Esercizi di Statica - Moti Relativi

Esercitazioni di Fisica LA per ingegneri - A.A. 2004-2005

Esercizio 1

Un punto materiale di massa $m = 0.1\,kg$ (vedi sotto a sinistra)é situato all'estremitá di una sbarretta indeformabile, di peso trascurabile e lunghezza $r = 0.1\,m$. L'estremitá opposta della sbarra é incernierata in O ad una parete verticale in modo tale che la sbarra stessa si possa muovere solo in senso verticale. A $h = 0.2\,m$ da O, verticalmente sopra al punto, é fissato l'estremo di una molla ($k = 50\,N/m$) di lunghezza a riposo pari a $l = 0.12\,m$. La molla é fissata al punto materiale nel suo estremo opposto.

1) Determinare, all'equilibrio statico, l'allungamento della molla;

2) L'intensitá della reazione vincolare della sbarra.

Soluzione

All'equilibrio la risultante $\vec{R}$ delle forze che agiscono sul punto materiale deve essere nulla. Le forze in gioco sono:

- la forza peso diretta verso terra $\vec{P}$
- la forza elastica esercitata dalla molla $\vec{F}_r$
- la reazione vincolare della sbarra $\vec{F}_k$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_r + \vec{F}_k = 0$$

Proiettiamo la relazione sopra su un'opportuna base di versori ortonormali. Per comodità si scelga $\hat{n}$ nella direzione della sbarra, $\hat{t}$ in senso ortogonale diretto, ad esempio verso terra. Sia θ l'angolo compreso fra la sbarra e il vettore $\vec{P}$, mentre α è l'angolo fra la molla e la sbarra:

$$-mg\cos\theta + F_r - k\delta l\cos\alpha = 0 \tag{1}$$

$$mg\sin\theta - k\delta l\sin\alpha = 0 \tag{2}$$

Si noti che abbiamo 2 equazioni e quattro incognite. Bisogna aggiungere delle relazioni geometriche che mettono in relazione gli elementi del triangolo formato da sbarra, molla e parete:

$$\sin\alpha/h = \sin\theta/(l + \Delta l) \tag{3}$$

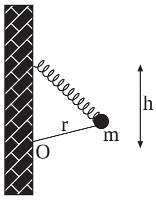
Risolvendo la coppia di equazioni (2) e (3) si ottiene la soluzione cercata:

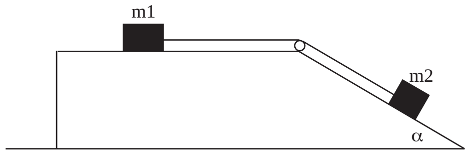
$$\Delta l = \frac{lmg}{kh - mg}$$

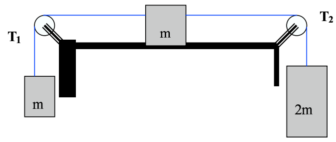
A questo punto sono noti tutti e tre i lati del triangolo considerato sopra quindi sono pure noti tutti i suoi angoli ed utilizzando l'equazione (1) si ricava

$$F_r = mg\cos\theta + k\delta l\cos\alpha$$

(R: $0.013\,m$, $(da\,calcolare\,)N$)



,


,


Esercizio 2

Date le masse $m_1 = 10\,kg$ e $m_2 = 5\,kg$ (vedi figura sopra al centro) unite da un cavo inestensibile, di massa trascurabile, sapendo che $\alpha = 30°$, determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico f della superficie orizzontale (si trascuri l'attrito per la superficie inclinata) affinché il sistema possa essere in equilibrio statico. Calcolare inoltre, in tali condizioni, la tensione del filo.(R: 0.25, $24.5\,N$)

Esercizio 3

Al soffitto di un vagone ferroviario (vedi sopra a destra) che si muove su una rotaia rettilinea con accelerazione $a_0 = 3\,m/s^2$ é sospesa una molla ($k = 20\,N/m$ e lunghezza a riposo l_0) che regge un punto materiale di massa $m = 0.2\,kg$. Calcolare l'angolo θ che la molla forma con la verticale al terreno e l'allungamento Δl della molla stessa. (R: $\theta = 17°$, $\Delta l = 0.1025\,m$)

Soluzione

La forza dovuta all'allungamento della molla $\vec{F}_k$ deve compensare la somma della forza peso $\vec{P}$ (diretta verso il basso) e della forza inerziale data dall'accelerazione del vagone $\vec{F}_a$. Quindi

$$\vec{F}_k = \vec{P} + \vec{F}_a$$

essendo

$$|\vec{F}_k| = k\Delta l, \quad |\vec{P}| = mg, \quad |\vec{F}_a| = ma_0.$$

Eguagliando i moduli della relazione scritta sopra si ottiene:

$$k\Delta l = m\sqrt{g^2 + a_0^2} \Rightarrow \Delta l = \frac{m}{k}\sqrt{g^2 + a_0^2}.$$

Proiettandola invece nella direzione, ad esempio, parallela al suolo:

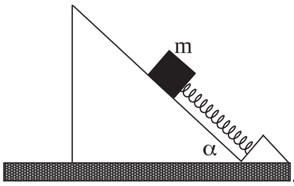
$$ma_0 = k\Delta l \sin\theta$$

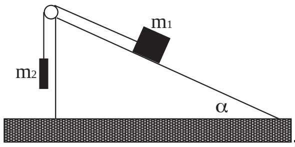
in cui θ è l'angolo che la molla forma con la verticale. È dunque facile ottenere

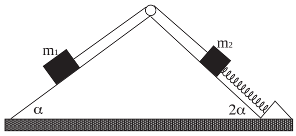
$$\theta = \arcsin\frac{a_0}{\sqrt{g^2 + a_0^2}}$$

Esercizio 4

Sul piano cartesiano xy sono dati una sbarretta omogenea di massa $m_1 = 2\,kg$, lunga $10\,cm$ e posizionata sul semiasse poisitivo delle ordinate con un estremo nell'origine e il punto $P_2 : (3, 2)\,cm$ di massa $m_2 = 1\,kg$. Calcolare la posizione del baricentro del sistema.(R:$\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$)



,


,


Esercizio 5

Un corpo puntiforme (vedi sopra a sinistra) si trova su di un piano, in assenza di attrito, inclinato di $\alpha = \pi/4\, rad$ rispetto a terra ed é appoggiato ad una molla ($k = 30\, N/m$) che agisce nella direzione di tale piano. Sapendo che la molla, per sorreggere il corpo, si accorcia di $\Delta l = 0.1\, m$ calcolare la massa m del corpo stesso. Calcolare inoltre f, coefficiente di attrito statico minimo di un piano reale inclinato di $\alpha = \pi/4\, rad$, necessario a sorreggere il punto materiale dato in assenza della molla.

Soluzione

Il corpo è soggetto alle seguenti forze: la forza peso $\vec{P}$, la forza elastica $\vec{F}_k$ e la reazione vincolare del piano inclinato $\vec{F}_r$. All'equilibrio la risultante $\vec{R}$ di queste forze deve essere nulla. Anche le sue componenti saranno nulle ed in particolare la sua proiezione lungo un versore parallelo al piano inclinato. In quella direzione dunque si ha:

$$mg \sin\alpha - k\Delta l = 0$$

dalla quale è possibile facilmente ricavare l'incognita m.
Se ora tolgo la molla e sostituisco il suo effetto con quello dell'attrito statico, allora il coefficiente di attrito statico f minimo affinchè il sistema sia in equilibrio è tale per cui:

$$mg \sin\alpha - fmg \cos\alpha = 0$$

dove $mg \cos\alpha$ è la componente della forza peso ortogonale al piano inclinato e quindi è uguale, in modulo alla reazione vincolare del piano stesso (che è noto essere proporzionale alla forza di attrito). Dall'equazione sopra è poi banale ricavare $f = \sin\alpha / \cos\alpha$.
(R: $m = 0.43\, kg$, $f = 1$)

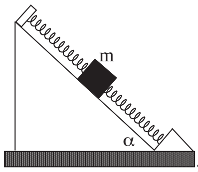
Esercizio 6

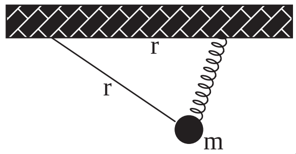
Due corpi di masse m_1 e m_2 (vedi sopra al centro) con $m_1 = \frac{m_2^2}{A}$, $A = 2\, kg$ e $m_2 < 2A$ sono uniti da un cavo inestensibile di massa trascurabile. Il corpo m_1 é appoggiato ad un piano inclinato di $\alpha = 30°$ rispetto a terra, m_2 é sospeso nel vuoto e spinge in senso contrario rispetto a m_1. Sapendo che il sistema, grazie all'attrito statico del piano inclinato, é in equilibrio statico ed immaginando che la forza di attrito in tali condizioni sia ben approssimata dalla nota espressione $|\vec{F}_a| = f|\vec{R}|$ con $f = 0.5$ calcolare le masse dei due corpi.

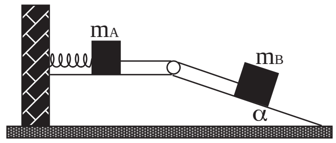
Esercizio 7

Due piani inclinati (vedi sopra a sinistra) si uniscono con continuitá nella loro parte piú alta. Sul piano 1, inclinato di $\alpha = 30°$ rispetto al terreno, é appoggiato un corpo di massa $m_1 = 2\, kg$, sul piano 2, inclinato invece di $2\alpha = 60°$, é appoggiato un corpo di massa $m_2 = 1\,kg$; i due corpi sono tenuti assieme da una corda inestensibile e di massa trascurabile che scivola senza attrito su una carrucola posta in cima ai piani. Il corpo m_2, inoltre, é tenuto da una molla ($k = 20\,N/m$) che agisce parallelamente al piano inclinato 2 ed é fissata a terra nel suo secondo estremo. Calcolare, all'equilibrio, l'allungamento della molla. Specificare chiaramente se la molla é allungata o é accorciata. Che valore dovrebbe avere la costante elastica k affinché l'allungamento della molla, in valore assoluto, sia di $|\Delta l| = 0.1\,m$? É possibile aggiustare opportunamente k affinché $\Delta l = 0\,m$? Motivare la risposta.

Esercizi d'esame



,


,


Esercizio 1

Un corpo di dimensioni trascurabili e massa $m = 2\,kg$ (vedi sopra a sinistra) é appoggiato ad un piano inclinato rispetto a terra di $\alpha = 30°$ e lungo $d = 2\,m$. Alle due estremitá di tale piano sono fissate due molle ciascuna di lunghezza a riposo pari a $l = 1\,m$. Le due molle sono pure fissate al corpo alla loro estremitá libera. Sia $k_1 = 20\,N/m$ la costante elastica della molla fissata a terra e sia $k_2 = 30\,N/m$ la costante elastica della molla fissata in cima al piano inclinato. Determinare, all'equilibrio, la distanza $h$del corpo da terra.

Soluzione

Sul punto materiale agiscono le seguenti forze:

- la forza peso $\vec{P}$;
- la forza elastica della molla 1 $\vec{F}_{k1}$;
- la forza elastica della molla 2 $\vec{F}_{k2}$;
- la reazione vincolare del piano inclinato $\vec{F}_r$.

All'equilibrio la loro risultante deve essere nulla: $\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_{k1} + \vec{F}_{k2} + \vec{F}_r = 0$. Siamo interessati alla componente della risultante nella direzione del piano inclinato R_t. Essa deve essere ovviamente nulla. In quella direzione i contributi sono dati da forza peso e dalle due molle che agiscono entrambe nello stesso verso ad ostacolare la discesa del punto materiale. Inoltre per costruzione l'allungamento di una molla deve coincidere con l'accorciamento dell'altra. Sia Δl l'allungamento della molla 1, esso corrisponde ad un accorciamento della molla 2 e viceversa. Vediamo 'equazione della statica:

$$0 = mg\sin\alpha - k_1\Delta l - k_2\Delta l$$

che risolta darà:

$$\Delta l = \frac{mg}{2(k_1 + k_2)}$$

essendo $\alpha = 30°$. A questo punto la molla 1 si è accorciata di Δl rispetto alla sua lunghezza l a riposo. Il punto quindi avrà una distanza da terra pari ad

$$h = (l - \Delta l)\sin\alpha$$

per i noti teoremi sui triangoli rettangoli.

(*Parziale 7/2/2003*, R: $h = 0.402\,m$)

Esercizio 2

Un punto materiale di massa $m = 1.2\,kg$ (figura sopra al centro) é fissato al soffitto tramite un cavo inestensibile di massa trascurabile di lunghezza $r = 1.2\,m$ ed una molla di lunghezza a riposo trascurabile ($l_0 = 0\,m$) e costante elastica $k = 40\,N/m$. Cavo e molla sono entrambi fissati in un'estremitá al soffitto (a distanza r l'uno dall'altro) e nell'altra ad m. Calcolare, all'equilibrio, la distanza d del punto dal soffitto. (*Totale 28/3/2003*R: $d = 0.286\,m$)

Esercizio 3

I due corpi A e B di masse rispettivamente $m_A = 2\,\xi \cdot 10^{-3}\,Kg$ ed $m_B = 3\,\xi \cdot 10^{-3}\,Kg$ (vedi in alto a destra) sono uniti con un cavo inestensibile di massa trascurabile. Il corpo B é appoggiato su un piano inclinato di $\alpha = 30°$ rispetto a terra. Il corpo A é vincolato ad una parete tramite un'elastico che esercita su di esso una forza pari a $F = -k\,x - h\,x^2$ con $k = \xi/10\,N/m$ e $h = \sqrt{\xi}/5\,N/m^2$ essendo x l'allungamento dell'elastico (il segno meno indica che la forza agisce in senso opposto all'allungamento x). Calcolare, all'equilibrio, l'allungamento x dell'elastico e la tensione T del cavo. (*Totale 1/7/2003*;

Soluzione

La risultante delle forze agenti su ciascuno dei due corpi deve essere nulla. Per il corpo A le forze in gioco sono: la forza peso $\vec{P}_A$, la reazione vincolare del piano $\vec{F}_{r,A}$, la forza dell'elastico $\vec{F}_k$e la tensione del cavo $\vec{T}_A$. Per quello che riguarda il corpo B abbiamo invece: la forza peso $\vec{P}_B$, la reazione del piano inclinato $\vec{F}_{r,B}$ e la tensione del cavo $\vec{T}_B$. Per il corpo A, all'equilibrio, vale:

$$\vec{R} = \vec{P}_A + \vec{F}_{r,A} + \vec{F}_k + \vec{T}_A = 0$$

Scelgo un'opportuna coppia di versori $\hat{\imath}$ parallelo a terra ed $\hat{\jmath}$ perpendicolare a terra e proietto la relazione sopra. Interessa solo la proiezione lungo $\hat{\imath}$:

$$\vec{R}_A \cdot \hat{\imath} = 0 = -k\Delta l - h\Delta l^2$$

Faccio lo stesso per il corpo B. Proietto lungo due versori $\hat{t}$ parallelo al piano inclinato ed $\hat{n}$ ad esso perpendicolare. La proiezione che interessa q̀uella lungo $\hat{t}$ che dà:

$$\vec{R}_B \cdot \hat{t} = m_B g \sin\alpha - T_B = 0 \tag{1}$$

Siccome $T_B = T_A$ per il terzo principio della dinamica allora dalle due equazioni sopra si ottiene:

$$k\Delta l + h\Delta l^2 = mg\sin\alpha$$

che è risolubile (eq. di secondo grado in Δl) ma da due soluzioni. Una delle due è negativa, quindi la scartiamo. Quella che rimane é la soluzione cercata:

$$\Delta l = (-k + \sqrt{k^2 + 2m_B gh})/2h$$

La tensione del cavo si ottiene, quindi banalmente dalla (1): $T = m_B g \sin\alpha$.
R: $x = (-k + \sqrt{k^2 + 2m_B gh})/2h$, $T = m_B g/2$)

Esercizio 4

Un punto materiale di massa $m = \sqrt{\xi} \cdot 10^{-3}\, kg$ é situato all'estremitá di una sbarretta indeformabile, di peso trascurabile e lunga $h = \sqrt{\xi}/5\, m$. L'estremitá opposta della sbarra é incernierata in O ad una parete verticale in modo tale da permetterle solo di ruotare su un piano verticale ortogonale alla parete stessa. Ad una distanza h da O, verticalmente sopra di esso, é fissato l'estremo di una molla ($k = 5\sqrt{\xi}\, N/m$) di lunghezza a riposo pari a $l = \frac{\xi}{4} \cdot 10^{-2}\, m$. La molla é fissata al punto materiale nel suo estremo opposto. Determinare, all'equilibrio statico, l'allungamento Δl della molla. (*Totale 19/6/2003*, R:$\Delta l = mgl/(kh - mg)$)