# Fisica Generale LB

Prof. Mauro Villa

## Esercizi di elettrostatica nel vuoto

### A - Forza di Coulomb, campi elettrici

1. Calcolare la forza elettrostatica esercitata su di una carica $Q_3$, posta in mezzo ad altre due cariche puntiformi $Q_1$ e $Q_2$, sapendo che $Q_1 = 2.4 \cdot 10^{-5}$ C, $Q_2 = 1.6 \cdot 10^{-5}$ C, $Q_3 = 1.1 \cdot 10^{-6}$ C e che la distanza tra le cariche $Q_1$ e $Q_2$ vale 2 m.

2. Trovare il rapporto tra la forza elettrica e la forza gravitazionale che agiscono fra un protone ($q_p = +1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_p = 1.7 \cdot 10^{-27}$ kg) ed un elettrone ($q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg). Si ricordi che $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 kg^{-2}$.

3. Assumendo che un atomo di idrogeno possa essere descritto classicamente come una carica fissa positiva ed una negativa che percorre orbite circolari attorno a quella positiva, determinare: 1) se esiste un raggio minimo dell'orbita, 2) il modulo della velocità nel caso di orbite di raggio $R = 0.5 \cdot 10^{-10}$ m. Si ricordi che: $q_p = +1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_p = 1.7 \cdot 10^{-27}$ kg, $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ g

4. In un nucleo di Elio (2 protoni + 2 neutroni), i due protoni si trovano ad una distanza tipica di $d = 6 \cdot 10^{-15}$ m. Determinare la forza coulombiana che agisce tra i protoni e l'entità della forza forte che vincola i protoni a rimanere nel nucleo. Quanta massa è in grado di sollevare una forza di pari entità sulla superficie terrestre?

5. Una carica $Q = 2.2 \cdot 10^{-5}$ C è posta su ciascun vertice di un triangolo equilatero, di lato $L = 0.2$ m. Quale valore deve avere una carica $Q_c$ posta nel baricentro del triangolo affinché la forza esercitata su ognuna delle cariche sia nulla? La situazione che si crea è per definizione una situazione di equilibrio. Si tratta di equilibrio stabile, instabile o indifferente?

6. Due cariche di valore $Q_1 = -Q_2 = 0.3\ \mu C$ sono poste rispettivamente nelle posizioni $\vec{r}_1 = d/2\,\hat{k}$ e $\vec{r}_2 = -d/2\,\hat{k}$ con $d = 2\ m$. Determinare modulo, direzione e verso della forza complessiva che agisce su una carica di prova $q = 2\ nC$ posta in un punto arbitrario del piano $z = 0$ ( $\vec{r}_q = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$).

7. Una carica $q = 20\ nC$ è vincolata a muoversi lungo un asse (asse $x$) ed inizialmente posta in quiete nella posizione $\vec{r}_q = 5\,\hat{\imath}$. Sull'asse sono fissate rigidamente altre due cariche ($Q_1$ e $Q_2$), rispettivamente nelle posizioni $\vec{r}_1 = 2\,\hat{\imath}$ e $\vec{r}_2 = -4\,\hat{\imath}$. Se la carica $Q_1$ vale 6 $\mu C$, quanto deve valere $Q_2$ affinché la carica $q$ non sia soggetta a forze?

8. Quattro cariche di valore $Q_A = -Q_B = Q_C = -Q_D = 2\ \mu C$ sono poste ai vertici di un quadrato ABCD di lato $l = 0.1\ m$. Determinare 1) la forza agente su ogni carica; 2) il luogo dei punti dove una carica di prova $q$ non sente alcuna forza.

9. Una carica elettrica $Q_1$ di massa $m = 0.3\,kg$ è attaccata ad un capo di un filo inestensibile di lunghezza $l = 0.5\,m$ e massa trascurabile. Il capo opposto del filo è vincolato nell'origine di un sistema di coordinate avente l'asse z coincidente con la direzione verticale sulla superficie terrestre. Per l'azione di una carica $Q_2 = 0.4\ \mu C$ posta lungo l'asse z, il filo forma un'angolo $\theta = 30^o$ con la direzione verticale. Determinare il valore della carica $Q_1$ quando 1) la carica $Q_2$ è posta alla stessa quota della carica $Q_1$; 2) la carica $Q_2$ è posta nella posizione $\vec{r}_{Q_2} = -0.5\hat{k}$ m.

10. Due palloncini identici, riempiti di un gas più leggero dell'aria fluttuano in equilibrio sollevando una massa $m = 10g$ a loro attaccata tramite fili inestensibili. I palloncini sono stati caricati ciascuno con una certa carica $Q$. Determinarne il valore assumendo per semplicità che i palloncini possano essere trattati come cariche puntiformi e sapendo che la distanza tra i due palloncini è $d = 30\ cm$ e che la distanza palloncini-massa è $l = 1.5\ m$.

11. Calcolare il campo elettrico generato da un anello circolare di raggio $R$ caricato con carica $Q$ su di un punto $P$ posizionato su un asse perpendicolare al piano dell'anello e passante per il suo centro. Sia $h$ la distanza di $P$ dal centro dell'anello.

12. Calcolare il campo elettrico generato da un disco di raggio $R$ caricato con carica $Q$ su di un punto $P$ posizionato sull'asse del disco ad altezza $h$ dal centro del disco.

13. Si consideri un triangolo rettangolo isoscele, di lato minimo $L$, e si supponga che una carica $Q > 0$ sia posta nell'estremità sinistra e una carica $Q'$ nell'estremità destra dell'ipotenusa di tale triangolo. Si supponga inoltre che $Q'$ possa essere fatta variare tra $-Q$ e $+Q$. Determinare: 1) il campo elettrico $\vec{E}$ nel vertice del triangolo opposto all'ipotenusa, 2) per quale valore di $Q'$ il modulo del campo nel vertice è minimo e la corrispondente direzione del campo $\vec{E}$.

14. Nell'istante $t = 0\,s$, una particella di massa $m$ e carica $q$ viene proiettata orizzontalmente in un campo elettrico diretto verso l'alto con una

velocità iniziale $v_0$. Determinare 1) la traiettoria della particella, 2) quando la velocità della particella forma un angolo di $45^o$ rispetto alla sua direzione iniziale. Si trascuri la gravità.

15. Due fili rettilinei infinitamente lunghi sono disposti parallelamente ad una distanza $d$. Supponendo che siano abbiano una densità lineare di carica costante data rispettivamente da $\lambda_1$ e $\lambda_2$, determinare la forza per unità di lunghezza dei fili che si esercita tra i fili.

## B - Dipoli elettrici

1. Ad un dipolo che ha il centro nell'origine delle coordinate ed è orientato lungo l'asse $y$, per cui $\vec{p} = p\hat{\jmath}$, viene applicato un campo esterno $\vec{E} = (E_0 y/2a)\,\hat{\jmath}$, dove $2a$ è la distanza tra le cariche del dipolo. Determinare la forza che agisce sul dipolo. Dimostrare che per qualunque campo arbitrario $\vec{E}$ diretto lungo l'asse y, la forza che agisce sul dipolo è data da: $\vec{F} = p(\partial\vec{E}/\partial y)$

2. Dato un dipolo elettrico $\vec{p}$ ed un campo elettrico $\vec{E}$, dimostrare che il momento della forza agente sul dipolo è dato da $\vec{M} = \vec{p}\wedge\vec{E}$, se si assume che $\vec{E}$ sia approssimativamente uguale sulle due cariche del dipolo. In questa approssimazione, è rilevante il centro di riduzione $O$ rispetto al quale si calcola il momento $M$? Motivare la risposta.

## C - Complementi di analisi vettoriale

1. Calcolare le seguenti divergenze: $\operatorname{div}\vec{r} = \vec{\nabla}\cdot\vec{r}$, $\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}/r)$, $\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}/r^3)$, $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\omega}\wedge\vec{r})$, $\vec{\nabla}\cdot[\vec{A}\wedge(\vec{r}\wedge\vec{B})]$, con $\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ e $\vec{\omega}$, $\vec{A}$, $\vec{B}$ vettori costanti.

2. Calcolare i seguenti gradienti: $\operatorname{grad}(\vec{A}\cdot\vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{r})$, $\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{r})$, $\vec{\nabla}1/r$, $\vec{\nabla}[\vec{A}\cdot(\vec{r}\wedge\vec{B})]$ con $\vec{A}$ e , $\vec{B}$ vettori costanti.

3. Calcolare i seguenti rotori: $\operatorname{rot}\vec{r} = \vec{\nabla}\wedge\vec{r}$, $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r})$, $\vec{\nabla}\wedge(\vec{r}/r^3)$, con $\vec{\omega}$ e $\vec{A}$ vettori costanti.

4. Verificare le seguenti identità vettoriali: $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\phi) = \vec{0}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{v} = 0$ con $\phi$ arbitraria funzione scalare del vettore $\vec{r}$ e $\vec{v}$ arbitrario campo vettoriale.

## D - Flusso del campo elettrico e legge di Gauss

1. Sia dato il campo elettrico $\vec{E} = \alpha(4x\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + y\hat{k}$. Determinare il flusso del campo sul quadrato di lato L di vertici ABCD, con $\vec{r}_A = \vec{0}$, $\vec{r}_B = L\hat{\imath}$, $\vec{r}_C = L\hat{\imath} + L\hat{\jmath}$, $\vec{r}_D = L\hat{\jmath}$. Determinare il flusso di $\vec{E}$ uscente dal cubo di vertici ABCDA'B'C'D' con $\vec{r}_{X'} = \vec{r}_X + L\hat{k}$.

2. È noto che intersecando una sfera con un piano si ottiene un cerchio. Se il raggio del cerchio così ottenuto sottende un angolo $\theta$ rispetto al centro della sfera, che angolo solido sottende l'area del cerchio-intersezione rispetto al centro della sfera?

3. Una sfera di raggio $R = 0.2\ m$ ha una distribuzione volumetrica di carica tale da creare un campo elettrico $\vec{E}$ simmetrico rispetto al centro della sfera. Supponendo che in un punto generico P interno alla sfera, il campo sia proporzionale alla distanza tra P e il centro della sfera, determinare: 1) la densità volumetrica $\rho(\vec{r})$, 2) la carica totale, 3) il campo $\vec{E}$ nello spazio esterno alla sfera, sapendo che sulla superficie della sfera $\vec{E}$ è diretto verso il centro della sfera ed il suo modulo vale $2\ N/C$.

4. Sia dato un campo elettrico $\vec{E} = Ar^2\,\vec{r}$ nella regione di spazio $|\vec{r}| \leq R$, con A costante. Assumendo che vi sia il vuoto nella regione $|\vec{r}| > R$, determinare : 1) la densità di carica $\rho(\vec{r})$ in tutto lo spazio, 2) il campo elettrico per $|\vec{r}| > R$.

5. Considerata una carica $Q$ distribuita uniformemente su una sfera di raggio $R$, determinare il campo in un punto $P$ posto ad una distanza $r$ dal centro della sfera, quando 1) $r > R$, 2) $r < R$.

6. Una piastra infinita di spessore $L$ è posta nello spazio con le faccie date dalle coordinate $x = 0$ e $x = L$ determinare il campo elettrico in tutto lo spazio sapendo che la densità volumetrica di carica vale $\rho(\vec{r}) = Ax^2$ per $0 < x < L$ e 0 altrimenti. Suggerimenti: si utilizzi prima la forma differenziale, poi quella integrale di Gauss e si osservi la simmetria del problema quando $|x| >> L$.

7. Dire se in una regione priva di cariche può esistere un campo elettrico dato da $\vec{E} = (x^2 + y^2)^{-2}[2xy\hat{\imath} + (y^2 - x^2)\hat{\jmath}]$.

8. Su una piastra quadrata di lato $L = 1$m e spessore trascurabile, viene posta una carica $Q = 2\,\mu C$. Assumendo che la carica si distribuisca uniformemente sulla superficie, quanto vale il campo elettrico in prossimità del centro del quadrato ad una distanza $d = 1\,cm$ dalla superficie della piastra? Suggerimenti: si sfrutti il fatto che $d \ll L$.

9. Una sfera di raggio $R = 0.1$ m ha una densità di carica data da $\rho(\vec{r}) = a(1 - (r/R)^2)$, con $a = 2\ mC/\text{m}^3$ per $0 < r < R$ e da $\rho(\vec{r}) = 0$ per $r = |\vec{r}| > R$. Determinare il campo elettrico in tutto lo spazio.

## E - Potenziali

1. Una carica puntiforme $Q = -5\ \mu C$ viene tenuta ferma in una certa posizione mentre una seconda carica $q = 2\ \mu C$ viene spostata da un

punto $P_1$ a distanza $r_1 = 0.4\ m$ ad un punto $P_2$ a distanza $r_2 = 0.8\ m$ dalla carica $Q$. Determinare: 1) la d.d.p. $\Delta V$ tra i punti $P_1$ e $P_2$; 2) il lavoro $\mathcal{L}$ compiuto contro la forza elettrica nello spostamento della carica $q$. Dal punto di vista energetico, dove si ritrova tale lavoro?

2. Due particelle con cariche $Q_1 = 5\ \mu C$ e $Q_2 = 0.3\ \mu C$ e masse $M_1 = 0.5\ kg$ e $M_2$ rispettivamente, interagiscono solo tra loro ed ad un certo istante si trovano in quiete nel vuoto ad una distanza relativa $d = 0.5\,m$. Si calcolino le velocità relative delle due particelle quando la distanza relativa è $2d$, nei seguenti casi: 1) $M_2 \gg M_1$; 2) $M_2 = M_1$; 3) $M_2 \ll M_1$.

3. Una sfera di raggio $R = 0.1$ m ha una densità di carica data da $\rho(\vec{r}) = a(1-(r/R)^2)$, con $a = 2\ mC/\mathrm{m}^3$ per $0 < r < R$ e da $\rho(\vec{r}) = 0$ per $r = |\vec{r}| > R$. Determinare il potenziale in tutto lo spazio ponendo $V(\infty) = 0$. Suggerimenti: si sfrutti la simmetria radiale del problema.

4. Determinare 1) il potenziale di una linea avente una densità lineare di carica $\lambda$ costante, 2) il potenziale di un cilindro conduttore di raggio $R$, lunghezza infinita e densità volumetrica di carica $\rho$ costante.

5. Determinare la distribuzione di carica che genera nello spazio il potenziale $V(\vec{r}) = A/r^3$.

6. Determinare la distribuzione di carica che genera nello spazio il potenziale $V(\vec{r}) = A \exp(-\lambda\, r)/r$, con $A$ e $\lambda$ costanti.

7. Due cariche $+q$ e $-q$, inizialmente poste nell'origine delle coordinate, vengono spostate ad opera di un campo esterno $\vec{E}$. Si origina così un dipolo elettrico $\vec{p}$. Dimostrare che l'energia potenziale dovuta al campo esterno è pari a $U_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.