DINAMICA

La dinamica si occupa dello studio delle cause del moto; essa si fonda sul concetto di forza. Il concetto di forza è piuttosto intuitivo (anche se a volte è facile equivocare, quindi attenzione!) ed in generale lo associamo allo sforzo necessario a spostare, deformare, sostenere un oggetto. Sarà tuttavia opportuno dare una definizione operativa di forza, ovvero definire come misurarla.

Vediamo di elencare i principi su cui si fonda la dinamica del punto materiale. Tali principi sono frutto dell'osservazione, noi li enunceremo lasciando al corso di Fisica A il compito di descrivere i ragionamenti e gli esperimenti che hanno ad essi condotto.

1) prima legge della dinamica: quando la risultante delle forze agenti su un punto materiale è nulla, il punto conserva il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.
2) seconda legge della dinamica: un punto materiale soggetto ad una forza totale $\vec{F}$ subisce un'accelerazione ad essa proporzionale. La costante di proporzionalità fra il vettore forza ed il vettore accelerazione istantanea è una proprietà intrinseca del punto materiale ed ha il nome di massa inerziale.
3) terza legge della dinamica: ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria ovvero un sistema fisico che esercita una forza su di un altro sistema fisico (azione) allo stesso tempo subisce una forza (reazione) uguale in modulo ed in direzione ma contraria in verso rispetto alla forza esercitata.

Esempi prima legge

Si consideri un oggetto appoggiato ad un piano orizzontale: l'oggetto subisce una forza di attrazione verso terra (la cosiddetta forza peso) e contemporaneamente il piano lo sostiene esercitando su di esso una forza dal basso verso l'alto (detta reazione vincolare del piano) perpendicolare al piano stesso e di verso opposto rispetto alla forza peso. Il modulo della reazione vincolare del piano è uguale al modulo della forza peso e così la risultante delle due forza in questione è nulla ed il corpo è fermo e rimane fermo indefinitamente fino a quando non intervenga un'altra forza esterna per modificarne lo stato di quiete.

Si consideri un uomo che spinge un masso a terra ed il masso si muove con velocità costante. L'uomo esercita una forza orizzontale sul masso che, nei punti in cui è a contatto con il suolo, subisce una forza di attrito radente uguale in modulo ma opposta in verso alla forza esercitata dall'uomo.

Esempi seconda legge

Si consideri una tegola che cade dal tetto di una casa. Si osserva con buona approssimazione che il moto della tegola è accelerato e la sua accelerazione istantanea è costante in modulo direzione e verso ed è diretta verso terra. Tale accelerazione è conseguenza dell'effetto della forza peso che, in questo caso, è la forza più grande (di diversi ordini di grandezza) agente sul punto. Essa è proprio perpendicolare a terra, costante in modulo e diretta verso il suolo, come l'accelerazione osservata!

Si consideri un punto materiale legato, tramite un filo molto leggero e di lunghezza fissata, ad un chiodo piantato su un piano orizzontale. Se il punto viene lanciato e inizia a ruotare con una certa velocità angolare intorno al chiodo esso ha un'accelerazione normale alla traiettoria diversa da zero. Questa accelerazione ha il nome di accelerazione centripeta, perché è diretta verso il centro della traiettoria, ed è conseguenza della tensione del cavo che agisce nella stessa direzione e nello stesso verso sul punto curvandone la traiettoria.

Esempi terza legge

Un uomo in mare viene soccorso da un altro uomo su una scialuppa di salvataggio che gli lancia una corda legata ad un salvagente. L'uomo in mare indossa il salvagente e l'uomo sulla scialuppa incomincia a tirare a sé la corda. Si osserva che l'uomo con il salvagente inizia a muoversi e si avvicina alla scialuppa. Ma anche la scialuppa contemporaneamente inizia a muoversi verso l'uomo (seppure con accelerazione molto più piccola). Questo succede perché quando si esercita una forza (azione) contemporaneamente si subisce una forza uguale e contraria (reazione). Quindi anche l'uomo e la scialuppa su cui esso si trova risentono della loro azione e sono anch'essi soggetti ad una forza che li accelera.

È noto che la terra ruota attorno al sole. L'accelerazione è conseguenza dell'attrazione gravitazionale fra terra e sole (che è l'unica forza in gioco in questo caso). Anche il sole si muove (seppur in modo quasi impercettibile) di moto accelerato a causa della muta attrazione fra i due pianeti. Quindi entrambi i corpi celesti descriveranno delle orbite, l'orbita della terra però è molto più evidente perché a parità di forza cui sono sottoposti il sole, avendo una massa molto più grande, subisce un'accelerazione molto più piccola e quindi si muove di meno.

Si noti che dal secondo principio risulta che $\vec{F} = m\,\vec{a}$ dove m è la massa del corpo soggetto alla forza $\vec{F}$ e di cui si osserva l'accelerazione $\vec{a}$. La massa m è una quantità positiva (e quindi forza ed accelerazione sono sempre equiverse!) e si misura in Kg (chilogrammi) o in multipli o sottomultipli del chilogrammo. La massa dipende dalla "quantità" di materia di un corpo, non dipende dalla sua forma, dallo spazio o dal tempo, dal suo stato di aggregazione.

L'unità di misura della forza è il Newton (N) e dalla seconda legge segue che $N = Kg\, m\, s^{-2}$. Si noti inoltre che gli effetti delle singole forze agenti simultaneamente su un corpo materiale si sommano indipendentemente fra di loro ovvero l'effetto di ciascuna forza non risente della presenza delle altre. Un corpo di massa m soggetto alla sola forza $\vec{F}_1$ ha accelerazione $\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}$, soggetto alla sola forza $\vec{F}_2$ ha accelerazione $\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}$ ed infine soggetto alla forza totale $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ha accelerazione $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ e viceversa! Questo garantisce che non ci si debba preoccupare delle “interferenze” fra forze diverse nella dinamica di un corpo.

Attenzione quindi:
Se un corpo è fermo non è necessariamente vero che su di esso non stanno agendo delle forze! Il fatto che sia fermo ci permette solo di dedurre che la risultante delle forze agenti su di esso è uguale al vettore nullo!
Se un corpo si muove non possiamo dedurre che esso sia soggetto ad una forza! In particolare se il suo moto è accelerato (con accelerazione vettoriale diversa da zero) allora sicuramente esso è soggetto ad un’insieme di forze con risultante non nulla e parallela all’accelerazione osservata. Se il moto è rettilineo uniforme (quindi con accelerazione vettoriale nulla) allora possiamo dedurre che la risultante delle forze agenti su di esso è uguale al vettore nullo.

Forza

Vediamo ora di catalogare e descrivere l’effetto di una serie di forze cui possono essere soggetti i punti materiali, cercando, se possibile, di isolarne l’effetto.

Forza gravitazionale e forza peso

La forza gravitazionale è la forza attrattiva fra tutti corpi dotati di massa. Per le finalità di questo corso possiamo affermare che tutto ciò che ci circonda, che possiamo toccare, spostare, muovere ha massa. Ma questo significa che ogni oggetto esercita una forza gravitazionale sugli oggetti che lo circondano! Due uomini esercitano, l'uno sull'altro, attrazione gravitazionale! In particolare due corpi puntiformi esercitano l'uno sull'altro una forza gravitazionale diretta come la retta che congiunge i due punti e di tipo attrattivo. Quanto vale la forza gravitazionale? Il modulo della forza gravitazionale fra due oggetti di massa m_1 ed m_2 e distanti d vale

$$\left\| \vec{F}_G \right\| = \gamma \frac{m_1 \, m_2}{d^2}$$

dove γ è una costante che si chiama costante di Newton ed ha il valore di $\gamma \simeq 6.67 \cdot 10^{-11} \, m^3 Kg^{-1} s^{-2}$. Questo significa che, ad esempio, due uomini di $80 \, Kg$ alla distanza di $1 \, m$ esercitano, l'uno sull'altro,una forza pari, in modulo, a circa $4.37 \cdot 10^{-7} \, N$. Se pensassimo all'accelerazione che ne deriverebbe per uno di questi uomini si ha $a = \frac{\left\| F_G \right\|}{m} \simeq 5.34 \cdot 10^{-9} \, m \, s^{-2}$ che è estremamente piccola confrontata con l'accelerazione degli oggetti che comunemente vediamo muoversi attorno a noi!

Pensiamo ora invece a calcolare la forza di attrazione Terra-Sole. Se pensiamo che la massa della terra è circa $M_T \simeq 5.97 \cdot 10^{24} \, Kg$ e la massa del sole è circa $1.99 \cdot 10^{30} \, Kg$ e che la distanza terra-sole è circa (mediamente) $d \simeq 1.48 \cdot 10^{11} \, m$ deriva una forza di attrazione pari a $F \simeq 3.72 \cdot 10^{22} \, N$ che è diversi ordini di grandezza superiore alla forza di attrazione fra 2 uomini.

Si consideri infine la forza di attrazione fra un uomo di $m = 80\ Kg$ e la terra. Per adesso, nelle nostre stime, abbiamo sempre adottato l'espressione per la forza gravitazionale, valida per 2 corpi puntiformi. Ovviamente lo studente potrebbe obiettare che la terra ed il sole sono ben diversi dall'essere puntiformi. Tuttavia l'approssimazione è da considerarsi ragionevole visto che la distanza fra terra e sole è molto maggiore delle loro dimensioni quindi in un certo senso le loro dimensioni sono piccole rispetto alla distanza d che va adottata per determinare F_G (il raggio della terra è $R_T \simeq 6.37 \cdot 10^6\ m$ ed il raggio del sole è $R_S \simeq 7 \cdot 10^8\ m$). Nel caso dell'esempio dei due uomini, invece, l'approssimazione era ben più rozza ma serviva "solo" stimare rozzamente la "piccolezza" dell'interazione gravitazionale fra oggetti di una certa massa. Quando si deve calcolare la forza gravitazionale di interazione fra due corpi estesi di forma sferica si può adottare l'espressione utilizzata per corpi puntiformi ma essendo d la distanza fra i centri dei due oggetti estesi.

Se l'uomo si trova in prossimità della superficie terrestre allora la distanza d fra l'uomo e la terra è la distanza fra l'uomo (che può essere considerato puntiforme) ed il centro della terra (tale distanza è molto più grande delle dimensione dell'uomo). Quindi

$$F_G \simeq 7.85 \cdot 10^2\ N$$

da cui deduciamo che la forza gravitazionale ha un valore non trascurabile quando almeno uno dei due corpi coinvolti nell'interazione ha una massa molto grande ed i due corpi non sono eccessivamente lontani.

Ora calcoliamo l'accelerazione dovuta alla forza di gravità di un corpo di massa m in prossimità della superficie terrestre. Anzitutto osserviamo che vicino alla superficie terrestre (ad una quota $h = 10\,m$ o $h = 1\,Km$ da terra) la distanza fra il punto ed il centro della terra è $d = R_T + h \simeq R_T$ perché h è una distanza trascurabile rispetto al raggio terrestre per punti abbastanza vicini al suolo. Inoltre

$$a = \frac{F_G}{m} = \gamma \frac{M_T}{d^2}$$

ovvero l'accelerazione non dipende da m che si semplifica sopra e sotto: quindi tutti i corpi in prossimità della superficie terrestre cadono con la stessa accelerazione! Infine per quanto osservato poco fa:

$$a \simeq \gamma \frac{M_T}{R_T^2} \simeq 9.81\,m\,s^{-2}.$$

Abbiamo trovato il seguente importante risultato: tutti i corpi vicino alla superficie terrestre, in assenza di forze che non siano quella gravitazionale, scendono verso terra con un accelerazione pari a $g \equiv 9.81\,m\,s^{-2}$. Il che è equivalente ad affermare che tutti i corpi vicini alla superficie terrestre sono soggetti alla forza gravitazionale che è con buona approssimazione costante in modulo (nel senso che ha lo stesso valore indipendentemente dalla posizione). In questa approssimazione essa si chiama <u>forza peso</u> e, per un corpo di massa m, vale

$$\vec{P} = -mg\,\hat{k}$$

essendo $\hat{k}$ un versore diretto dal centro della terra verso il corpo ed è quindi perpendicolare alla superficie terrestre. A longitudini/ latitudini diverse la direzione di $\hat{k}$ è diversa. Tuttavia quando studiamo il moto di un corpo in una regione abbastanza piccola rispetto alle dimensioni della terra potremmo assumere che in quella regione la superficie terrestre è sufficientemente piatta e $\hat{k}$ è costante e ad essa perpendicolare.

Esercizi

---

1) Determinare la quota h_{GS} dell'orbita geo-stazionaria dei satelliti.

<u>*Soluzione*</u>: la quota geo-stazionaria di un satellite è la distanza dalla superficie terrestre di un satellite che ruota intorno alla terra con la stessa velocità di rotazione della terra. Quindi un satellite geo-stazionario rimane sempre sullo stessa verticale rispetto a terra. La sua velocità angolare è $\omega_{GS} = \dfrac{2\pi}{T}$ dove $T = 1\,giorno = 86400\ s$. Il satellite descrive un'orbita circolare con un raggio R uguale alla sua distanza dal centro della terra e quindi il suo moto è *circolare uniforme*! L'unica accelerazione di un moto circolare uniforme è quella normale (diretta radialmente verso il centro della traiettoria, per questo è anche detta accelerazione "centripeta"); essa ha modulo $|a_n| = \omega_{GS}^2 R$. Per la secondo legge della dinamica la forza

totale agente sul satellite è responsabile di questa accelerazione. Ma l'unica forza in gioco è quella gravitazionale che è in modulo pari a $\left\|\vec{F}_G\right\| = \gamma \frac{m_s M_T}{R^2}$ dove m_s è a massa del satellite e M_T è la massa della terra. Quindi sarà: $m_s \omega_{GS}^2 R = \gamma \frac{m_s M_T}{R^2}$ e semplificando otteniamo che $R^3 = \gamma \frac{M_T}{\omega_{GS}^2} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\gamma \frac{M_T}{\omega_{GS}^2}}$. Ma il raggio dell'orbita è uguale al raggio della terra R_T e della quota geo-stazionaria ovvero $R = R_T + h_{GS}$ quindi $h_{GS} = \sqrt[3]{\gamma \frac{M_T}{\omega_{GS}^2}} - R_T$.

---

2) Determinare l'accelerazione di gravità sulla luna sapendo che la massa lunare è $M_L \simeq 0.0123\, M_T$ e sapendo che il raggio lunare è $R_L \simeq 1738\ Km$. Determinare quanto vale la forza peso sulla luna rispetto a quella misurabile sulla terra per un corpo di massa m .

Soluzione

La forza peso applicata ad un corpo di massa m sulla terra è data dall'espressione $P_T = m\gamma \frac{M_T}{R_T^2}$. Sulla luna vale un'espressione analoga ovvero :

$$P_L = m\gamma \frac{M_L}{R_L^2} = m\gamma \frac{M_L}{R_L^2}\frac{M_T}{M_T}\frac{R_T^2}{R_T^2} = m\gamma \frac{M_T}{R_T^2}\left(\frac{M_L R_T^2}{M_T R_L^2}\right) = \left(\frac{M_L R_T^2}{M_T R_L^2}\right) P_T .$$

Le quantità fra parentesi sono note quindi $P_L \simeq 0.17\, P_T$.

---

3) Un uomo si tuffa da una piattaforma di $10\, m$. Determinare quanto tempo impiega per arrivare al suolo e con quale velocità ci arriva.

Soluzione

L'uomo si lascia cadere dalla piattaforma quindi parte da fermo e cade verticalmente verso terra. Il suo moto è uniformemente accelerato verso terra. Lo spostamento dell'uomo in funzione del tempo sarà quindi $s(t) = \frac{1}{2} g t^2$. Ad un certo istante t_* l'uomo tocca il suolo. A quell'istante sarà $s(t_*) = \frac{1}{2} g t_*^2 = 10\, m \Rightarrow t_* \simeq 1.43\, s$. La velocità in funzione del tempo è $v(t) = \dot{s}(t) = gt$ quindi la velocità all'istante del contatto con il suolo sarà $v(t_*) = g t_* \simeq 14\, m/s$.

---

4) Un sasso viene lanciato verticalmente da terra con una velocità iniziale di $5\, m/s$. Determinare la quota massima raggiunta.

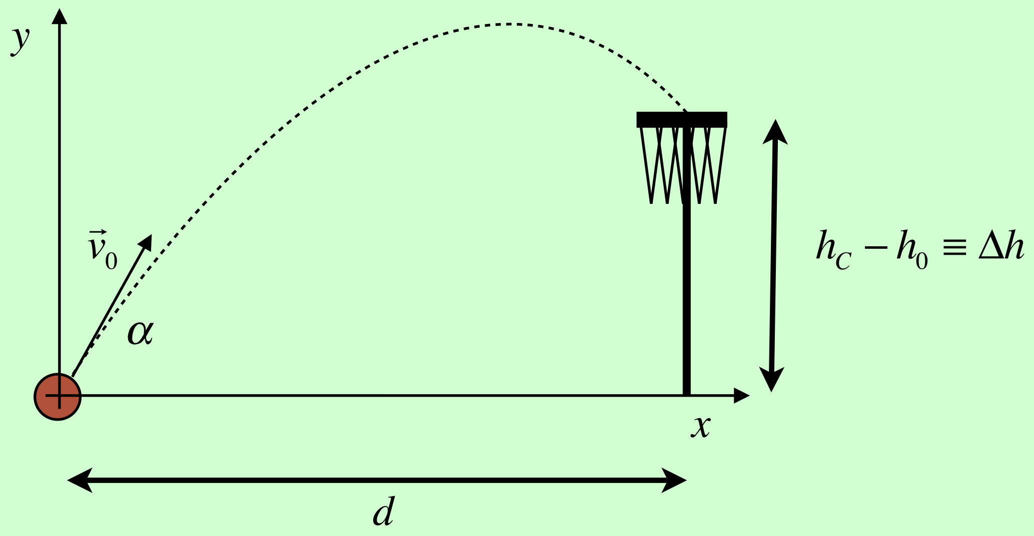
Soluzione

Il moto di un sasso nel campo gravitazionale terrestre è equivalente al moto di un proiettile (già trattato in queste dispense). L'angolo di lancio è $\alpha = 90^\circ$ quindi la quota massima è $y_{max} = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \simeq 1.27\ m$.

---

5) Un giocatore di basket lancia la palla verso canestro. Se il canestro dista $d = 6\ m$ dal giocatore, la palla è lanciata da una quota $h_0 = 2.40\ m$ con un angolo di 60° rispetto al suolo ed il canestro è sospeso ad una quota di $h_C = 3.00\ m$ determinare il modulo v_0 della velocità di lancio affinché il giocatore faccia canestro.

Soluzione



Con la scelta del sistema di riferimento della figura, il vettore posizionale della palla (si ricordi il moto del proiettile) è dato dall'espressione $\vec{r}(t) = (v_0 \cos\alpha\, t)\hat{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t\right)\hat{j}$ con $\alpha = 60^\circ$.

Affinché la palla entri nel canestro a quel che istante di tempo t_* il vettore posizionale deve essere quello del canestro ovvero $\vec{r}(t_*) = d\,\hat{i} + \Delta h\,\hat{j}$. Quindi $\frac{v_0}{2}t_*\,\hat{i} + \left(-\frac{1}{2}gt_*^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 t_*\right)\hat{j} = d\,\hat{i} + \Delta h\,\hat{j}$ ed uguagliando componente per componente si ottiene:

$$\begin{cases} d = \frac{v_0}{2}t_* \Rightarrow t_* = \frac{2d}{v_0} \\ \Delta h = -\frac{1}{2}gt_*^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 t_* \Rightarrow \Delta h = -\frac{1}{2}g\left(\frac{2d}{v_0}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_0\frac{2d}{v_0} \end{cases}$$

e dalla seconda equazione:

$$\frac{2gd^2}{v_0^2} = -\Delta h + \sqrt{3}d \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2gd^2}{-\Delta h + \sqrt{3}d}} \simeq 8.49\, m/s\ .$$

---

6) Un proiettile viene lanciato con una certa velocità v_0 ed un angolo di lancio pari a $\alpha = 60^\circ$ ad una certa distanza d . Esiste un'altro angolo di lancio che, con lo stesso v_0 permetta al proiettili di arrivare alla distanza d?

Soluzione

La gittata di un proiettile dipende dal $\sin 2\alpha$ quindi il problema ci chiede se esiste un altro angolo che dia lo stesso valore di $\sin\left(2\cdot 60^\circ\right)=\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'angolo è ovviamente $\tilde{\alpha}=30^\circ$ infatti $\sin\left(2\cdot 30^\circ\right)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Forza elastica

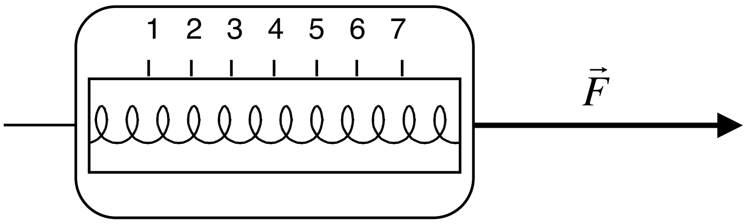
La forza elastica $\vec{F}_k$ è la forza di "reazione" che esercita un corpo che viene deformato sull'agente deformante. La forza elastica, quindi, si oppone alla deformazione. Ad esempio si consideri un elastico fissato ad un'estremità. Se ad un certo istante tiriamo a noi l'elastico allungandolo l'elastico eserciterà su di noi una forza (che si può ben percepire!) diretta in modo tale da opporsi alla deformazione (ovvero in senso opposto rispetto a quello verso cui stiamo tirando).

Tutti gli oggetti si deformano e quindi esercitano un forza elastica, tuttavia la loro rigidità è tale da rendere spesso invisibile ad occhio nudo la deformazione. Se premiamo su un tavolo esso si piega nel verso della spinta ma se il materiale di cui è fatto non è sufficientemente flessibile l'effetto della spinta non sarà evidente.

La molla è il prototipo del sistema meccanico in grado di esercitare una forza elastica. Essa è inoltre in grado di reagire sia ad allungamenti che a compressioni (l'elastico no!). Si trova sperimentalmente che la forza elastica per deformazioni sufficientemente piccole (la definizione di piccolezza in questo caso dipende dai materiali e dal sistema meccanico in questione) ha un modulo proporzionale alla deformazione.

Nel caso di una molla la deformazione si può stimare misurando la lunghezza della molla "a riposo" ovvero la sua lunghezza l_0 quando non è soggetta ad alcuna forza deformante, e la sua lunghezza deformata l . La deformazione può essere definita come $\Delta l = l - l_0$ ed è un numero positivo quando la molla è allungata, negativo quando è accorciata. La costante di proporzionalità positiva k che moltiplicata per il valore assoluto della deformazione dà il valore della forza elastica si chiama costante elastica. Nel caso della molla vale $\left\| \vec{F}_k \right\| = k|\Delta l|$ (*legge di Hooke*) e quindi k si misura in N/m . La costante elastica è un coefficiente che esprime la resistenza della molla alla forza deformante.

Il dinamometro è lo strumento di misura della forza ed è costruito



con una molla fissata ad un'estremità. Se applichiamo una forza all'estremità libera del dinamometro esso si deforma. Quando la forza elastica che deriva dalla deformazione bilancia esattamente la forza deformante la risultante delle due forze è nulla ed il sistema meccanico può rimanere fermo indefinitamente (per la prima legge della dinamica). Siamo in condizioni di equilibrio (statico)!

Siccome forze diverse producono allungamenti diversi del dinamometro all'equilibrio, allora tarandolo opportunamente, è possibile misurare il modulo di una forza misurando la sua deformazione Δl ! Così come il metro è una lunghezza campione, scelta arbitrariamente come la quaranta-milionesima parte dell'equatore, con cui è possibile confrontare e quantificare le lunghezze allora è possibile, con un dinamometro campione quantificare il modulo di una forza. La definizione operativa della forza, ottenuta mediante il dinamometro, è una definizione statica nel senso specificato sopra. La misura della forza tramite un dinamometro è una misura indiretta poiché una forza viene quantificata misurando un allungamento.

Forze vincolari

Consideriamo un oggetto appoggiato ad una superficie orizzontale. Il corpo è soggetto alla forza peso ed è attirato verso terra ma lo osserviamo immobile sulla superficie. Quest'ultima, infatti, deformandosi in modo impercettibile, esercita una forza sul corpo ad essa appoggiato che contro-bilancia esattamente la forza peso e rende possibile l'equilibrio. Tale forza ha origini elastiche ma siccome la deformazione è praticamente invisibile ad occhio nudo, si preferisce chiamarla reazione vincolare. La deformazione della superficie, non essendo visibile, non è quantificabile; perciò la legge di Hooke non si applica a questo tipo di forze.

Un altro esempio di reazione vincolare è costituito dall'effetto di un cavo "inestensibile". Se appendiamo un oggetto ad un cavo, fissato nell'estremità opposta al soffitto, quest'ultimo finirà per sistemarsi verticalmente sostenendolo. Il cavo si deforma in modo impercettibile (si parla in questi casi di cavo inestensibile; si parlerebbe di elastico se la deformazione fosse visibile!). L'oggetto è in equilibrio, sostenuto dal cavo e pure soggetto alla forza peso: quindi la forza che il cavo esercita sul corpo bilancia esattamente la forza peso. Anche in questo caso la forza del cavo non è quantificabile e non è nota a priori! Sia nel caso della superficie che in quella del cavo inoltre la forza vincolare esercitata cambia se viene sostituito il corpo appoggiato/appeso. Le forze vincolari quindi si possono determinare solo a posteriori differentemente dalle forza gravitazionale e la forza elastica per cui abbiamo dato un'espressione esplicita. Le forze per cui è possibile dare tale definizione sono dette attive.

Tensione di un cavo

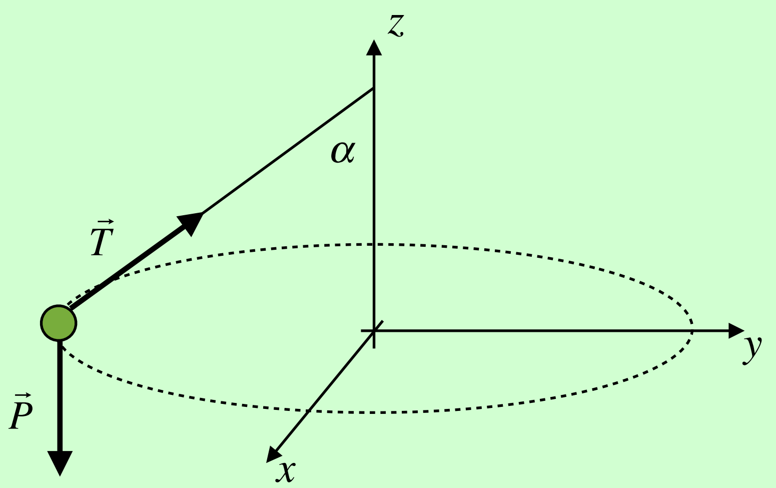
Un cavo reale è dotato di una massa ed una costante elastica molto grande (ovvero esercita forze grandi deformandosi molto poco). Inoltre per un cavo reale esiste una forza limite, detta carico di rottura, che è la massima forza che il cavo riesce ad equilibrare. Applicando una forza maggiore il cavo si spezza. In genere, nei problemi di fisica si adottano ipotesi semplificatrici e si invita lo studente a trascurare la massa ed il carico di rottura del cavo. Inoltre la costante elastica viene assunta infinita (cavo inestensibile). Si parla in questi casi di cavo ideale.

Che cosa è la tensione di un cavo? Se un cavo è idealmente diviso in due parti in un suo punto allora, per la terza legge della dinamica, la forza che una parte del sistema esercita sull'altro nel punto in questione è uguale ed opposta alla forza che la seconda parte esercita sulla prima. Il modulo di questa forza si chiama tensione del cavo nel punto. La tensione è in generale differente di punto in punto lungo un cavo reale ma in un cavo ideale essa è costante finché il cavo non viene avvolto intorno a carrucole dotate di massa non trascurabile.

Esercizi

1) Determinare la tensione del cavo di un pendolo conico di massa $m = 1\,Kg$ sapendo che il cavo forma un angolo di $\alpha = 30^\circ$ con la verticale. Inoltre, sapendo che ruota con velocità angolare $\omega = 2\,rad/s$ determinare la lunghezza l del cavo.

Soluzione



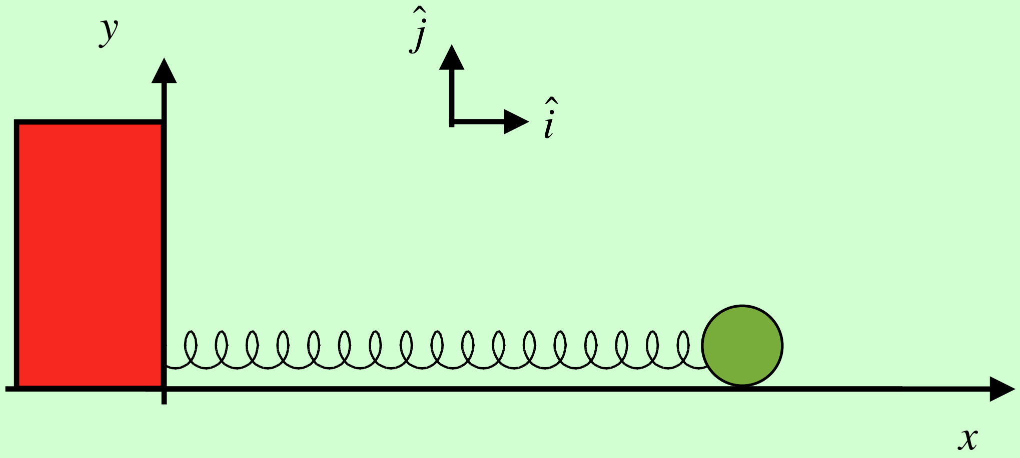
Il punto materiale si muove di moto circolare uniforme. La traiettoria ha raggio $R = l\sin\alpha = l/2$ quindi ha accelerazione diretta verso il centro $\vec{a} = -\omega^2 R\,\hat{i}_r = -\dfrac{\omega^2 l}{2}\hat{i}_r$. Le forze agenti su di esso sono la tensione del cavo $\vec{T}$ che ha una componente lungo $\hat{i}_r$ ed una lungo

$\hat{k}$ e la forza peso, diretta completamente lungo $\hat{k}$. In particolare $\vec{T} = T\cos\alpha\,\hat{k} - T\sin\alpha\,\hat{i}_r$ e $\vec{P} = -mg\,\hat{k}$. Scriviamo la secondo legge della dinamica: $\vec{T} + \vec{P} = m\,\vec{a} \Rightarrow T\cos\alpha\,\hat{k} - T\sin\alpha\,\hat{i}_r - mg\,\hat{k} = -m\dfrac{\omega^2 l}{2}\hat{i}_r$ e proiettiamola lungo $\hat{k}$ ed $\hat{i}_r$. Otteniamo: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}T - mg = 0$ e $-\dfrac{T}{2} = -m\dfrac{\omega^2 l}{2}$. Dalla prima otteniamo che $T = \dfrac{2}{\sqrt{3}}mg \simeq 11.33\,N$ e dalla seconda invece $l = \dfrac{T}{m\omega^2} \simeq 2.83\,m$.

---

2) Una molla di costante elastica k è fissata ad una parete verticale e, all'altra estremità tiene un corpo di massa $m = 5\,Kg$ appoggiato ad un piano orizzontale (in assenza di attrito). La molla, ad un certo istante, viene allungata di $\Delta l_0 = 0.2\,m$ e quindi è lasciata. Il corpo inizia ad oscillare. Sapendo che quando la molla transita per la sua posizione a riposo il punto si muove con velocità $v_0 = 1\,m/s$ determinare k.

Soluzione



Le forze agenti sul corpo sono: la forza elastica $\vec{F}_k$, la forza peso $\vec{P}$ e la reazione vincolare del piano $\vec{R}$. In particolare $\vec{F}_k = -k\Delta l\,\hat{i}$, con $\Delta l = x - x_0$, $\vec{P} = -mg\,\hat{j}$, $\vec{R} = R\,\hat{j}$. Il corpo può muoversi solo nella direzione x quindi la sua accelerazione ha la forma $\vec{a} = \ddot{x}\,\hat{i}$ e la seconda legge della dinamica si scrive come:

$$-k\left(x - x_0\right)\hat{i} - mg\,\hat{j} + R\,\hat{j} = m\ddot{x}\,\hat{i}\ .$$

Nella direzione $\hat{j}$ la seconda legge esprime semplicemente una condizione di equilibrio che permette di determinare R ovvero $R = mg$. Nella direzione $\hat{i}$ invece otteniamo un equazione differenziale che ha come incognita $x(t)$. Questa equazione ha la forma:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x - x_0\right).$$

Lo studente può verificare che questa equazione è formalmente analoga alla relazione differenziale fra lo spostamento e l'accelerazione nel moto armonico:

$$\ddot{s} = -\omega^2 \left(s - s_0 \right).$$

In quel caso era $s(t) = s_0 + A\cos\omega t + B\sin\omega t$ e quindi nel problema in questione varrà una relazione analoga con $\omega^2 = \frac{k}{m}$:

$$x(t) = x_0 + A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + B\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t .$$

Le costanti A e B erano legate alle condizioni iniziali del moto ed in particolare $A = x(0) - x_0$ mentre $B = \frac{\dot{x}(0)}{\sqrt{k/m}}$. Per ipotesi sappiamo che $x(0) - x_0 = \Delta l_0 = A$ e $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$ quindi:

$$x(t) = x_0 + \Delta l_0 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t .$$

Si osservi che il punto materiale transita per la posizione di equilibrio della molla quando il seno si annulla!

La velocità del punto sarà $\dot{x}(t) = \Delta l_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\omega t$; quando il punto transita per la posizione di equilibrio il seno si annulla quindi il coseno è ± 1 quindi a quell'istante, t_e , vale $\dot{x}(t_e) = \pm \Delta l_0 \sqrt{\frac{k}{m}}$. Ma per ipotesi sappiamo che $\left| \dot{x}(t_e) \right| = v_0$ e quindi

$$v_0 = \Delta l_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\frac{v_0^2}{\Delta l_0^2} = 125\,\frac{N}{m}.$$

---

3) Si determini la tensione del cavo ideale di un pendolo quando il punto materiale sospeso si trova alla quota massima (con il pendolo che forma un angolo di $\theta_M = 30^\circ$ con la verticale) ed alla quota minima sapendo che il corpo sospeso ha massa $m = 0.1\,Kg$ ed il pendolo, oscillando, raggiunge una velocità angolare massima di $\omega_M = 1\,rad/s$.

---

4) Uno sciatore discende un pendio lungo $l = 100\,m$ partendo da fermo. Sapendo che il pendio è inclinato di $\alpha = 30^\circ$ rispetto a terra determinare la velocità dello sciatore al termine della discesa.

---

5) In una macchina di Atwood ideale si osserva un'accelerazione del sistema pari a $g/2$. Determinare il rapporto delle masse.

---

6) Un punto materiale è appoggiato ad un piano inclinato di $\alpha = 30^\circ$ rispetto a terra e viene sollevato lungo il piano per effetto di una fune ideale che esercita una tensione $\left\|\vec{T}\right\| = 10\,N$. Se il punto risale il piano con velocità costante, determinare la sua massa.

Forze d'attrito radente

Le forze d'attrito sono forze che si oppongono al moto dei corpi. La loro origine risiede nella complessità delle strutture microscopiche, invisibili all'occhio umano, in corrispondenza delle superfici di contatto fra i corpi. Le superfici dei corpi non sono lisce ma sono microscopicamente irregolari quindi due superfici non scorrono mai liberamente l'una sull'altra a causa delle irregolarità che ostacolano il moto.

Le forze di attrito agiscono tangenzialmente a tali superfici (differentemente dalle reazioni vincolari che agiscono perpendicolarmente alle superfici di contatto) e hanno verso opposto alla velocità. Gli effetti delle forze di attrito sono spesso indesiderati poiché, ad esempio, impediscono ai sistemi meccanici di muoversi per inerzia, senza l'ausilio di forze esterne (si pensi a spostare un peso: in assenza di attrito si potrebbe farlo senza dover spingerlo per tutto il tragitto). Tuttavia in assenza di attrito molti movimenti naturali sarebbero impossibili: afferrare un oggetto, camminare, addirittura rimanere in piedi sarebbe complicato (si pensi a doverlo fare sul ghiaccio che è una superficie con attrito bassissimo).

Si consideri un corpo a contatto con una superficie piana. La forza di attrito radente dipende, entro certi limiti, dalla qualità delle superfici in contatto e dal modulo della forza con cui il corpo preme perpendicolarmente sulla superficie. Quest'ultima forza è uguale, in modulo, alla reazione vincolare della superficie $\|\vec{R}\|$. Dunque si ha:

$$\vec{F}_a = c\|\vec{R}\|$$

dove c è un coefficiente che dipende dalle superfici di contatto.

In generale distinguiamo fra la forza di attrito statico e la forza di attrito dinamico.

Forza di attrito statico: è la forza che si oppone al moto di un corpo fermo. Se un corpo è fermo su una superficie ruvida e si applica ad esso una forza man mano crescente si osserva che il corpo inizia a muoversi solo quando la forza raggiunge un certo valore. Quindi non è possibile quantificare la forza di attrito statico ma è possibile stabilirne un valore massimo per il modulo. Tale valore è uguale al modulo della forza minima che è in grado di spostare il corpo. Ovvero:

$$\left\|\vec{F}_a^{(s)}\right\| \leq f \left\|\vec{R}\right\|$$

dove f è il coefficiente di attrito statico.

Forza di attrito dinamico: è la forza di attrito cui è sottoposto un corpo che “striscia” muovendosi a contatto di una superficie. Essa vale

$$\left\|\vec{F}_a^{(d)}\right\| = \mu \left\|\vec{R}\right\|$$

dove μ è il coefficiente di attrito dinamico ed in generale vale $\mu \leq f$.

Siccome la forza di attrito dinamico si oppone al moto del corpo allora possiamo scrivere

$$\vec{F}_a^{(d)} = -\mu \left\|\vec{R}\right\| \frac{\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|}$$

essendo $\vec{v}$ la velocità del corpo.

Esercizi

1) Un corpo appoggiato su un piano orizzontale viene tenuto in moto con velocità costante $v_0 = 0.5\, m/s$ da una forza $\vec{F}$ di

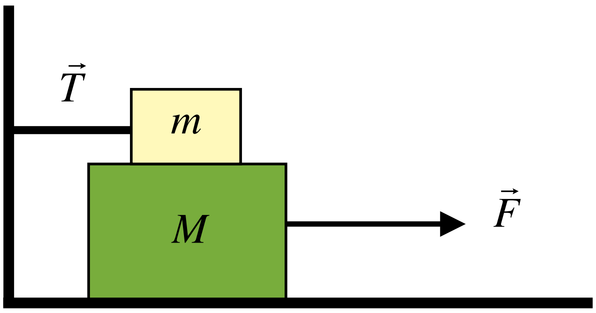
modulo $\left\|\vec{F}\right\| = 1\,N$ e formante un angolo di $\alpha = 30^\circ$ con la direzione parallela al piano. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico del piano vale $\mu = 1/4$ determinare la massa del corpo.

---

2) Un corpo è appoggiato ad un piano inclinato che forma un certo angolo α con la direzione orizzontale. Si determini il valore di α sapendo che il corpo si muove di moto rettilineo uniforme e che il contatto con la superficie inclinata lo sottopone ad una forza di attrito dinamico di coefficiente $\mu = 1/2$.

---

3) Si consideri il sistema in figura.



Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico fra tutte le superfici è $\mu = 1/5$ e che il corpo di massa M si muove con velocità costante, si determini il modulo di $\vec{F}$ e quello della tensione del cavo $\vec{T}$.

Forze inerziali

Le forze inerziali sono forze fittizie. Esse non sono originate dalla mutua interazione fra corpi materiali (come tutte le forze viste fino ad ora) ma dipendono dal SdR che viene utilizzato per descrivere il moto di un sistema fisico. Si pensi al seguente esempio banale: un treno parte ed un passeggero guarda fuori dal finestrino; una persona, ferma, all'esterno del treno agli occhi del passeggero pare muoversi in verso opposto al verso del treno. In particolare, poi, se il treno sta accelerando con accelerazione $\vec{a}_T$, la persona sul binario appare al passeggero in moto accelerato con accelerazione $-\vec{a}_T$! Essa però è soggetta solo a due forze reali che sappiamo avere risultante nulla (la forza peso $\vec{P}$ verso il basso, e la reazione vincolare $\vec{R}$ del binario). C'è evidentemente qualcosa che ci sfugge perché la $\vec{F} = m\,\vec{a}$ scritta per l'uomo sul binario ma relativamente al SdR associato con il passeggero sembra non valere! Infatti $\vec{F} = \vec{P} + \vec{R} = 0$ ma $\vec{a} = -\vec{a}_T \neq 0$ quindi $\vec{F} \neq m\,\vec{a}$.

Si consideri un altro esempio. Immaginate di trovarvi sulla verticale dell'orbita geo-stazionaria di un satellite. Abbiamo visto che il satellite si muove su tale orbita di moto circolare uniforme. Quindi il suo moto è accelerato (l'accelerazione è normale all'orbita e diretta verso il centro della terra) e l'origine di tale accelerazione risiede nell'interazione gravitazionale terra-satellite! La forza gravitazionale è l'unica forza reale cui è soggetto il satellite $\vec{F} = \vec{F}_G$. Ma agli occhi di un osservatore che si trova al suolo, sulla verticale del satellite, tale satellite sembra fermo sulla sua testa ovvero questo osservatore misura $\vec{a} = 0$! Se questo osservatore pensasse di usare la $\vec{F} = m\,\vec{a}$ anche lui si ritroverebbe ad avere dei problemi perché troverebbe $\vec{F}_G \neq m\cdot 0$!

Quindi abbiamo trovato degli osservatori per cui valgono le leggi della dinamica ed altri per cui queste leggi (almeno in senso stretto) non valgono! I primi si chiamano osservatori inerziali, i secondi non inerziali. Gli osservatori inerziali misurano un'accelerazione che è uguale alla risultante delle forze reali diviso la massa del sistema fisico in esame, i non inerziali no! Si parla di osservatori inerziali perché per essi vale la prima legge della dinamica (detto principio di inerzia) oltre, ovviamente alle altre.

Osservatori in moto uniforme rispetto ad osservatori inerziali sono anch'essi inerziali!

Ma veniamo alle forze inerziali. Le forze inerziali sono forze fittizie , apparenti, che un osservatore non inerziale deve aggiungere alle forze reali per ottenere la corretta forma della seconda legge della dinamica nel SdR non inerziale ad esso associato! La forma delle forze inerziali dipende dallo stato di moto del SdR non inerziale (per un trattamento completo di questo argomento rimandiamo al corso di Fisica A). In generale diciamo che se $\vec{a}$ è l'accelerazione di un corpo in un sistema di riferimento inerziale essa sarà in generale diversa da quella misurata da un osservatore non inerziale $\vec{a}'$ ovvero

$$\vec{a} = \vec{a}' + \Delta\vec{a} \; .$$

Ma nel SdR inerziale sappiamo che valgono le leggi della dinamica e che $\vec{a}$ è legata alla risultante delle forze reali $\vec{F}$ dalla relazione

$\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$. Quindi possiamo scrivere:

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}\,' + \Delta\vec{a} \Rightarrow \vec{F} - m\Delta\vec{a} = m\,\vec{a}\,'$$

che significa che nel SdR non inerziale massa per accelerazione misurata del corpo è uguale alla risultante di forze reali $\vec{F}$ e di quelle che definisco come forze inerziali date da $\vec{F}_I = -m\Delta\vec{a}$. Varrà dunque

$$\vec{F} + \vec{F}_I = m\,\vec{a}\,'$$

che è una sorta di seconda legge della dinamica adattata agli osservatori non inerziali. Si noti che la forza inerziale dipende dalla massa del corpo e da $\Delta\vec{a}$. Quest'ultimo vettore si ottiene studiando la trasformazione dell'accelerazione da un SdR ad un altro (si veda la sezione dedicata in precedenza a questo argomento).

Esempio 1

Le accelerazioni misurate in due SdR con assi paralleli due a due e ma con origini in moto accelerato l'una rispetto all'altra sono legate dalla relazione

$$\vec{a} = \vec{A}_{O'} + \vec{a}\,' .$$

Se il SdR non accentato è inerziale allora quello accentato sarà non inerziale e la forze inerziale di cui deve tener conto un osservatore ad esso solidale sarà $\vec{F}_I = -m\,\vec{A}_{O'}$ per un corpo di massa m . Se si ripensa all'esempio del treno è evidente che con l'aggiunta delle forze inerziali ora tutto torna: $\vec{A}_{O'} = \vec{a}_T$ quindi $\vec{F} = 0$ ma $\vec{F}_I = -m\,\vec{a}_T$ quindi $\vec{F}_I + \vec{F} = m\,\vec{a}\,'$ essendo $\vec{a}\,' = -\vec{a}_T$.

<u>*Esempio 2*</u>

Studiamo ora il moto del satellite geo-stazionario utilizzando un SdR che ha l'asse z' coincidente con l'asse di rotazione terrestre, contiene l'orbita del satellite nel piano (x', y') (per semplicità si supponga che il satellite sia sulla verticale dell'equatore) e che ruota con la terra. Rispetto al SdR inerziale che ha asse $z = z'$ ed assi x, y fissi possiamo utilizzare la legge di trasformazione delle accelerazioni già trovata $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_C + \vec{a}_T \Rightarrow \Delta\vec{a} = \vec{a}_C + \vec{a}_T$ dove $\vec{a}_T = -\dot{\omega}\left(y'\hat{i}' - x'\hat{j}'\right) - \omega^2\left(x'\hat{i}' + y'\hat{j}'\right)$ e $\vec{a}_C = -2\omega\left(\dot{y}'\hat{i}' - \dot{x}'\hat{j}'\right)$.

Semplificando ulteriormente ma senza perdere in generalità immaginiamo pure che il satellite ruoti in corrispondenza del semiasse positivo x' a distanza $R_T + h_{GS}$ da z'. Per come è costruito il SdR non inerziale gli osservatori ad esso solidali misurano $x' = R_T + h_{GS}$, $y' = 0$, $z' = 0$ e vedono il satellite fermo ($\dot{x}' = \dot{y}' = \dot{z}' = 0$). Inoltre tale SdR ruota con velocità angolare costante ($\dot{\omega} = 0$). Tutte queste prescrizioni mi permettono di determinare :

$$\begin{cases} \vec{a}_T = -0\left[0\,\hat{i}' - \left(R_T + h_{GS}\right)\hat{j}'\right] - \omega^2\left[\left(R_T + h_{GS}\right)\hat{i}' + 0\,\hat{j}'\right] = -\omega^2\left(R_T + h_{GS}\right)\hat{i}' \\ \vec{a}_C = -2\omega\left(0\,\hat{i}' - 0\,\hat{j}\right) = 0 \end{cases};$$

l'unica forza reale è quella gravitazionale e vale $\vec{F}_G = -\gamma \dfrac{m_s M_T}{\left(R_T + h_{GS}\right)^2}\hat{i}\,'$ (ovvero è sempre diretta come $-\hat{i}\,'$!) quindi nel SdR non inerziale scriviamo:

$$\vec{F}_G + \vec{F}_I = 0 \Rightarrow -\gamma \frac{m_s M_T}{\left(R_T + h_{GS}\right)^2}\hat{i}\,' + m_s \omega^2 \left(R_T + h_{GS}\right)\hat{i}\,' = 0$$

che proiettata lungo $\hat{i}\,'$ dà la relazione trovata anche nel SdR inerziale (come è giusto che sia!) ovvero

$$m_s \omega^2 \left(R_T + h_{GS}\right) = \gamma \frac{m_s M_T}{\left(R_T + h_{GS}\right)^2}\,.$$

Lavoro ed Energia

Il concetto di lavoro è associato alla nozione di forza e di spostamento. Prima di definire in modo formale il lavoro diciamo qualitativamente che quando una forza è applicata ad un punto materiale essa in generale modifica il suo stato di moto. Se questa forza è diretta tangenzialmente alla traiettoria del punto allora contribuisce alla variazione del modulo della velocità del punto e si dice che compie un lavoro. Si noti che, in generale, il moto di un punto materiale è conseguenza della risultante delle forze agenti su di esso ma il lavoro può essere definito per solo una di queste forze! Ciascuna delle forze in gioco contribuirà, istante per istante, a modificare il verso della velocità o a modificarne il modulo. Il concetto di lavoro seleziona solo le forze che contribuiscono a modificare il modulo della velocità!

Esempio 1

La forza gravitazionale cui è soggetto il satellite geo-stazionario non compie lavoro perché la velocità del satellite è costante in modulo ed essa è l'unica forza agente su di esso.

Esempio 2

La forza peso cui è soggetto un punto che cade verticalmente è l'unica forza agente su di esso; il punto ha una velocità che varia , in modulo, nel tempo e quindi la forza peso compie lavoro!

Esempio 3

Si consideri un punto che scivola verso terra appoggiato su un piano inclinato ed in assenza di attrito. Le forze in gioco sono la forza peso e la reazione vincolare del piano. La reazione vincolare è perpendicolare alla traiettoria quindi non fa lavoro (in generale le forze vincolari agiscono ortogonalmente alla traiettoria del punto quindi non fanno lavoro!) ma il modulo della velocità del punto varia nel tempo e quindi è la forza peso a farne!

Lasciamo la definizione generale del lavoro di una forza al corso di Fisica A e limitiamoci a considerare un caso particolare.

Il lavoro di una forza costante in modulo $\vec{F}$ che forma un angolo costante α con la velocità del punto, fa un lavoro pari a

$$L_{A\to B}(\vec{F}) = \left\|\vec{F}\right\| \Delta s_{AB} \cos\alpha$$

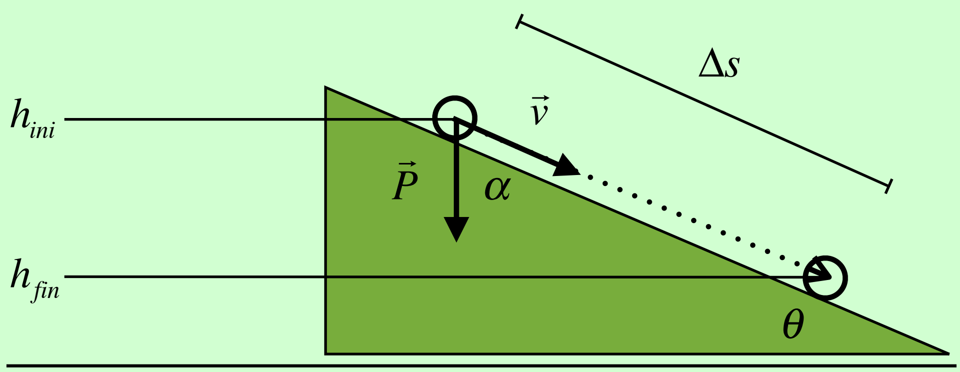
quando il punto si sposta di Δs_{AB} sulla traiettoria dal punto A al punto B .

La dipendenza dal $\cos\alpha$ è significativa del fatto che il lavoro di un forza è nullo se la forza è ortogonale alla traiettoria (si ricordi che il coseno dell'angolo compare generalmente nell'espressione del prodotto scalare fra due vettori; è proprio il coseno che permette di affermare che due vettori perpendicolari hanno prodotto scalare nullo). L'unità di misura del lavoro è il Joule ($J = N \cdot m$). Si noti che il lavoro può essere positivo, negativo o nullo a seconda del valore di α. Se la forza si oppone al moto, in particolare, il lavoro è negativo.

Esempio 1

Ad un certo istante un punto si trova ad una quota h_{ini} da terra e cade verticalmente. Vogliamo calcolare il lavoro compiuto della forza peso quando il corpo di trova alla quota h_{fin}. La forza peso è costante, inoltre la velocità sono parallele ed equiverse ($\alpha = 0$) ed il lavoro è $L = m\,g\left(h_{ini} - h_{fin}\right)$.

Esempio 2

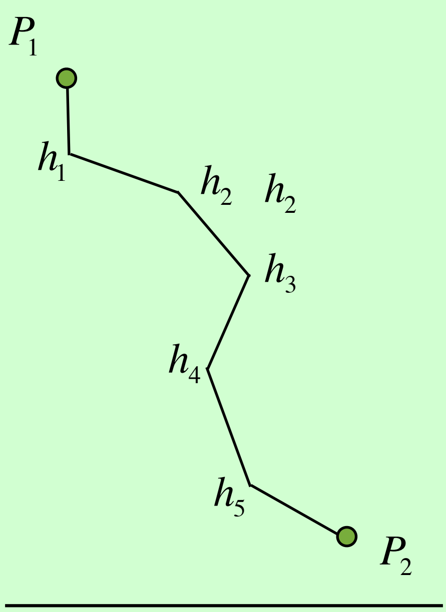


Calcoliamo il lavoro della forza peso agente su di un punto che si muove su un piano inclinato di un angolo θ rispetto a terra (con o senza attrito dinamico) e passa da una quota h_{ini} ad una quota finale h_{fin} . L'angolo fra velocità ed forza è $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ lo spostamento totale è $\Delta s = \frac{\left(h_{ini} - h_{fin}\right)}{\cos\alpha}$ (come si può facilmente vedere ragionando sui triangoli rettangoli in figura) quindi :

$$L = m\,g\,\Delta s\cos\alpha = m\,g\,\frac{\left(h_{ini} - h_{fin}\right)}{\cos\alpha}\cos\alpha = m\,g\left(h_{ini} - h_{fin}\right).$$

Confrontando il risultato ottenuto nei due casi osserviamo che è lo stesso! In pratica il lavoro della forza peso solo dalla quota iniziale e da quella finale (non dal percorso fatto per cambiare quota).

<u>Esempio 3</u>



Ora prendiamo due punti P_1 e P_2 , uno iniziale ad una quota h_{ini} ed uno finale alla quota h_{fin} e costruiamo una possibile traiettoria spezzata che congiunga i due punti: il lavoro della forza peso lo posso scomporre in tanti contributi (uno per ogni segmento) e visto che ogni tratto è analogo ad un piano inclinato di diversa inclinazione si ha:

$$L = mg\left(h_{ini} - h_1\right) + mg\left(h_1 - h_2\right) + mg\left(h_2 - h_3\right) + mg\left(h_3 - h_4\right) + mg\left(h_4 - h_5\right) + mg\left(h_5 - h_{fin}\right)$$

ma molti contributi si cancellano a due a due e quindi alla fine si riottiene $L = mg(h_{ini} - h_{fin})$.

È facile realizzare che questo risultato non dipende dalla spezzata scelta e non solo: siccome possiamo pensare di approssimare qualsiasi traiettoria con una spezzata composta da segmenti infinitamente piccoli allora possiamo dedurre che <u>il risultato ottenuto è valido per ogni traiettoria</u>! Forze che hanno questa proprietà peculiare (il lavoro non dipende dalla traiettoria del punto ma solo dai punti iniziale e finale) si chiamano <u>conservative</u>. La forza peso è conservativa ed in generale le forze che sono ovunque costanti in modulo, direzione e verso sono conservative!

Per le forze conservative è possibile definire una funzione della posizione (o di qualche variabile che descrive la posizione del punto) chiamata <u>energia potenziale</u> V che permette di esprimere il lavoro della forza come $L = V_{ini} - V_{fin}$.

Nel caso della forza peso è naturale e semplice definire, come energia potenziale, la funzione $V(h) = mgh$. Ovviamente <u>l'unità di misura dell'energia potenziale è il Joule</u>.

Veniamo ora alla definizione dell'<u>energia</u>. Il concetto di energia è strettamente collegato a quello di lavoro. <u>L'energia è la capacità a</u>

compiere un lavoro positivo! Il lavoro è il trasferimento meccanico dell'energia da un sistema fisico ad un altro, se un sistema non ha energia non la può trasferire e quindi compiere un lavoro positivo. Quando un uomo spinge un masso esso applica una forza al masso e fa un lavoro positivo. Quando ciò accade si può immaginare che vi sia un trasferimento di energia dall'uomo al masso. Si può immaginare che ogni sistema fisico abbia un serbatoio di energia che può essere trasferita ad altri sistemi. Per gli scopi di questo corso ci basti dire che quando si compie un lavoro su un punto materiale una quantità che si chiama energia cinetica del punto varia. L'energia cinetica è definita come $T = \frac{1}{2} m\, \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2$ e si misura in Joule.

Il teorema delle forze vive (che non dimostreremo) afferma che il lavoro della risultante delle forze $\vec{F}$ agenti su un punto materiale di massa m è uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto:

$$L_{A \to B}(\vec{F}) = T_B - T_A = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_B\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{v}_A\|^2 .$$

Esempio

Si consideri, ad esempio, la caduta di un grave nel campo terrestre. Se il corpo parte da fermo ($v_{ini} = 0$) ad una quota h_{ini} ed arriva ad una quota h_{fin} dopo un certo tempo t_* allora, visto che il moto del punto è uniformemente accelerato verso terra, sarà $h_{ini} - h_{fin} = \frac{1}{2} g t_*^2$

e $v_{fin} = gt_*$. Quindi dalla seconda relazione $t_* = \frac{v_{fin}}{g}$ e, sostituito nella prima, darà

$$h_{ini} - h_{fin} = \frac{1}{2} g \frac{v_{fin}^2}{g^2} \Rightarrow mg\left(h_{ini} - h_{fin}\right) = \frac{1}{2} m v_{fin}^2 = T_{fin} - T_{ini}$$

dove abbiamo usato il fatto che $T_{ini} = 0$ nel caso in questione (poiché $v_{ini} = 0$). Ricordando che $L = mg\left(h_{ini} - h_{fin}\right)$ il teorema delle forze vive risulta verificato ovvero $L = T_{fin} - T_{ini}$.

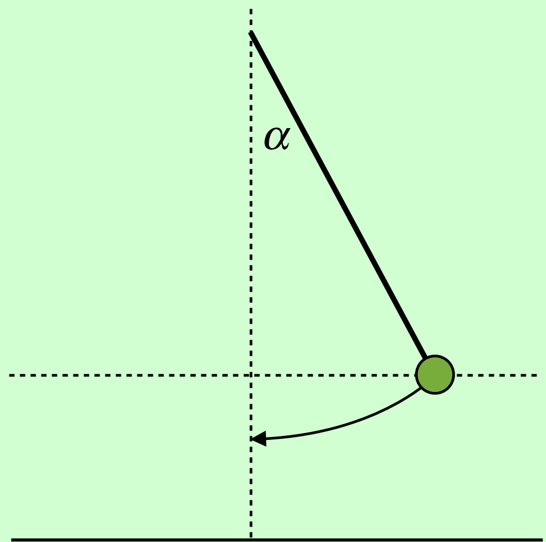
Per il problema appena visto inoltre vale: $L = V_{ini} - V_{fin} = T_{fin} - T_{ini}$ quindi spostando da un membro all'altro alcuni termini risulta che $T_{ini} + V_{ini} = T_{fin} + V_{fin}$! Ma siccome gli istanti iniziale e finale sono arbitrari risulta che la quantità $E = T + V$, nel caso del moto di un grave ha sempre lo stesso valore, in qualsiasi istante! Questa quantità si chiama <u>energia meccanica totale</u> del punto. <u>Essa si conserva durante il moto!</u>

Possiamo generalizzare questo risultato alla dinamica di un punto soggetto ad una serie di forze. Se queste forze sono conservative o non compiono lavoro allora l'energia meccanica totale del punto è una quantità conservata ovvero ha lo stesso valore in tutti gli istanti di tempo.

<u>Esempio 1</u>

Si determini con che velocità arriva a terra un punto che si muove su un piano inclinato in assenza di attrito partendo da una quota h con velocità nulla. Le forze agenti sul punto sono la forza peso e la reazione vincolare del piano. La seconda non fa lavoro mentre la prima è conservativa quindi l'energia meccanica totale del punto si conserva. All'istante iniziale $T_i = 0$ (il corpo è fermo) e $V_i = mgh$, quando il corpo è a terra invece l'energia cinetica è $T_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ e $V_f = 0$. Perciò: $T_i + V_i = T_f + V_f \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh}$.

Esempio 2



Si determini la velocità massima di rotazione di un pendolo di lunghezza l sapendo che il punto viene lasciato fermo da una posizione che forma un angolo α con la verticale.

La velocità massima si raggiunge nel punto di quota minima. L'energia meccanica totale si conserva poiché la tensione del cavo agisce ortogonalmente alla traiettoria. All'istante iniziale $T_i = 0$ e $V_i = mgh_i$, nel punto di quota minima $T = \frac{1}{2}mv_f^2$ e $V_f = mgh_f$. Dunque

$$mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f \Rightarrow mg\left(h_i - h_f\right) = \frac{1}{2}mv_f^2$$

ma (si ragioni ancora su triangoli) $h_i - h_f = l\left(1 - \cos\alpha\right)$ quindi

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgl\left(1 - \cos\alpha\right) \Rightarrow v_f = \sqrt{2gl\left(1 - \cos\alpha\right)}.$$

Esercizi

---

1) Con quale velocità v_0, al minimo, deve essere lanciato un pendolo di lunghezza l_0 dal suo punto di quota minima in modo tale da arrivare alla quota massima?

---

2) Un uomo spinge una massa $M = 100\,Kg$ su di un piano orizzontale ed in presenza di attrito radente ($\mu = 1/2$). Calcolare il lavoro per spostarlo con velocità costante $v_0 = 10\,m/s$ per $\Delta t = 10\,s$.

---

3) Un uomo cala dalla finestra un peso $m = 20\,Kg$ tramite una fune ideale. Sapendo che il corpo si muove seguendo la legge oraria

$\vec{r}(t) = y(t)\hat{j} = \left(y_0 - \frac{1}{2} a_0 t^2 \right) \hat{j}$ con $a_0 = 3\, m/s^2$, calcolare il lavoro dell'uomo se il peso viene calato di $\Delta h = 5\, m$.

---

4) Una sferetta forata è inanellata ad una guida circolare rigida di raggio $R = 1\, m$. La guida è disposta verticalmente. Determinare con quale velocità minima deve essere lanciata la sferetta dal punto più basso della guida per poter arrivare, in assenza di attriti, al punto più alto.

---

5) Una pallina di massa $m = 30\, g$ è lanciata verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 15\, m/s$. Sapendo che raggiunge quota $h = 7.5\, m$ calcolare l'energia dissipata per effetto dell'attrito dell'aria (ovvero il lavoro di tale forza d'attrito) modellandola come una forza costante che si oppone al moto. Determinarne infine il modulo $\left\| \vec{F}_A \right\|$.

---

6) Calcolare quale lavoro si compie per trascinare un oggetto di peso $P = 50\, N$ per una distanza $d = 10\, m$ risalendo un piano inclinato con velocità costante sapendo che il coefficiente di attrito dinamico dovuto allo sfregamento delle superfici ha coefficiente $\mu = 1/5$ e che l'angolo formato con il suolo è $\alpha = 30^\circ$.

---

7) Un punto materiale di massa $m = 1\, Kg$ è appoggiato ad un piano orizzontale ed è vincolato tramite un filo ideale di lunghezza

$l_0 = 1\,m$ ad un punto di questo piano. A causa del filo il punto materiale può descrivere traiettorie circolari. In presenza di attrito dinamico ($\mu = 1$) determinare quanti giri compie il punto materiale se viene lanciato con velocità $v_0 = 10\,m/s$ tangenzialmente alla circonferenza.