:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{181}}{2}.$$

Ma $\|\vec{b}\| = x$ è una quantità positiva perché definisce il modulo di un vettore quindi l'unica soluzione accettabile è $\|\vec{b}\| = \frac{-5 + \sqrt{181}}{2} \simeq 4.23$.

---

2) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = a\,t^2 + (2\,s)\,a\,t + 4m$. Determinare a essendo $v(2\,s) = 12\,m/s$.

Soluzione 2

Derivando la legge oraria rispetto al tempo di ottiene $v(t) = \frac{ds}{dt} = 2\,a\,t + (2s)\,a\,t$ che, valutata a $t = 2\,s$ diventa $12\,m/s = 6\,a\,s \Rightarrow a = 2\,m/s^2$.

3) Un'auto si muove di moto uniforme in un circuito circolare con una velocità istantanea pari a $v = 20\, m/s$. Sapendo che il modulo dell'accelerazione dell'auto è $\|\vec{a}\| = 2\, m/s^2$ determinare la lunghezza del circuito.

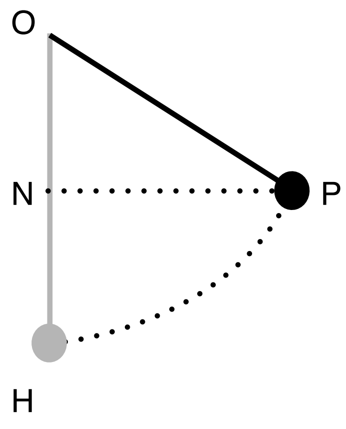
Soluzione 3

Se il moto è uniforme allora il modulo del vettore velocità è costante e l'accelerazione vettoriale dell'auto ha solo componente normale. Quindi $\|\vec{a}\| = \frac{v^2}{R}$ dove R è il raggio del circuito. Risolvendo per R si ottiene $R = \frac{v^2}{\|\vec{a}\|} = 200\, m$. Noto R si calcola facilmente la lunghezza del circuito che è di forma circolare e quindi $l = 2\pi R \simeq 1257 m$.

---

4) Un pendolo ideale di lunghezza $l = 1\, m$ e massa M è inizialmente tenuto fermo e forma con la verticale un angolo $\theta_0 = 60^\circ$. Ad un certo istante viene lasciato libero di muoversi. Determinare la velocità istantanea (in m/s) con cui il pendolo transita per la verticale al suolo.

Soluzione 4

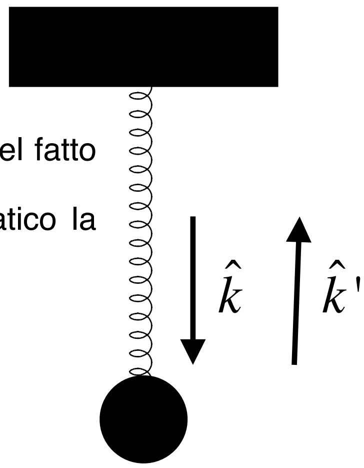


L'energia meccanica totale intesa come la somma dell'energia cinetica del punto e della energia potenziale della forza peso si conserva. Matematicamente $E = \frac{1}{2} m\, v_i^2 + m\, g\, h_i = \frac{1}{2} m\, v_f^2 + m\, g\, h_f$ dove i pedici "i" ed "f" indicano la configurazione iniziale e finale rispettivamente. Inizialmente il punto è fermo ($v_i = 0$) quindi: $\frac{1}{2} m\, v_f^2 = m\, g \left(h_i - h_f \right)$. Il dislivello $h_i - h_f = \overline{NH}$ si può esprimere come $\overline{NH} = \overline{OP} \cos \widehat{HOP} = l \cos \theta_0 = l/2$.

Quindi, risolvendo l'equazione di conservazione: $v_f = \sqrt{gl} \simeq 3.13\, m/s$.

5) Determinare la deformazione $\Delta l = l - l_0$ di una molla di costante elastica $k = 10\,N/m$ appesa al soffitto in una sua estremità e a un punto materiale di massa $M = 2\,Kg$ nell'estremità opposta. Si esprima tale deformazione in metri con il segno opportuno. (Disegnare la figura e fissare un opportuno versore con cui esprimere le grandezze vettoriali in gioco)

Soluzione 5



Se fissiamo come riferimento il versore $\hat{k}$ allora la forza peso agente sul punto si esprime come $\vec{P} = mg\hat{k}$ mentre la forza elastica si deve esprimere come $\vec{F}_k = -k\Delta l\,\hat{k}$ (espressione che tiene conto del fatto che $\vec{F}_k$ è verso l'alto quando $\Delta l > 0$). In condizioni di equilibrio statico la risultante delle due forze è nulla quindi :

$$\vec{F}_k + \vec{P} = 0 = mg\hat{k} - k\Delta l\,\hat{k} \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} \simeq 1.96\,m\ .$$

Se fissiamo come riferimento il versore $\hat{k}'$ allora la forza peso agente sul punto si esprime come $\vec{P} = -mg\hat{k}'$ mentre la forza elastica si deve esprimere come $\vec{F}_k = k\Delta l\,\hat{k}'$.
In condizioni di equilibrio statico la risultante delle due forze è nulla quindi :

$$\vec{F}_k + \vec{P} = 0 = -mg\hat{k}' + k\Delta l\,\hat{k}' \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} \simeq 1.96\,m\ .$$

Il risultato positivo indica che (ovviamente) la molla è allungata all'equilibrio.

<u>Costanti</u>: $g = 9.81\,m/s^2$, $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\,N\,m^2\,Kg^{-2}$, $M_T = 5.971 \cdot 10^{24}\,Kg$, $R_T = 6.37 \cdot 10^6\,m$, $M_L = 7.35 \cdot 10^{22}\,Kg$, $R_L = 1738\,Km$.