

Esercizi di Calcolo Vettoriale e Cinematica

Esercitazioni di Fisica LA per ingegneri - A.A. 2003-2004

Il moto circolare uniforme

Per definizione il moto circolare uniforme é il moto di un punto materiale su una circonferenza con velocità in modulo costante. Sia R il raggio della circonferenza in questione. La legge oraria del moto é:

$$s(t) = v_0 t + s_0 \quad (1)$$

in cui $s(t)$ indica, al variare del tempo, la misura dell'arco di circonferenza compreso tra la posizione del corpo all'istante t e un'origine opportunamente scelta, v_0 e s_0 sono costanti. All'istante $t = 0$ il corpo occupa una posizione s_0 non necessariamente coincidente con l'origine scelta sulla traiettoria. É facile verificare che la (1) descrive un moto a velocità costante in modulo: dalla definizione di velocità istantanea, infatti:

$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = v_0 \quad (2)$$

L'accelerazione, che in generale ha la forma $\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{r}\hat{n}$, nel caso del moto circolare uniforme ha solamente una componente centripeta essendo $\ddot{s} = 0$. Il raggio della circonferenza osculatrice, r , inoltre é costante ed uguare ad ogni istante al raggio della circonferenza stessa R , quindi si ha:

$$\vec{a} = \frac{\dot{s}^2}{R}\hat{n} \quad (3)$$

L'accelerazione é non nulla poiché la velocità, che ad ogni istante tangente alla traiettoria, é costante in modulo ma cambia in direzione.

Il moto circolare uniforme é un moto di tipo periodico: esiste un intervallo di tempo caratteristico, detto periodo T , dopo il quale punto materiale torna sui suoi passi. Essendo la misura della circonferenza uguale a $2\pi R$ ovviamente sará:

$$T = \frac{2\pi R}{v_0}. \quad (4)$$

La misura dell'arco che determina la posizione del corpo sulla traiettoria, nel caso di moto sulla circonferenza si puó esprimere tramite l'angolo θ sotteso dall'arco stesso tramite la relazione nota $\theta R = s$. Anche θ sará una funzione del tempo come $s(t)$. La sua derivata rispetto al tempo si chiama velocità angolare e si indica con ω . Nel caso in questione:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{R} \quad (5)$$

é una quantità costante. La velocità angolare si misura in rad/s .

La derivata rispetto al tempo di ω si chiama accelerazione angolare. Dalla relazione (4) si ottiene $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Spesso, per caratterizzare i moti periodici, si usa al posto del periodo, il suo inverso: la frequenza ν . La frequenza si misura in hertz ($hz = s^{-1}$) ed esprime il numero di volte che si verifica un certo fenomeno periodico in un secondo.

Il moto circolare uniforme può essere approfonditamente studiato pure con gli strumenti della cinematica cartesiana. Sia $\vec{r}(t)$ il vettore posizione che a partire dall'origine degli assi segue il nostro punto materiale sulla circonferenza che immagineremo centrata in tale origine. Sarà in generale $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ e, per i punti della circonferenza, $x(t) = R \cos \theta(t)$ e $y(t) = R \sin \theta(t)$ essendo θ il solito angolo sotteso dall'arco percorso dal punto materiale. Integrando la (5), essendo ω costante nel tempo, si ottiene $\theta = \omega t$. Perciò il moto circolare uniforme è descritto da:

$$\vec{r}(t) = R \cos \omega t \hat{i} + R \sin \omega t \hat{j}. \quad (6)$$

Come verifica del risultato ottenuto si può calcolare:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega R \sin \omega t \hat{i} + \omega R \cos \omega t \hat{j} \quad (7)$$

e:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2 R \cos \omega t \hat{i} - \omega^2 R \sin \omega t \hat{j}$$

per verificare (è possibile farlo ad occhio) che $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$ ossia $\vec{v} \perp \vec{r}$ e che $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{a}$. Essendo $\vec{r} = -\omega^2 \vec{0}$, \vec{r} e \vec{a} hanno verso opposto.