Esercizi relativi alla legge di Faraday-Lenz

La legge di Faraday-Lenz permette di associare d una generica variazione di flusso magnetico una forza elettromotrice indotta tramite la relazione

$$f_{e.m.} = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\Sigma'} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

dove Σ' è una superficie aperta il cui bordo coincida con il circuito su cui si sviluppa la $f_{e.m.}$. In generale quindi, per calcolare quest'ultima, è necessario per prima cosa calcolare il flusso di $\vec{B}$ attraverso Σ', e poi valutarne le variazioni col tempo. Se poi viene richiesta la direzione della corrente indotta, conviene far uso della legge di Lenz, per la quale il campo magnetico generato dalla corrente indotta deve opporsi alle **variazioni** del campo magnetico che l'hanno generata. Una volta trovata la corrente indotta, infine, facendo uso delle espressioni che descrivono la forza cui sono soggetti fili percorsi da corrente quando sono in presenza di un campo magnetico, è possibile calcolare la forza cui sono soggetti i circuiti in presenza di un campo magnetico variabile, o anche i circuiti in moto in presenza di un campo magnetico non uniforme.

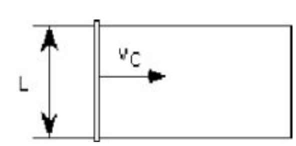
Esercizi preliminari

- Esercizi che richiedano di eseguire calcolo di flussi di campi vettoriali
- Esercizi relativi alle forze magnetiche agenti su fili percorsi da corrente

Esempi tratti da esercizi di esame

Esame 5/12/2001 (scritto A)

Una sbarretta di lunghezza $L = 1m$ e massa $m = 0.5kg$ viene lanciata con una velocità iniziale v_0 lungo due binari in una regione di spazio dove è presente un campo magnetico $B = 1T$ perpendicolare al piano individuato dai binari. I due binari sono uniti al loro termine in modo da formare un circuito chiuso. Dopo quanto tempo la velocità della sbarretta sarà ridotta alla metá della velocitá iniziale? Si trascuri la resistenza dei binari, e sia $R = 10\Omega$ la resistenza della sbarretta.



SOLUZIONE:

La sbarretta, muovendosi, produrra' una variazione di flusso del campo magnetico nel circuito pari a

$$\frac{d\Phi(B)}{dt} \;=\; B\frac{dS}{dt} = BLv$$

Questo a sua volta produrrà una corrente nel circuito pari a

$$i = f_{em}/R \;\; = \;\; BLv/R$$

e quindi la sbarretta sarà soggetta ad una forza

$$F = iLB = \frac{(LB)^2}{R} v$$

che, per la legge di Lenz, si opporrà al moto della medesima. L'equazione del moto per la sbaretta sarà quindi

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = -\frac{(LB)^2}{R} v$$

Da cui

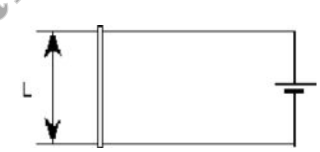
$$v(t) = v_0 e^{-\frac{(LB)^2}{Rm} t}$$

il tempo $\bar{t}$ per cui $v(\bar{t}) = v_0/2$ si ottiene quindi da $e^{-\frac{(LB)^2}{Rm}\bar{t}} = 1/2$, ovvero

$$\bar{t} = \frac{Rm}{(LB)^2} ln2 = 3.47s$$

Esame 5/12/2001 (scritto B)

Una sbarretta di lunghezza $L = 1m$ e massa $m = 0.5kg$ è appogiata su due binari (su cui può scorrere senza attrito) in una regione di spazio dove è presente un campo magnetico $B = 1T$ perpendicolare al piano individuato dai binari. I due binari sono uniti al loro termine in modo da formare un circuito chiuso tramite una batteria di $f_{em} = 12V$. Dopo quanto tempo la velocità della sbarretta sarà di 6 m/s? Si trascuri la resistenza dei binari, e sia $R = 10\Omega$ la resistenza della sbarretta.



SOLUZIONE:

A causa della presenza del generatore, nella sbarretta scorrerà una corrente $i = V/R = 1.2A$. Essendo la sbarretta immersa in un campo magnetico, sarà soggetta ad una forza $F = iLB = VLB/R$. Tuttavia, a causa del moto della sbarretta, il flusso di B concatenato al circuito varierà secondo la legge

$$\frac{d\Phi(B)}{dt} \;\; = \;\; B\frac{dS}{dt} = BLv$$

Questo a sua volta produrrà una forza elettromotrice nel circuito che si opporrà, per la legge di Lenz, alla forza elettromotrice del generatore. L'equazione del circuito sarà allora

$$iR = V - \frac{d\Phi(B)}{dt} = V - BLv \rightarrow i = \frac{V - BLv}{R}$$

Ricordando l'espressione della forza sul filo percorso da corrente in presenza di campo magnetico, si ottiene infine

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = \frac{V - BLv}{R}BL = \frac{VBL}{R} - \frac{(BL)^2}{R}v$$

Chiamando $\alpha = \frac{VBL}{mR}$ e $\beta = \frac{(BL)^2}{mR}$ l'equazione precedente diventa

$$\frac{dv}{dt} = \alpha - \beta v$$

che ha come soluzione

$$v(t) = \alpha/\beta(1 - e^{-\beta t}) = \frac{V}{BL}(1 - e^{-\frac{(BL)^2}{mR}t})$$

Per ottenere il tempo per il quale $v(\bar{t}) = \bar{v} = 6m/s$ si deve quindi risolvere l'equazione

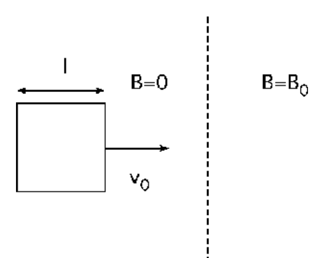
$$\frac{V}{BL}(1 - e^{-\frac{(BL)^2}{mR}\bar{t}}) = \bar{v}$$

che ha come soluzione

$$\bar{t} = -\frac{mR}{(BL)^2}ln\left(1 - \frac{BL\bar{v}}{V}\right) = 3.47s$$

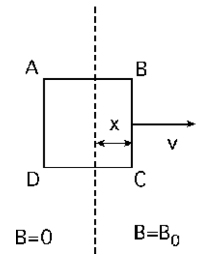
Esame 10/9/2003

Una spira quadrata di lato l e resistenza complessiva R viene lanciata su un piano orizzontale privo di attrito con velocità iniziale v_0. Ad un certo punto, la spira entra in una zona dove è presente un campo magnetico B perpendicolare al piano. Descrivere qualitativamente il moto della spira. Calcolare la forza cui è soggetta la spira dal momento in cui entra nella regione in cui è presente il campo magnetico.



SOLUZIONE:

Dal momento in cui la spira entra nella regione di campo magnetico, il flusso di campo magnetico attraverso la spira aumenterà da zero al valore $\Phi(B)_{max} = Bl^2$, che si ottiene quando la spira è totalmente all'interno della regione dove B è non nullo. Nella spira verrà quindi generata una forza elettromotrice indotta $f.e.m. = d\Phi(B)/dt$, che si annullerà non appena tutta la spira è investita dal campo magnetico. A causa di questa $f.e.m$ si genererà una corrente $i = f.e.m/R$ all' interno della spira. A sua volta, la corrente producerà una forza magnetica $\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B}$ che si opporà, per la legge di Lenz, al moto della spira. Il moto della spira è qindi rettilineo uniforme prima di entrare nella zona in cui è presente il campo, decelerato durante l' entrata della spira nella zona in cui c'è campo, e nuovamente rettilineo uniforme quando la spira è completmente entrata nella regione dove c'è campo, quando il flusso attraverso la spira non cambia più e la $f.e.m$ (e quindi i) si annulla.



Per calcolare la forza cui è soggetta la spira si faccia riferimento alla figura. Tutti i segmenti della spira giacciono sul piano perpendicolare al campo magnetico, e quindi ogni segmento della spira è soggetto ad una forza di modulo $|\vec{F}| = |i\Delta\vec{l} \wedge \vec{B}| = i\Delta l B$, ove Δ è la parte del lato in questione che si trova all'interno del campo magnetico. I due segmenti AB e CD sono percorsi da correnti uguali e opposte, e quindi la forza totale esercitata sulla spira dovuta ai due lati in questione sarà nulla. Per quanto riguarda gli altri due lati, dato che la forza ̀presente sulla spira solo se quest'ultima non è nè completamente all'interno del campo nè completamente al di fuori di esso, perchè ci sia una forza il lato BC deve necessariamente essere all' interno del campo e il lato DA all'esterno. In questo caso, il lato DA non subisce forza ($F = ilB$, e se $B = 0$ si ha necessariamente $F = 0$), mentre il lato BC sarà soggetto ad una forza

$$F = ilB = Bl\frac{f.e.m}{R} = \frac{Bl}{R}\frac{d\Phi(B)}{dt} \tag{1}$$

che è anche la forza netta agente sulla spira. Rimane da calcolare quanto vale $d\Phi(B)/dt$. Per fa questo, si considera che

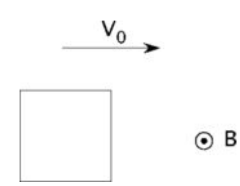
$$\Phi(B) = BA = Blx \tag{2}$$

dove x è la distanza fa il lato BC e il punto x_0 dove inizia la regione dove è presente il campo B. Ma allora

$$\frac{d\Phi(B)}{dt} = \frac{d}{dt}Blx = Blv \to F = \frac{(Bl)^2 v}{R} \tag{3}$$

Esame 20/9/2004

Una spira quadrata di lato L viene trascinata a velocità costante v in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico perpendicolare al piano della spira il cui modulo varia secondo la legge $B(x) = \alpha + \beta x$ (x è la direzione del moto della spira). Noti $v = 0.1$ m/s, $L = 10$ cm, $\beta = 0.1$ T/m e la resistenza della spira $R = 1\Omega$, determinare il valore della corrente indotta nella spira. Quanto deve valere la forza con cui viene trascinata la spira per mantenere la velocità costante?



SOLUZIONE:

Indicata con x la coordinata del lato sinistro della spira, il flusso di B attraverso la spira è dato da

$$\Phi(B) = L\int_x^{x+L} B(x)dx = L\int_x^{x+L}(\alpha + \beta x)dx = L^2\alpha + \beta L^3/2 + \beta L^2 x$$

quando la sira si muove, x varia in funzione del tempo, e quidi anche il flusso di B varia,secondo la legge

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\Phi}{dx}v = \beta L^2 v$$

La corrente indotta nella spira vale quindi

$$i = \frac{f_{e.m.}}{R} = \frac{\beta L^2 v}{R} = 10^{-4} A$$

Per mantenere in movimento la spira con una velocità costante, è necessario che la forza totale sulla spira sia nulla. La forza con cui viene trainata la spira deve essere quindi uguale e opposta alla forza magnetica che agisce sulla spira, percorsa da corrente, che si muove in un campo magnetico. Quest'ultima è data dalla differenza fra la forza che agisce sui due lati perpendicolari al moto:

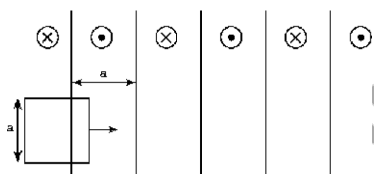
$$F_{mag} = iLB(x+L) - iLB(x) = iL(B(x+L) - B(x)) = iL\beta L$$

Sostituendo il valore di i trovato in precedenza si ottiene infine

$$F = 10^{-7} N$$

Esame 11/2/2004

Una spira quadrata di lato $a = 10$ cm e resistenza $R = 100\Omega$ viene trascinata con velocità v costante attraverso una regione di spazio in cui si alternano zone con campo magnetico $B = 0.1$ T uscente a zone in cui è presente un uguale campo magnetco, ma entrante. Calcolare e disegnare l'andamento del flusso di B attraverso la spira in funzione della posizione x del centro della spira. Calcolare anche il valore ed il verso di percorrenza della corrente indotta nella spira. Si trascuri l'autoinduzione della spira.



SOLUZIONE:

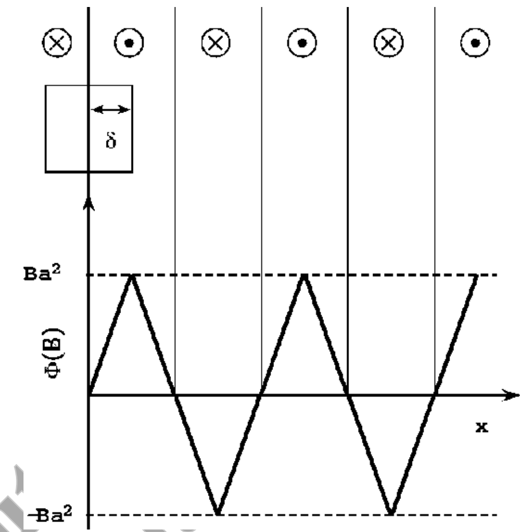
Assumendo positivo il flusso di un campo magnetico uscente, il flusso di campo magnetico attraverso la spira cambia al variare della posizione della spira secondo la legge

$$\Phi(B) = Ba\delta - Ba(a-\delta) = Ba(2\delta - a)$$

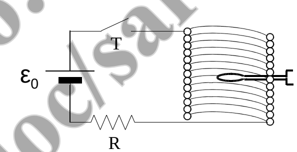
dove δ è la porzione di spira immersa nel campo magnetico uscente (v.figura). Man mano che la spira si sposta lungo l'asse x, δ varia, rimanendo compreso fra 0 ad a, ed il flusso attraverso la spira aumenta o diminuisce a seconda che la spira stia entrando o uscendo da una zona in cui è presente un campo magnetico uscente. Ponendo l'origine dell'asse x in un punto in cui il campo magnetico divanta uscente, per $x = 0$ $\delta = a/2$ e $\Phi(B) = 0$. Aumentando x, δ aumenterà linearmente con x fino a raggiungere il valore massimo (δ =a) per $x = a/2$. In corrispondenza di tale valore di x (e di δ), $\Phi(B) = Ba^2$. Da quel momento in poi, δ comincerà a diminuire, raggiungendo di nuovo il valore $a/2$ ($\rightarrow \Phi(B) = 0$) per $x = a$, e arrivando al valore $\delta = 0$ per $x = 3/2a$ ($\rightarrow \Phi(B) = -Ba^2$). Il grafico di $\Phi(B)$ in funzione di x è qindi quello riportato nella pagina seguente.
Per quanto riguarda modulo e direzione della corrente indotta, si osserva dal grafico che $\Phi(B)$ varia linearmente con x, con pendenza in alcuni tratti positiva ed in altri tratti negativa. Di conseguenza, $d\Phi(B)/dx = \pm C$, con $C = 2Ba$. Se la velocità è costante, x varia linearmente col tempo ($x = vt$), e quindi

$$f_{e.m.} = \frac{d\Phi(B)}{dt} = \frac{d\Phi(B)}{dx} v = \pm 2Bav$$

La corrente che scorre nella spira sarà quindi $i = f_{e.m.}/R = 2Bav/R$, e sarà diretta, per la legge di Lenz, in senso orario nei tratti in cui $\Phi(B)$ aumenta ed in senso antiorario nei tratti in cui $\Phi(B)$ diminuisce.



Esame 18/1/2005



In un circuito RL, l'induttanza è costituita da un solenoide di lunghezza ℓ, formato da N spire, ciascuna di sezione S. All'interno di questo solenoide, è presente una piccola spira di sezione A, perpendicolare all' asse del solenoide (v. figura). Determinare l' andamento della differenza di potenziale ai capi della spira piccola, in funzione del tempo, a partire dall' istante in cui viene chiuso l'interruttore T. Si considerino noti ε_0, R, N,ℓ, S ed A, e si tenga presente che la spira di sezione A è aperta.

SOLUZIONE:

In generale, in presenza di due circuiti attraverso cui passa una corrente dipendente dal tempo, si verifica il fenomeno della mutua induzione, per il quale la corrente che circola in uno dei due circuiti produce una forza elettromotrice nel secondo circuito e viceversa. Nel caso in questone, essendo uno dei due circuiti (la spira piccola) aperto, in esso non circola corrente e quindi non c'è alcuna forza elettromotrice indotta nel circuito RL a causa della presenza della spira piccola. In questo caso, la corrente che circola nel circuito RL a partire dall'istante in cui si chiude il circuito si può ricavare come se la spira piccola non ci fosse, e si ottiene quindi

$$i(t) = \frac{\varepsilon_0}{R}(1 - \exp\{-t/\tau\})$$

con $\tau = L/R$. Nel caso in questione, l'induttanza è costituita da un solenoide, per il quale vale la relazione

$$L = \Phi(B)/i = NS(\mu_0 in)/i = \mu_0 NnS$$

con $n = N/\ell$ e quindi si ha $\tau = \mu_0 N^2 S/\ell R$. Questa corrente produce un campo magnetico dipendente dal tempo all'interno del solenoide, pari a $B(t) = \mu_0 ni(t)$. Il flusso di tale campo attraverso la spira piccola vale $\Phi(B) = AB(t)$ e la sua variazione nel tempo vale

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}A\mu_0 ni(t) = A\mu_0 n\frac{di}{dt} = A\mu_0 n\frac{\varepsilon_0}{R\tau}\exp\{-t/\tau\}$$

e ricordando le espressioni di τ e L si ottiene infine

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\mu_0 n\frac{\varepsilon_0}{L}\exp\{-t/\tau\} = \frac{A\varepsilon_0}{NS}\exp\{-t/\tau\}$$