

Esempi Esercizi d'Esame

Calcolo vettoriale

1) Dati i due versori \hat{a} ed \hat{b} formanti un angolo $\theta_{ab} = 45^\circ$ si calcoli il prodotto scalare dei vettori $\vec{v}_1 = \hat{a} - 3\hat{b}$ e $\vec{v}_2 = 2\hat{a} + \hat{b}$. (R: $-1 - \frac{5}{2}\sqrt{2}$)

2) Dati i due vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 formanti un angolo $\theta_{12} = 120^\circ$ e con $\|\vec{v}_1\| = 3$, determinare $\|\vec{v}_2\|$ sapendo che la $\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\| = \sqrt{8}$. (R: $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$)

3) Siano dati i due versori \hat{a} ed \hat{i} formanti un angolo $\theta_{ai} = 30^\circ$. Si consideri un terzo versore \hat{j} tale che $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$. Scrivere il vettore $\vec{a} = 5\hat{a}$ per componenti rispetto alla coppia di versori (\hat{i}, \hat{j}) ovvero nella forma $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$. (R: $\vec{a} = \frac{5}{2}\sqrt{3} \hat{i} \pm \frac{5}{2} \hat{j}$)

4) Si calcoli $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ per componenti rispetto ad una base arbitrariamente scelta di versori (\hat{i}, \hat{j}) con $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$ sapendo che $\|\vec{v}_1\| = 2$, $\|\vec{v}_2\| = 5$ e sapendo che formano un angolo $\theta_{12} = 60^\circ$. (R: $7\hat{i} + 5\sqrt{3}\hat{j}$)

5) Sapendo che $\|\vec{v}_1\| = 2$, $\|\vec{v}_2\| = 4$ e $\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\| = 5$ si determini l'angolo θ_{12} fra i vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . (R: 72°)

6) Si determini un versore \hat{w} ortogonale a $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ essendo $\|\vec{v}_1\| = 2$, $\|\vec{v}_2\| = 6$ e $\theta_{12} = 60^\circ$ (determinare gli angoli θ_{1w} e θ_{2w} che forma rispettivamente \hat{w} con \vec{v}_1 e \vec{v}_2). (R: $\theta_{1w} = 11^\circ, \theta_{2w} = 71^\circ; \theta_{1w} = 169^\circ, \theta_{2w} = 109^\circ$)

7) Si determini un versore \hat{w} che forma un angolo di 60° con $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ essendo $\|\vec{v}_1\| = 3$, $\|\vec{v}_2\| = 4$ e $\theta_{12} = 90^\circ$ (determinare le componenti di \hat{w} rispetto ad una base ortogonale di versori (\hat{i}, \hat{j})). (R: $\hat{w} = 0.99\hat{i} - 0.12\hat{j}; \hat{w} = -0.39\hat{i} + 0.92\hat{j}$)

Cinematica

1) Un'auto compie 3 giri su di una pista lunga 5 Km impiegando rispettivamente $\Delta t_1 = 1 \text{ min } 5 \text{ s}$, $\Delta t_2 = 1 \text{ min } 15 \text{ s}$, $\Delta t_3 = 59 \text{ s}$. Si determini la velocità media in ciascun giro e la velocità media sui 15 Km . Si esprima le velocità in Km / h . (R: $277 \text{ Km} / \text{h}$, $240 \text{ Km} / \text{h}$, $305 \text{ Km} / \text{h}$, $271 \text{ Km} / \text{h}$)

2) Un'auto viaggia per 1 h verso Nord e successivamente 15 min verso Est. Sapendo che il modulo del vettore spostamento totale dell'auto è uguale 100 Km e che l'auto viaggia con velocità costante v_0 si determini tale velocità e la si esprima in m / s . (R: $26.95 \text{ m} / \text{s}$)

3) Un ciclista corre con una velocità $v_1 = 30 \text{ Km} / \text{h}$ su una strada rettilinea. Un altro ciclista, partendo 1 min dopo raggiunge il primo dopo aver percorso 50 Km . Con che velocità viaggia il ciclista partito per secondo? (R: $30.3 \text{ Km} / \text{h}$)

4) Ad un certo istante due auto si trovano nello stesso punto di una strada rettilinea. A tale istante la prima auto si sta muovendo con velocità costante $v_1 = 100 \text{ Km} / \text{h}$ mentre la seconda auto è ferma ma accelera con accelerazione costante $a_2 = 2 \text{ m} / \text{s}^2$. Si calcoli dopo quanto tempo la seconda auto sorpassa la prima e con quale velocità. (R: 27.8 s , $200 \text{ Km} / \text{h}$)

5) Un'auto parte da ferma con un'accelerazione costante uguale a $a_0 = 0.2 \text{ m} / \text{s}^2$. Determinare la velocità media dopo i primi 20 s . Determinare inoltre dopo quanto tempo dalla partenza la velocità

media è il doppio di quella calcolata dopo i primi 20 s . (R:
 $2\text{ m/s}, 40\text{ s}$)

6) Due treni partono contemporaneamente uno da Roma verso Milano, l'altro da Milano verso Roma. Sapendo che il tratto Roma-Milano è lungo 632 Km e che i due treni si incrociano dopo 4 h a 250 Km da Roma determinare la velocità dei due treni in m/s ed il tempo che impiegano per coprire l'intera distanza. (R:
 $v_{R \rightarrow M} = 62.5\text{ Km/h}, \Delta t_{R \rightarrow M} = 10.1\text{ h}; v_{M \rightarrow R} = 95.5\text{ Km/h}, \Delta t_{M \rightarrow R} = 6.6\text{ h}$
)

7) Due auto corrono su un percorso circolare lungo 3 Km . Determinare la velocità delle due auto sapendo che dopo 4 giri e mezzo e 300 s la prima auto doppia la seconda. Quanto impiegano le due auto per concludere 5 giri completi di pista? (R:
 $9/7, 333\text{ s}, 429\text{ s}$)

8) Lo spostamento di un'auto su una traiettoria rettilinea è dato dalla funzione $s(t) = at^3 - bt$ con $a = 2\text{ cm/s}^3$ e $b = 0.1\text{ m/s}$. Determinare la velocità istantanea a $t = 0\text{ s}$ e la velocità media calcolata sui primi 10 s . Si esprimano le velocità in m/s . (R:
 $-0.1\text{ m/s}, 1.9\text{ m/s}$)

9) Lo spostamento di un punto in funzione del tempo è dato dalla funzione $s(t) = 5at^4 - 2bt^2 + c$ con $a = 10^{-2}\text{ m/s}^4$, $c = 100\text{ m}$. Determinare b sapendo che all'istante $t = 0\text{ s}$ l'accelerazione vale $6 \cdot 10^{-1}\text{ m/s}^2$. Alternativamente determinare b sapendo che la velocità media calcolata nei primi 10 s vale 5 m/s . (R:
 $-0.15\text{ m/s}^2, 2.25\text{ m/s}^2$)

10) La funzione spostamento di un punto materiale è data da:
 $s(t) = 3at^2 - 2bt + c$. Determinare a , b , c sapendo che all'istante $t = 0 \text{ s}$ lo spostamento vale $s(0 \text{ s}) = 0 \text{ m}$, la velocità è $v(0 \text{ s}) = 5 \text{ m/s}$ e la velocità dopo 10 s è $v(10 \text{ s}) = 10 \text{ m/s}$. (R: $\frac{1}{12} \text{ m/s}^2, -\frac{5}{2} \text{ m/s}, 0 \text{ m}$)

11) Il vettore posizione di un punto materiale è $\vec{r} = (at^2 - bt)\hat{i} + (bt + c)\hat{j}$ con $a = 5 \text{ m/s}^2$, $b = 1 \text{ m/s}$ e $c = 10 \text{ m}$. Si determini a quale istante t_* l'accelerazione ha solo componente normale. (R: 0.1 s)

12) Si calcoli l'accelerazione normale e quella tangenziale all'istante $t = 10 \text{ s}$ di un punto che si muove su una circonferenza di raggio $R = 3 \text{ m}$ con velocità $v(t) = at^2 - b$, $a = 3 \text{ m/s}^3$, $b = 1 \text{ m/s}$. (R: $29800 \text{ m/s}^2, 60 \text{ m/s}^2$)

13) Il vettore posizione di un punto è $\vec{r} = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)\hat{i}$; sapendo che, all'istante $t = 0 \text{ s}$, $\vec{r}(0 \text{ s}) = -3 \text{ m}\hat{i}$, $\vec{v}(0 \text{ s}) = (2 \text{ m/s})\hat{i}$ e che $\vec{a}(0 \text{ s}) = (6 \text{ m/s}^2)\hat{i}$ determinare A , B , ω . (R: $-3 \text{ m}, \sqrt{2} \text{ m}, \sqrt{2} \text{ s}^{-1}$)

14) Il vettore posizione di un punto materiale è $\vec{r}(t) = (at^2 + bt)\hat{i} + (ct + d)\hat{j} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$. Determinare l'equazione della traiettoria e fissare le 4 costanti sapendo che, all'istante $t = 0 \text{ s}$, $\vec{r}(0 \text{ s}) = 0 \text{ m}$, $\vec{v}(0 \text{ s}) = (1 \text{ m/s})\hat{i} + (3 \text{ m/s})\hat{j}$ e che

all'istante $t = 10\text{ s}$ vale $\vec{r}(10\text{ s}) \cdot \hat{i} = 5\text{ m}$. (R:

$$-\frac{1}{20}\text{ m/s}^2, 1\text{ m/s}, 3\text{ m/s}, 0\text{ m}, x = -\frac{y^2}{180\text{ m}} + \frac{y}{3})$$

1) Si consideri il vettore posizionale $\vec{r}(t) = (A \cos \omega t) \hat{i} + \left(\frac{A}{2} \sin \omega t\right) \hat{j}$;

si determini A sapendo che il raggio di curvatura della traiettoria all'istante $t = 0\text{ s}$ è $R = 1\text{ m}$. (R: $A = 4\text{ m}$)

Dinamica

- 1) Un proiettile viene lanciato da terra con un'inclinazione di 60° rispetto al suolo. Si calcoli la velocità di lancio, in modulo, affinché la gittata del proiettile sia 50 m . (R: 23.8 m/s)
-
- 2) Un corpo si trova fermo su un piano inclinato ad una quota $h = 2\text{ m}$ da terra. Se il piano è inclinato di 45° rispetto al suolo, in condizioni di attrito trascurabile, si calcoli il tempo necessario affinché il corpo arrivi a terra. Con che velocità, in modulo, arriva a terra? (R: 0.90 s , 6.26 m/s)
-
- 3) Un corpo di massa $M = 10\text{ Kg}$ si trova su un piano inclinato di 60° rispetto al suolo ed è sorretto da una molla di costante elastica $k = 20\text{ N/m}$, fissata a terra, che agisce sul corpo nella stessa direzione del piano. In condizioni di equilibrio di quanto è deformata la molla? (R: -4.25 m)
-
- 4) Il rapporto fra le masse appese ad una macchina di Atwood è $m_1 / m_2 = 5$. Si determini con che accelerazione si sposta il sistema e specificare se scende verso terra dalla parte di m_1 o dalla parte di m_2 . (R: $\frac{2}{3}g$)
-
- 5) Determinare la velocità angolare di un satellite lunare che ruota su un'orbita circolare a distanza $R = 10^4\text{ Km}$ dal centro della luna

(la massa della luna è $M_L \approx 7.35 \cdot 10^{22} \text{ Kg}$, $\gamma \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$).

(R: $7 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$)

6) Una molla disposta verticalmente cui è appeso un corpo di massa $M = 10 \text{ Kg}$ sulla terra è deformata di $\Delta l = 20 \text{ cm}$. Di quanto si deformerebbe la stessa molla, nelle stesse condizioni, sulla luna? ($M_L \approx 0.0123 M_T$ e $R_L \approx 1738 \text{ Km}$). (R: 0.033 m)

7) Su un piano inclinato di un angolo α rispetto al suolo è appoggiato un corpo di massa M . In presenza di attrito dinamico di coefficiente $\mu = 1/2$ il corpo scende verso terra con velocità costante. Quanto vale l'angolo α ? (R: 26.6°)

8) Un corpo di massa $M = 1 \text{ Kg}$ appoggiato ad un piano orizzontale in assenza di attrito è fissato ad un punto P sul piano tramite un cavo ideale di lunghezza $l = 2 \text{ m}$. Si determini la tensione del cavo se il corpo si muove di moto circolare uniforme intorno a P descrivendo un giro completo ogni $T = 0.5 \text{ s}$. (R: 316 N)

9) Una carrozza di un treno accelera con accelerazione costante $a_0 = 2 \text{ m/s}^2$. Si determini, in modulo, la risultante delle forze inerziali osservate nel sistema di riferimento solidale con il treno agenti su un corpo di massa $M = 5 \text{ Kg}$. (R: 10 N)

10) Un corpo di massa $M = 20 \text{ Kg}$ è appoggiato al suolo in presenza di attrito statico di coefficiente $f = 1/4$. Al corpo è applicata una forza esterna \vec{F}_e tramite un cavo ideale che agisce in una direzione che forma un angolo $\alpha = 30^\circ$ rispetto a terra. Si

determini il massimo di valore $\|\vec{F}_e\|$ compatibile con la condizione di equilibrio statico. (R: 49.5 N)

11) Un corpo di massa $M = 2 \text{ Kg}$ è sollevato su un piano inclinato di 30° rispetto al suolo applicando una forza parallela al piano di modulo $\|\vec{F}\|$. Sapendo che il corpo si muove con accelerazione in modulo pari a $\|\vec{a}\| = g/8$ parallelamente al piano, verso l'alto in presenza di attrito dinamico di coefficiente $\mu = 1/10$ si determini $\|\vec{F}\|$. (R: 14 N)

12) Un corpo di massa $M = 10 \text{ Kg}$ appoggiato ad un piano orizzontale in assenza di attrito è tirato da un cavo ideale che forma un angolo di 45° rispetto al suolo. Il cavo agisce con una tensione, in modulo, pari a $T = 10 \text{ N}$. Se il corpo parte da fermo, determinare la sua velocità dopo 10 m . (R: 3.8 m/s)
