Esercizi terzo principio

Esercitazioni di Fisica LA per ingegneri - A.A. 2004-2005

Esercizio 2

Una palla da biliardo di raggio $R = 5\,cm$ è in quiete sul piano del tavolo da gioco. Ad un certo istante le viene impressa, da una forza impulsiva centrale, un velocità iniziale $v_0 = 0.5\,m/s$. Si calcoli l'istante in cui il moto della palla diventa di puro rotolamento. Qual è la velocità della palla da quell'istante?

Soluzione

Nel momento in cui la palla viene colpita la velocità del suo centro di massa (e quindi del suo moto di traslazione) è v_0 mentre la sua velocità angolare (di rotazione attorno al centro di massa) è $\omega_0 = 0\,rad/s$. Le equazioni cardinali della dinamica, che in generale costituiscono un sistema di 6 equazioni differenziali nel caso di corpi rigidi, in questo caso si riducono a 2 equazioni differenziali non banali. Questo perchè il moto del centro di massa è sostanzialmente unidimensionale mentre l'asse di rotazione attorno al centro di massa è fisso, parallelo a terra ed ortogonale alla direzione di traslazione della palla.
Le forze in gioco sono la forza d'attrito dinamico nel punto di contatto (di modulo pari a μmg) la forza peso e la reazione vincolare del tavolo (la cui risultante è nulla). Si scelga come centro di riduzione il centro di massa della palla: esso si muove con una velocità parallela al momento totale della palla quindi non entra nella seconda equazione cardinale. Le due equazioni non triviali sono dunque

$$\frac{d}{dt} m v_{cm} = -\mu m g$$

e

$$\frac{d}{dt} K_u = \mu m g R$$

in cui K_u è il momento angolare della palla nella sua rotazione attorno al centro di massa. Tale momento angolare si può esprimere come

$$K_u = I\omega(t) = \frac{2}{5} m R^2 \omega(t);$$

quindi una volta risolte, le equazioni sopra danno

$$v_{cm}(t) - v_0 = -\mu g t \Rightarrow v_{cm}(t) = -\mu g t + v_0$$

e

$$\omega(t) - \omega_0 = \frac{5\mu g}{2R} t \Rightarrow \omega(t) = \frac{5\mu g}{2R} t$$

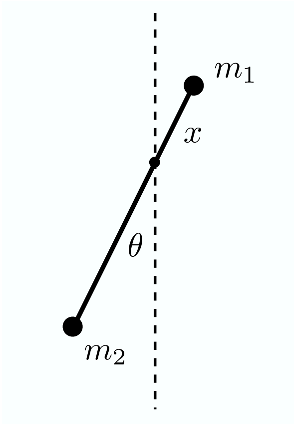
ovvero la velocità del centro di massa diminuisce linearmente nel tempo mentra la velocità angolare della palla aumenta linearmente nel tempo. L'istante t^* in cui si verifica la condizione di rotolamento è quello in cui vale $v_{cm}(t^*) = \omega(t^*)R$. Oltre quell'istante le equazioni scritte sopra non valgono più perchè il punto di contatto palla-tavolo è istantaneamente fermo quindi la forza di attrito dinamico deve essere sostituita da quella di attrito dinamico.

Imponendo la condizione di rotolamento sui risultati trovati si trova:

$$t^* = \frac{2v_0}{7\mu g}$$

da cui

$$v_{cm}(t^*) = \frac{5}{7}v_0.$$



Esercizio 3

Un'asta omogenea di massa $m = 0.5\,kg$ e e lunghezza $l = 1\,m$ reca agli estremi due masse puntiformi $m_1 = 0.2\,kg$ ed $m_2 = 0.3\,kg$. L'asta è posta in rotazione con velocità angolare ω_0 costante attorno ad un asse, ad essa ortogonale, passante per il punto a distanza x da m_1. Sapendo che il sistema è soggetto ad una coppia frenante di momento costante, determinare il valore di x affinchè esso si fermi nel minor tempo possibile.

Soluzione

Il problema si riduce semplicemente allo studio dell'evoluzione di un solo parametro che definisce il moto di rotazione del sistema intorno all'asse a cui è vincolato. In questi casi è comodo scegliere come parametro l'angolo che il centro di massa del sistema forma con la verticale (in questo caso il centro di massa si trova ovviamente sulla sbarra). L'angolo θ (vedi figura) è ovviamente zero quando la sbarra è in equilibrio (disposta perpendicolarmente a terra). Fissiamo quindi $\theta > 0$ quando m_2 è a sinistra della verticale (come nella figura) e $\theta < 0$ quando invece m_2 è a destra. Una scelta simile di θ implica che $\omega \equiv \dot{\theta} > 0$ quando la sbarra ruota in senso orario.
Scelto il centro di riduzione nel punto di intersezione con l'asse di rotazione (in modo da poter cancellare l'effetto di tale asse sulla dinamica del sistema) il momento angolare del sistema nella direzione dell'asse vale:

$$K_u = I_{tot}\omega$$

essendo I_{tot} il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione dell'intero sistema. Vale:

$$I_{tot} = I_l + I_{m_1} + I_{m_2}$$

in cui i momenti di inerzia delle due masse sono facilmente calcolabili con semplici considerazioni geometriche

$$I_{m_1} = m_1 x^2, \quad I_{m_2} = m_2(l-x)^2$$

mentre il momento della sbarretta si ottiene applicando al solito il teorema di *Huygens-Steiner*:

$$I_l = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Esercizio 4

Una sbarretta omogenea di lunghezza $l = 60\,cm$, soggetta alla gravità, può oscillare intorno ad un asse orizzontale passante per un punto P posto tra il centro della sbarretta O ed il suo estremo superiore. Determinare la distanza x fra O e P per la quale il periodo delle piccole oscillazioni è minimo.

Esercizio 5

Una sbarra omogenea di lunghezza l e massa m oscilla intorno ad un asse orizzontale fisso passante per un suo estremo. Determinare l'espressione del modulo della reazione vincolare esercitata dall'asse.

Esercizio 7

Un disco omogeneo di massa $M = 4\,kg$ e raggio R è libero di ruotare senza attrito attorno al suo asse di simmetria (perpendicolare al piano del disco e disposto orizzontalmente). Lungo il suo bordo è avvolto, in modo che non possa slittare, un filo ideale alla cui estremità è fissata una massa $m = 2\,kg$. All'istante iniziale il disco è fermo; quindi viene lasciato libero e la massa scende verso terra facendolo ruotare. Determinare la sua velocità angolare dopo $\Delta t = 2\,s$.

Esercizio 8

Un disco omogeneo di massa m e raggio R viene fatto rotolare lungo un piano inclinato. Determinare il massimo angolo θ di inclinazione del piano oltre il quale il moto non è più di puro rotolamento sapendo che il coefficiente di attrito statico è $\mu_s = 0.5$.

Esercizio 9

Due astronauti di massa ciascuno pari a $M = 90\,kg$ escono da un'astronave in orbita collegati da un cavo di massa trascurabile lungo $L = 20\,m$. Essi ruotano l'uno attorno all'altro compiendo un giro ogni $T = 10\,s$. Calcolare:

1) la tensione a cui é sottoposto il cavo;

2) se uno degli astronauti tira a sé il cavo, la velocitá angolare quando gli astronauti distano $d = 5\,m$;

3) il lavoro compiuto dall'astronauta nel punto precedente.

Esercizio 10

Una molla di lunghezza a riposo pari a $l_0 = 1\,m$ e $k = 20\,N/m$, indeformabile in senso trasverso rispetto alla direzione di allungamento, ruota con velocitá angolare costante $\omega = 0.5\,rad/s$ intorno ad uno dei suoi estremi. All'altra estremitá é fissato un punto materiale di massa $m = 0.1\,kg$. Sapendo che all'istante $t = 0\,s$ il punto dista $r_0 = 2\,m$ dal centro di rotazione ed ha una velocitá, in modulo, pari a $v_0 = 1\,m/s$ determinare la legge oraria del punto materiale nel sistema di riferimento del laboratorio e in quello corotante con la molla e centrato nel suo estremo vincolato (tenere presente che a $t = 0$ la molla giace sull'asse x del S.R. del laboratorio). Calcolare inoltre il momento angolare del punto materiale nel sistema del laboratorio.

Esercizio 11

Un punto materiale di massa $m = 1\,kg$ é fissato al soffitto da un cavo inestensibile e di massa trascurabile lungo $l = 2\,m$. Se all'istante $t = 0$ il punto é fermo, dista $d = 1.9\,m$ dal soffitto ed il cavo é completamente esteso, calcolare il periodo di oscillazione del sistema. Calcolare inoltre il momento angolare del punto. Si conserva??

Esercizio 12

Una ruota di massa $m = 5\,kg$ e raggio $R = 0.5\,m$ rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Il suo centro di massa si muove con velocitá pari a $v_0 = 1\,m/s$. Ad un certo istante incontra un piano inclinato di $\theta = 30°$ rispetto a terra. Calcolare quanto spazio percorre in salita prima di invertire il moto.

Esercizio 13

Una particella di massa $m = 0.1\,kg$ viene sparata da terra con un angolo di lancio di $\theta = 60°$ e una velocitá in modulo pari a $v_0 = 5\,m/s$. Nel punto piú alto della traiettoria essa esplode, dividendosi in due particelle uguali. Sapendo che la particella m_1, immediatamente dopo l'urto viaggia con una velocitá pari a $\vec{v}_1 = 2\hat{j}\,m/s$ calcolare con quale velocitá tocca terra la particella m_2.

Esercizio 14

Una sbarra di lunghezza $l = 1\,m$ e massa $M = 0.5\,kg$ é vincolata in modo tale da poter ruotare solo attorno al suo centro di massa. Inizialmente essa é in quiete. Ad un certo istante essa viene urtata perpendicolarmente in uno dei suoi estremi da un proiettile di massa $m = 0.1\,kg$ e velocitá $v = 2\,m/s$ che si conficca nella sbarra. A quale velocitá angolare ruota tutto il sistema dopo l'urto?

Esercizio 15

Calcolare il momento di inerzia di una sbarra di lunghezza $l = 2\,m$ e $m = 0.5\,kg$ vincolata a muoversi attorno ad un asse perpendicolare alla stessa, fissato ad uno dei suoi due estremi. Calcolare, inoltre, il rapporto fra tale momento di inerzia e quello della stessa sbarra fissato l'asse di rotazione parallelamente al precedente e passante per il suo centro di massa.

Esercizio 16

Una sbarretta uniforme di lunghezza $l = 0.5\,m$ e di massa $m = 0.2, kg$ é appoggiata ad un piano orizzontale ed é vincolata nel suo centro di massa ad un asse di rotazione perpendicolare al piano stesso. Ad un certo istante la sbarra ruota attorno a tale asse con velocitá angolare pari a $\omega_0 = 0.8\,rad/s$. Sapendo che la rotazione é frenata da una forza di attrito dinamico ($\mu = 0.1$) calcolare come varia il momento angolare totale del sistema in funzione del tempo. Quanto impiega a fermarsi la sbarretta?

Esercizio 17

Un cilindro omogeneo di massa $M = 10\,kg$ e raggio di base $R = 0.1\,m$ ruota attorno all'asse di simmetria con velocitá angolare $\omega_0 = 6\,rad/s$. istantaneamente si libera il cilindro da questo asse di rotazione e lo si fissa ad un altro asse parallelo a quello iniziale ma tangente al cilindo. Calcolare la velocitá angolare dopo lo scambio.

Esercizio 18

Un disco omogeneo di massa $M = 4\,kg$ e raggio $R = 0.5\,m$ ruota ($\omega_0 = 20\,rad/s$) attorno ad un asse fisso passante per il suo centro e perpendicolare alla superficie del disco. Tangenzialmente al bordo del disco viene applicata una forza frenante di modulo $F = 4\,N$ per un tempo $\Delta t = 3\,s$. Trascurando gli attriti, calcolare:

1) la velocitá angolare finale (R: $8\,rad/s$);
2) la variazione dell'energia cinetica (R: $-84\,J$);
3) il numero di giri compiuti nel tempo Δt (R: 6.7)

Esercizio 19

Un proiettile di massa $M = 0.3\,kg$ viene lanciato con velocitá di modulo $v_0 = 60\,m/s$ in una direzione che forma un angolo di $\alpha = 60°$ con quella orizzontale. Al vertice della parabola il proiettile si spacca istantaneamente in due frammenti; uno dei frammenti ha massa $m_1 = 0.1\,kg$ e la sua velocitá, l'istante successivo alla scoppio, ha modulo $v_1 = 90\,m/s$ ed é diretta verticalmente verso il basso. Calcolare:

1) la velocitá $\vec{v}_2$ del secondo frammento subito dopo l'urto (R: $45\,\hat{\imath} + 45\,\hat{\jmath}$);

2) la quota massima raggiunta dal secondo frammento (R: $241\,m$).

Esercizio 20

Un uomo ($m = 70\,kg$) é in piedi al centro di una piattaforma circolare di massa $M = 500\,kg$ e raggio $R = 5\,m$ che ruota con velocitá angolare $\omega_0 = 0.5\,rad/s$. Ad un certo istante l'uomo si allontana di $d = 2\,m$ dal centro. Calcolare:

1) la velocitá della piattaforma dopo lo spostamento;

2) Il lavoro che l'uomo dovrebbe fare per tornare al centro della piattaforma.

Esercizio 21

Un astronauta di massa $M = 100\,kg$ nello spazio deve raggiungere l'astronave che dista $l = 10\,m$ da lui. In mano ha un frammento di asteroide di $m = 5\,kg$ e lo lancia ad una velocitá di $v_0 = 10\,m/s$. In quale direzione deve lanciarlo per raggiungere l'astronave? In quanto tempo la puó raggiungere?

Esercizio 22

Una sbarra di lunghezza $L = 0.1\,m$ e massa $M = 0.5\,kg$ vicolata a terra in uno dei suoi estremi viene spostata di poco dalla sua posizione di equilibrio instabile (sbarra verticale) ed incomincia a cadere. Calcolare, all'istante in cui tocca terra, la velocità del suo estremo non vincolato.

Esercizio 23

Una ruota di raggio $R = 0.5\,m$ e massa $M = 5\,kg$ rotola senza strisciare su di un piano inclinato partendo da una quota $h_0 = 1\,m$. Giunta al termine del piano inclinato ($h = 0\,m$) continua a rotolare senza strisciare a terra. Calcolare la velocità del suo centro di massa durante il rotolamento orizzontale.

Esercizio 24

Un uomo di massa $m = 70\,kg$ si trova al centro di un carrello rettangolare omogeneo di massa $M = 50\,kg$ inizialmente fermo e scorrevole senza attrito su un binario orizzontale. L'uomo si sposta, in direzione del binario, fino all'estremità del carrello che è lungo $L = 4\,m$. Trovare lo spostamento del carrello considerando l'uomo puntiforme. (R: $1.17\,m$)

Esercizio 25

Una ruota di massa $m = 5\,kg$ è inizialmente in quiete alla sommità di un piano inclinato di lunghezza $L = 10\,m$ e di inclinazione $\alpha = 30°$. Calcolare il tempo impiegato dalla ruota a percorrere il piano inclinato nel caso di totale assenza di attrito e nel caso di rotolamente puro (senza strisciare).

Esercizi d'esame: Terzo principio

Esercizio 1

Un proiettile cade verso terra partendo da fermo da un'altezza $h_i = \sqrt{\xi}/4\,m$. A terra si trova una sbarra AB lunga $\overline{AB} = 3\xi \cdot 10^{-2}\,m$ e di massa trascurabile. La sbarra é incernierata in un punto O, attorno al quale é libera di ruotare perpendicolarmente a terra tale che $\overline{AO} = 2 \cdot \overline{OB}$. All'estremitá B é appoggiato un punto materiale di massa uguale al proiettile. Ad un certo istante il proiettile in caduta libera urta la sbarra nella sua etremitá A, che si trova ad un'altezza $h_A = \frac{1}{2}h_i$ da terra, e vi si conficca. In quell'istante il corpo in B viene catapultato in senso ortogonale alla sbarra. Si determini l'altezza massima della sua traiettoria. *Totale LA 19/06/2003*

Esercizio 2

Un punto materiale di massa m nota è appoggiato su di un cuneo liscio, di massa $M_1 = 3m$ e angolo $\alpha = 10°$. Il cuneo, a sua volta, è vincolato a scorrere senza attrito su di un piano orizzontale liscio. Supponendo che inizialmente tutto sia in quiete e che il punto materiale si trovi a un'altezza h_0 rispetto al piano orizzontale, calcolare: (a) la velocità di traslazione del cuneo quando il punto materiale è sceso sul piano orizzontale; (b) supponendo poi che il punto, una volta raggiunto il piano orizzontale, incontri un secondo cuneo liscio, di massa $M_2 = 4\,m$ e angolo $\beta = 20°$, anchesso libero di scorrere senza attrito sul piano orizzontale, calcolare la massima altezza h raggiunta dal punto materiale sul secondo cuneo. *Totale 28/03/2003*

Esercizio 3

Un punto materiale $M = 0.1\,kg$ é appeso al soffitto ad un'altezza h da terra tramite una molla allungata di $\Delta y = 10\,cm$ rispetto alla lunghezza a riposo l_0. Inizialmente il punto é fermo. Ad un certo istante viene urtato, in modo totalmente anelastico ed in senso longitudinale rispetto alla direzione in cui agisce la molla, da una particella di massa $m = 10\,g$ lanciata da terra con velocitá v_0. Calcolare la frequenza di oscillazione del sistema dopo l'urto. *Parziale Feb. 2003*(S: $\nu = 1.502\,Hz$)