Esercizi con campi magnetici statici

Il problema più generale è il calcolo del campo magnetico generato da uno o più fili percorsi da corrente. In linea di principio, questo tipo di problema dovrebbe essere risolto facendo uso della formula di Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{i d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

dove l'integrale va esteso a tutto il circuito percorso da corrente. All'atto pratico, l'esercizio tipico prevede il calcolo del campo magnetico solo per configurazioni particolari (filo infinito; tratto di filo rettilineo; arco di cerchio) per i quali l'integrale di Biot-Savart è facilmente risolvibile e la cui soluzione si trova sui libri di testo. In questi casi, la cosa importante, come nel caso degli esercizi relativi al calcolo del campo elettrico, è solo quella di ricordarsi che si tratta di un campo **vettoriale**, e quindi nel caso si debbano sommare campi prodotti da più circuiti bisogna fare attenzione a come si esegue la somma.

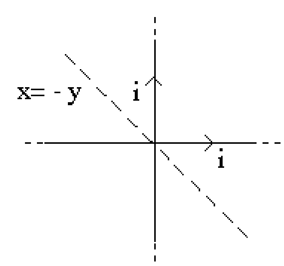
Esercizi preliminari

1. Esercizi che richiedano di eseguire prodotti vettoriali (GEOMETRIA, FISICA 1)
2. Esercizi che rendano chiaro il concetto di campo (ad esempio, tramite diversi modi di visualizzazione)
3. Esercizi che consentano di familiarizzare col concetto di "somma di campi vettoriali"

Esempi tratti da esercizi di esame

Esame 20/9/2002

Due fili metallici percorsi da corrente di intensità i, sono disposti su un piano, formando un angolo di 90°. Scegliendo come assi cartesiani x e y le due direzioni individuate dai due fili, si chiede quanto vale il campo magnetico sulla linea $x = -y$ ed il suo modulo lungo l'asse z.



SOLUZIONE:

Il campo magnetico generato da un filo percorso da corrente è in modulo $B = \mu_0 i / 2\pi r$ (dove r è la distanza dal filo) e in direzione e verso è determinato dalla regola della vite (o della mano destra). Consideriamo le due rette (x = -y e l'asse z) separatamente.

1. **Retta x=-y**
   La retta x = -y giace sul piano definito dai due fili. Usando la regola della mano destra, si ottiene che il campo generato da entrambi i fili è perpendicolare al piano individuato dai due fili in ogni punto del piano stesso. Il campo B_1 generato dal primo filo (quello lungo l'asse x) è uscente dal foglio per $y > 0$ e entrante nel foglio per $y < 0$, mentre il campo B_2 generato dal secondo filo (quello lungo l'asse y) è uscente dal foglio per $x < 0$ e entrante nel foglio per $x > 0$. I due campi sono quindi entrambi uscenti dal foglio per $x < 0, y > 0$, ed entrambi entranti per $x > 0, y < 0$. I campi si sommano quindi scalarmente in entrambi i casi:

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{|y|} + \frac{1}{|x|}\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{|x| + |y|}{|xy|}$$

   in cui si è usato il fatto che la distanza del punto dall'asse x è $|y|$ e la distanza dall'asse y è $|x|$. Essendo poi x = -y, e quindi $|x| = |y|$, si può anche scrivere

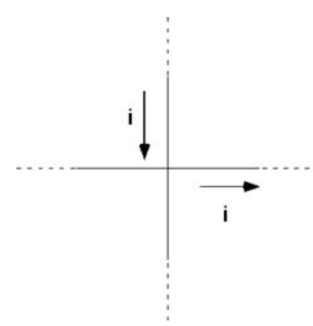
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{|x| + |x|}{x^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{2}{|x|} = \frac{\mu_0 i}{\pi|x|}$$

2. **Asse z**
   Lungo l'asse z, B_1 sarà diretto lungo l'asse y (verso le y negative per $z > 0$ e verso le y positive per $z < 0$), mentre B_2 sarà diretto lungo l'asse x (verso le x positive per $z > 0$ e verso le x negative per $z < 0$). In entrambi i casi, i moduli di B_1 e B_2 sono uguali (la distanza fra un punto lungo l'asse z e l'asse x è sempre uguale alla distanza dello stesso punto dall'asse y, ed in entrambi i casi uguale a z), ma B_1 è ortogonale a B_2. Serve quindi una somma vettoriale fra i due, ed in particolare, essendo i due campi sempre ortogonali fra loro

$$|B| = |B_1 + B_2| = \sqrt{|B_1|^2 + |B_2|^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\sqrt{1/z^2 + 1/z^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\mu_0 i}{\pi|z|}$$

Esame 20/9/2004

Due fili infiniti sono percorsi da una identica corrente i che scorre nel verso indicato in figura. Scegliendo come assi cartesiani x e y quelli corrispondenti ai due fili, scrivere l'espressione di $\vec{B}$ (modulo, direzione e verso) per i punti del piano {x,y}. In quali punti si ha $|\vec{B}| = 0$?



SOLUZIONE:

Il campo magnetico generato da un filo infinito percorso da una corrente i è dato (in modulo) dall'espressione

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

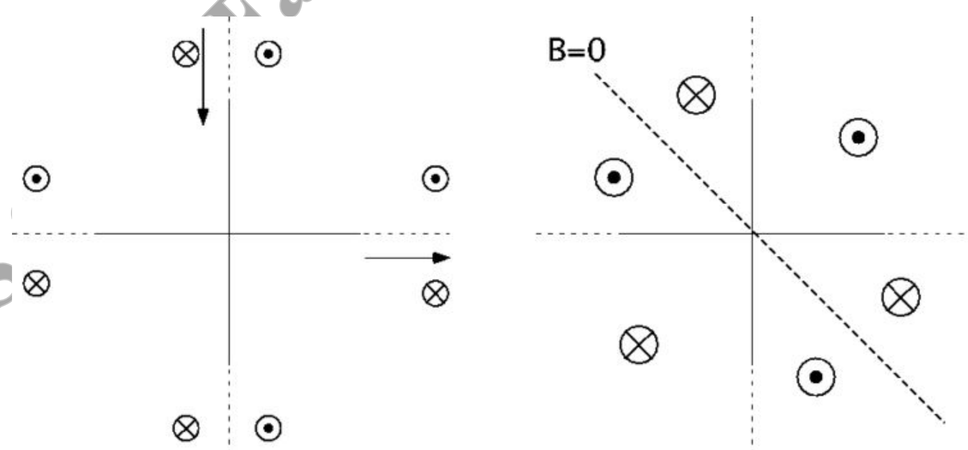
dove r è la distanza dal filo. Il campo è orientato perpendicolarmente al filo e segue la regola della mano destra. Il filo lungo l'asse x produce quindi, in un punto generico di coordinate $\{x, y\}$ un campo di modulo $B_1(x, y) = \mu_0 i/2\pi|y|$ uscente dal foglio per $y > 0$ e entrante per $y < 0$. D'altra parte, il filo lungo l'asse y produce un campo di modulo $B_2(x, y) = \mu_0 i / 2\pi|x|$, uscente per $x > 0$ ed entrante per $x < 0$. Il campo totale, dato dalla somma vettoriale dei due campi ora trovati, sarà quindi dato da

$$|\vec{B}| = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}\right)$$

nei punti in cui i campi B_1 e B_2 sono concordi (ovvero nel primo e terzo quadrante) e da

$$|\vec{B}| = |B_1 - B_2| = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left|\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|y|}\right|$$

nei punti in cui i due cami sono discordi (ovvero nel secondo e quarto quadrante). Il campo $\vec{B}$ sarà sempre diretto lungo l'asse perpendicolare al piano, ed il suo verso sarà uscente nel primo quadrante ed entrante nel terzo, essendo in questi due casi dato dalla somma di due vettori entrambi entranti o uscenti. Nel secondo e quarto quadrante, il campo sarà entrante o uscente a seconda di quale dei due campi prevale. In particolare, lungo la retta $x = -y$ si ha $|x| = |y|$ e quindi $|\vec{B}| = 0$

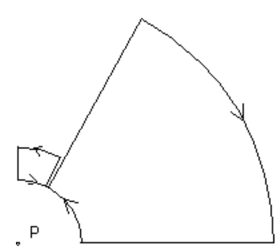


Versi dei campi (entranti/uscenti) generati dai due fili

Verso (entrante/uscente) del campo complessivo

Esame 17/12/2001

Si calcoli il campo magnetico generato dai due circuiti in figura nel punto P, centro di tutti gli archi di cerchio di cui sono composti i due circuiti. Calcolare il rapporto fra le due correnti circolanti nei due circuiti tale che tale campo magnetico sia nullo. Dati: $R_1 = 10cm$; $R_2 = 15cm$; $R_3 = 30cm$; $\theta_1 = 30°$; $\theta_2 = 60°$



SOLUZIONE:

Il campo magnetico generato dal primo circuito (nel quale la corrente scorre in senso antiorario) nel punto P è entrante nel foglio e pari a

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi}\theta_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

(nei due tratti rettilinei $d\vec{l} || \hat{r} \to d\vec{l} \wedge \hat{r} = 0 \to B = 0$, mentre nei tratti curvlinei $|\vec{r}| = cost. \to B = \mu_0/(4\pi r^2) \int idl = \mu_0/(4\pi r^2) ir\theta = \mu_0 i\theta/(4\pi r)$). Analogamente, per il secondo circuito

$$B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi}\theta_2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}\right)$$

ma in questo caso il campo risulta essere uscente. Imponendo che complessivamente $B = 0$

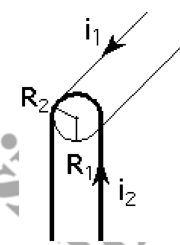
$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(i_1\theta_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) - i_2\theta_2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}\right)\right) = 0$$

ovvero

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\theta_2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}\right)}{\theta_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = 4$$

Esame 20/1/2003 (scritto A)

Due fili infiniti percorsi da corrente $i_1 = i_2 = 1.0A$ sono sagomati come in figura (le frecce indicano la direzione in cui scorre la corrente nei due circuiti), con $R_1 = R_2 = 1.0cm$. I due fili giacciono sullo stesso piano. Calcolare il campo magnetico nel punto O, centro di entrambi i semicerchi formati dai due fili. Come cambierebbe il risultato se si invertisse il verso di una delle due correnti, lasciando inalterata l'altra?



SOLUZIONE:

Il campo magnetico generato nel punto O sarà dato dalla somma dei campi magnetici generati dai due fili, che a sua volta sono, per ciascun filo, la somma dei campi generati dai tratti rettilinei semi infiniti e del tratto semicircolare. Per quanto riguarda il primo filo, applicando la regola della mano destra si ottiene che sia il campo generato dai due tratti rettilinei, sia il campo generato dal tratto semicircolare sono perpendicolari al foglio e uscenti da esso. Il campo complessivamente generato dal primo filo è quindi

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi R_1} + \frac{\mu_0 i_1}{4R_1} + \frac{\mu_0 i_1}{4\pi R_1} = 5.1 \times 10^{-5}T = 51\mu T$$

Per quanto riguarda il secondo filo, anch'esso produce un campo uscente, ed essendo $i_1 = i_2$ e $R_1 = R_2$, si ha di nuovo

$$B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi R_2} + \frac{\mu_0 i_2}{4R_2} + \frac{\mu_0 i_2}{4\pi R_2} = 51\mu T$$

da cui infine

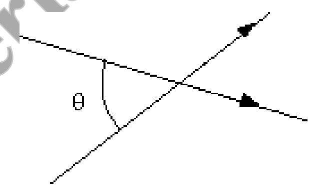
$$B_{TOT} = B_1 + B_2 = 102\mu T$$

Invertendo il segno di i_1, il campo magnetico prodotto dal primo filo sarebbe rimasto uguale in modulo, ma sarebbe cambiato di segno (sarebbe stato entrante anzichè uscente). Il campo magnetico complessivo sarebbe allora stato

$$B_{TOT} = B_1 + B_2 = -51\mu T + 51\mu T = 0$$

Esame 20/1/2003 (scritto B)

Due fili infiniti percorsi da corrente $i_1 = i_2 = 1.0A$ giacciono sullo stesso piano formando un angolo θ fra di loro. Posto un sistema di assi cartesiani con origine nel punto in cui i due fili si incrociano, e gli assi {x,y} nel piano individuato dai due fili, descrivere come varia il valore del modulo del campo magnetico $\vec{B}$ nel punto {0,0,d}, con $d = 1cm$, al variare dell'angolo θ. Quali sono i valori massimo e minimo di $|B|$ che si possono ottenere variando θ?



SOLUZIONE:

Il campo magnetico nel punto indicato sarà pari alla somma dei campi magnetici generati dai due fili. Essendo $i_1 = i_2$, i moduli dei campi generati dai due fili saranno necessariamente uguali:

$$|\vec{B_1}| = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} = |\vec{B_2}| = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d} = 5.0\mu T$$

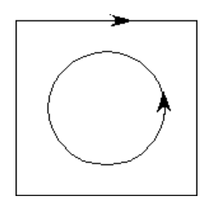
Le direzioni di $\vec{B_1}$ e $\vec{B_1}$ sono tuttavia diverse, dato che il campo prodotto da un filo giace sempre nel piano ad esso perpendicolare. In questo caso, i vettori $\vec{B_1}$ e $\vec{B_1}$ gisceranno sempre nel piano perpendicolare all'asse z, formando fra di loro un angolo pari all' angolo θ fra i due fili. Sfruttando la relazione trigonometrica $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|cos\theta$ e considerando che $|\vec{B_1}| = |\vec{B_2}|$ si ottiene infine

$$|\vec{B_{TOT}}| = |\vec{B_1} + \vec{B_2}| = \sqrt{|\vec{B_1}|^2 + |\vec{B_2}|^2 + 2|\vec{B_1}||\vec{B_2}|cos\theta} = |\vec{B_1}|\sqrt{2(1 + cos\theta)}$$

i cui valori minimo e massimo si ottengono rispettivamente per $\theta = \pi$ ($\rightarrow cos\theta = -1$ e $|\vec{B_{TOT}}| = 0$) e per $\theta = 0$ ($\rightarrow cos\theta = 1$ e $|\vec{B_{TOT}}| = 2B_1 = 10\mu T$).
I due valori minimo e massimo corrispondono ai casi in cui i due fili sono antiparalleli (e quindi i campi magnetici generati dai due fili si annullano vicendevolmente) e al caso in cui i due fili sono paralleli (e quindi i due campi si sommano scalarmente, essendo anch'essi paralleli).

Esame 22/7/2003

Siano dati un anello di raggio R ed un quadrato di lato a percorsi da una medesima corrente i, che scorre in senso orario nel quadrato ed in senso antiorario nell'anello. Quanto deve essere il rapporto fra R ed a perché il campo magnetico al centro dell'anello e del quadrato, coincidenti fra loro, sia nullo? Come sarà diretto il campo lungo l'asse comune a quadrato ed anello? Con il rapporto fra raggio dell'anello e lato del quadrato trovato in precedenza, il campo magnetico è nullo anche su tutto l'asse comune ad anello e quadrato? Perchè?



SOLUZIONE:

Il campo magnetico generato da un quadrato al centro del medesimo vale

$$B_{quad} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi a}$$

ed è diretto perpendicolarmente al piano identificato dal quadrato. (si ottiene considerando che il campo magnetico generato da un filo di lunghezza L, lungo il suo asse ed ad una distanza R dal filo vale

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^2+4R^2}}$$

e considerando che il campo generato da un quadrato, nel suo centro, è pari a 4 volte il campo generato da uno dei 4 lati). D'altra parte, il campo generato da un anello percorso da corrente, nel suo centro, vale

$$B_{an} = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

anch'esso perpendicolare al piano identificato dall'anello. Affinchè il campo al centro del quadrato e dell'anello sia nullo, i due campi (quello generato dall'anello e quello generato dal quadrato) devono essere uguali e opposti. Dato che le due correnti scorrono in senso inverso, i de campi sono sicuramente diretti in senso contrario l'uno all'altro. Per avere campo nullo, quindi, i due moduli devono essere uguali:

$$\frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi a} = \frac{\mu_0 i}{2R} \rightarrow \frac{a}{R} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} = 1.8$$

Per quanto riguarda gli altri punti dell'asse, il campo è sempre diretto lungo l'asse medesimo, sia per il quadrato che per l'anello, per ragioni di simmetria. Essendo le due correnti circolanti in senso opposto l'una all'altra, lungo tutto l'asse i due campi sono diretti in verso opposto. Tuttavia, il modulo del campo generato da un anello non varia in funzione della distanza sull'asse allo stesso modo del campo generato dal quadrato. In particolare, si può dimostrare che

$$B_{quad}(z) = 4\frac{\mu_0 i}{\pi}\frac{a^2}{(a^2+4z^2)\sqrt{2a^2+4z^2}}$$

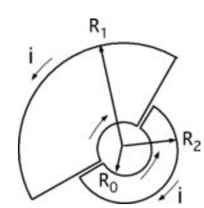
mentre per un anello

$$B_{an}(z) = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Anche fissando un opportuno rapporto fra R ed a, non sarà quindi in generale possibile avere $|B_{TOT}| = |B_{an} + B_{quad}| = |B_{an}| - |B_{quad}| = 0$ per qualunque valore di z

Esame 21/1/2004 (scritto A)

I due circuiti in figura sono percorsi dalla stessa corrente i, uno in senso orario e l'altro in senso antiorario. Sapendo che $R_1 = 2R_2$ e $R_2 = 2R_0$, si chiede quanto devono valere gli angoli Φ_1 e Φ_2 affinchè il campo magnetico si annulli nel punto P.



SOLUZIONE:

Il campo magnetico generato dal primo circuito nel punto P è uscente e vale in modulo

$$B_1(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{\Phi_1}{R_0} - \frac{\Phi_1}{R_1}\right)$$

mentre il campo generato dal secondo circuito in P è entrante e vale in modulo

$$B_2(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{\Phi_2}{R_0} - \frac{\Phi_2}{R_2}\right)$$

Per ottenere $B(P) = 0$ deve quindi essere $B_1 = B_2$ e quindi

$$\frac{\Phi_1}{R_0} - \frac{\Phi_1}{R_1} = \frac{\Phi_2}{R_0} - \frac{\Phi_2}{R_2}$$

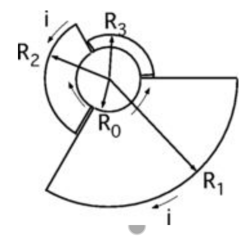
Tenendo presente che $R_2 = 2R_0$ e $R_1 = 2R_2 = 4R_0$, e che $\Phi_1 + \Phi_2 = 2\pi$ si ottiene

$$\begin{aligned} \Phi_1(1 - 1/4) &= \Phi_2(1 - 1/2) \\ \Phi_1 + \Phi_2 &= 2\pi \end{aligned}$$

da cui infine si ottiene $\Phi_1 = 4/5\pi$ e $\Phi_2 = 6/5$

Esame 21/1/2004 (scritto B)

I circuiti 1 e 2 in figura sono percorsi dalla stessa corrente i, uno in senso orario e l'altro in senso antiorario. Anche il terzo circuito è percorso dalla medesima corrente. Sapendo che $R_1 = 3R_3$ e $R_2 = 2R_3$, si chiede in che direzione (oraria o antioraria) deve scorrere la corrente nel terzo circuito e quanto deve valere il rapporto R_3/R_0 affinchè il campo magnetico si annulli nel punto P.



SOLUZIONE:

Il campo magnetico generato dal primo circuito nel punto P è uscente e vale in modulo

$$B_1(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{\Phi_1}{R_0} - \frac{\Phi_1}{R_1}\right)$$

mentre il campo generato dal secondo circuito in P è entrante e vale in modulo

$$B_2(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{\Phi_2}{R_0} - \frac{\Phi_2}{R_2}\right)$$

Tenendo presente che $R_2 = 2R_3$ e $R_1 = 3R_3$ e che $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 2/3\pi$, il campo in P generato dai due circuiti 1 e 2 è anch'esso uscente e vale

$$B_1(P) + B_2(P) = \frac{\mu_0 i}{6}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{\mu_0 i}{6R_3}(1/2 - 1/3) = \frac{\mu_0 i}{36R_3}$$

Per avere $B(P) = B_1(P) + B_2(P) + B_3(P) = 0$ deve quindi essere $B_3 = \frac{\mu_0 i}{36R_3}$, entrante. La corrente i deve quindi circolare in senso antiorario nel terzo circuito ed inoltre

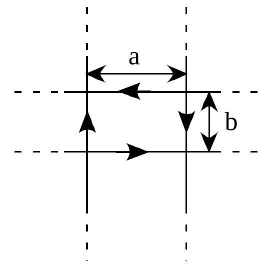
$$B_3(P) = \frac{\mu_0 i}{6}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_3}\right) = \frac{\mu_0 i}{36R_3}$$

da cui

$$\frac{1}{6R_3}\left(\frac{R_3}{R_0} - 1\right) = \frac{1}{36R_3} \rightarrow \frac{R_3}{R_0} - 1 = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{R_3}{R_0} = \frac{7}{6}$$

Esame 1/2/2005

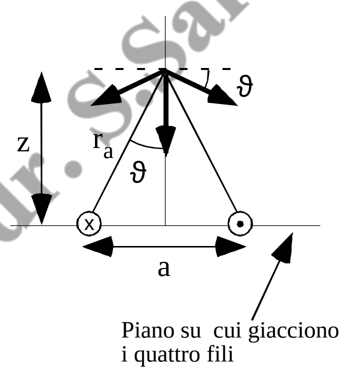
Quattro fili infiniti percorsi da una corrente i sono disposti su un piano come indicato in figura, dove sono anche indicati i versi di percorrenza delle correnti. Calcolare il valore di $\vec{B}$ in modulo, direzione e verso nei vari punti della retta perpendicolare al piano della figura, passante per il centro del rettangolo. Come si semplifica l'espressione di B per $z \gg a, b$?



SOLUZIONE:
Il campo magnetico generato da un filo percorso da corrente vale in modulo

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

(dove r è la distanza dal filo) ed è diretto lungo circonferenze perpendicolari al filo, secondo la regola della mano destra. Considerando dapprima i due fili a distanza a si ottiene quindi la situazione raffigurata:



Le componenti parallele al piano in cui giacciono i quattro fili si annullano quindi per simmetria, mentre le due componenti perpendicolari si sommano. Ponendo l' asse z perpendicolare al piano in cui giacciono i quattro fili, con l'origine nel centro del rettangolo si ha quindi:

$$B_z = -2\frac{\mu_0 i}{2\pi r_a}\sin\vartheta = -\frac{\mu_0 i}{\pi r_a}\frac{a}{2r_a} = -\frac{\mu_0 i a}{2\pi r_a^2}$$

dove $r_a^2 = z^2 + (a/2)^2$. Per i due fili distanti b uno dall'altro vale un analogo discorso, tranne che in questo caso il campo risulta diretto verso l'alto, e al posto di r_a si trova $r_b = z^2 + (b/2)^2$.

Complessivamente, il campo magnetico è diretto lungo l'asse z ed il suo modulo è dato dalla somma delle componenti z dei due campi generati dalle due coppie di fili:

$$B_{z,tot} = -\frac{\mu_0 i a}{2\pi r_a^2} + \frac{\mu_0 i b}{2\pi r_b^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{b}{z^2 + (b/2)^2} - \frac{a}{z^2 + (a/2)^2}\right)$$

Per grandi valori di z ($z \gg a, b$), l'espressione di B si semplifica:

$$B_{z,tot} \simeq \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{b}{z^2} - \frac{a}{z^2}\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi z^2}(b - a)$$