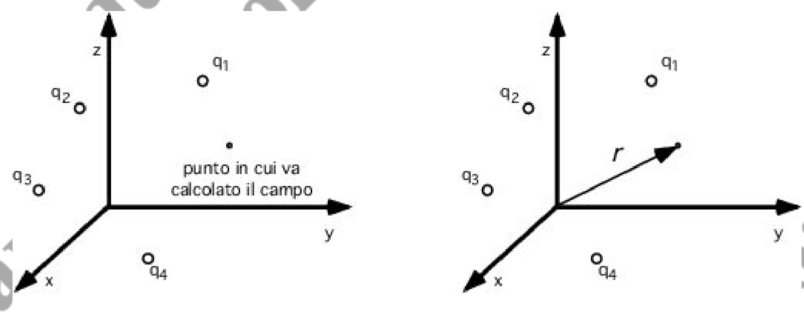
Calcolo di campi elettrici

1 Cariche puntiformi

Per le cariche puntirformi, il campo elettrico generato da N cariche é dato dalla somma dei campi generati dalle singole cariche:

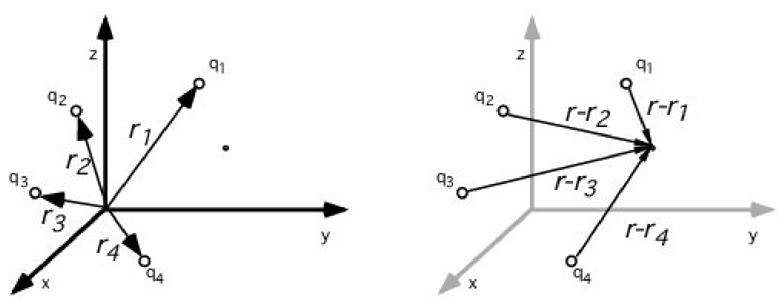
$$\vec{E}_{TOT}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

Tutto il problema sta nel fare correttamente la somma, e per fare cio' e' necessario individuare, nel caso in esame, il vettore $\vec{r}-\vec{r}_i$ per ciascuna carica (oltre ovviamente al valore q_i di ogni singola carica).



1- problema in esame: Calcolare il campo in un punto generico dello spazio

2-definizione dei vettori: definizione del vettore *r*



3-definizione dei vettori: definizione dei vettori r_i

4-definizione dei vettori: definizione dei vettori r-r_i

Nota: Mente il vettore *r* e tutti i vettori r_i dipendono da dove si e' posta l'origine del sistema di riferimento, lo stesso non vale per i vettori r-r_i

Fatto questo, la cosa principale a cui prestare attenzione è che si tratta di una somma vettoriale, e quindi va fatta componente per componente o con la regola del paralelogrammo. Quello che si ottiene, in generale, non è un numero ma un' espressione in funzione del vettore $\vec{r}$ che identifica il punto in cui si vuole calcolare il campo elettrico. L'esercizio puó chiedere di calcolare il valore del campo in funzione di $\vec{r}$ (e in questo caso, una volta fatta la somma l'esercizio è risolto) oppure di trovare particolari valori di $\vec{r}$ o delle cariche q_i, come riportato negli esempi tratti dagli esercizi di esame.

Solitamente, conviene fare attenzione a come sono disposte le cariche: nel fare la somma estesa a tutte le cariche, può essere conveniente sommare i vari campi in un determinato ordine, in modo che, sfruttando le simmetrie del sistema, alcune cmponenti si annulino.
Il caso tipico è quando si può far uso della simmetria di dipolo: ogni qual volta ci sono due cariche uguali e opposte ad una certa distanza d, queste si comportano come un dipolo, ed il campo da loro generato è pari a quello di dipolo.

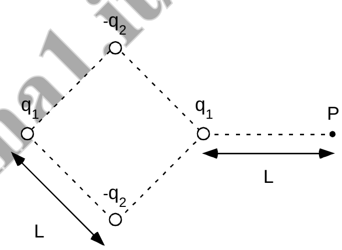
Esercizi preliminari

1. Esercizi che richiedano di eseguire somme fra vettori e piu' in generale operazioni algebriche fra vettori e scalari (ANALISI, GEOMETRIA, FISICA 1)
2. Esercizi che rendano chiaro il concetto di campo (ad esempio, tramite diversi modi di visualizzazione)
3. Esercizi che consentano di familiarizzare col concetto di "somma di campi vettoriali"

Esempi tratti da esercizi di esame

Esame 14/7/2004

Quattro cariche puntiformi sono disposte sui vertici di un quadrato di lato L come disegnato in figura. Si chiede quale deve essere il rapporto fra q_1 e q_2 affinchè il campo elettrico si annulli nel punto P, la cui distanza da uno dei vertici del quadrato è pari a L.



SOLUZIONE:

Dal punto di vista del campo generato nel punto P, le quattro cariche si possono dividere in due gruppi distinti:

1. le due cariche q_1, che producono entrambe un campo orizzontale nel punto P
2. le due cariche q_2, ciascuna delle quali produce nel punto P un campo con componenti sia orizzontali che verticali.

Il campo elettrico nel punto P è dato dalla somma (vettoriale) del campo $\vec{E}_1$ prodotto dalle due cariche q_1 e del campo $\vec{E}_2$ prodotto dalle due cariche q_2. Il campo $\vec{E}_1$ è diretto orizzontalmente, in direzione opposta alla congiungente fra quadrato e P, essendo le cariche q_1 entrambe positive. D'altra parte, il campo $\vec{E}_2$ è ach'esso diretto orizzontalmente (le componenti verticali si annullano per simmetria), in direzione opposta ad $\vec{E}_1$. Il campo complessivo si annullerà quindi se $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$ nel punto P.
Il campo $\vec{E}_1$ è dato dalla somma (vettoriale) dei due campi prodotti in P dalle due cariche q_1. Dato che entrambi i campi sono diretti nella stessa direzione e verso, la somma vettoriale dei due campi

prodotti dalle due cariche q_1 sarà un vettore diretto orizzontalmente, il cui modulo è dato dalla somma dei moduli dei due campi suddetti:

$$|\vec{E}_1| = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{L^2} + \frac{1}{(L+\sqrt{2}L)^2}\right] = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 L^2}\left[1 + \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right]$$

mentre la componente x del campo $\vec{E}_2$ si ottiene facilmente considerando che le due cariche producono in P lo stesso campo (in modulo) la cui componente x è pari a

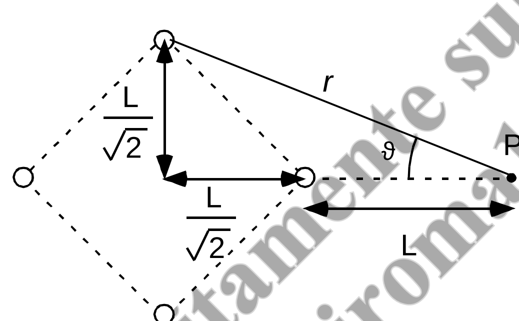
$$E(q_2) = -\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{cos(\theta)}{r^2} = -\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 L^2}\frac{1+1/\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^{3/2}}$$

dove si è usato il fatto che (v.figura) $cos(\theta) = L(1+1/\sqrt{2})/r$ e $r = L(1/2 + (1+1/\sqrt{2})^2)^{1/2} = L(2+\sqrt{2})^{1/2}$. Il campo $\vec{E}_2$ vale quindi (in modulo) il doppio di $E(q_2)$ ed è uguale ed opposto al campo $\vec{E}_1$ se

$$q_1\left[1 + \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right] = 2q_2\frac{1+1/\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^{3/2}}$$

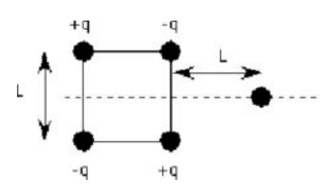
da cui

$$\frac{q_1}{q_2} = 2\frac{1+1/\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^{3/2}}\frac{1}{\left[1+\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right]} = 0.462$$



Esame 5/12/2001 (scritto A)

Quattro cariche, due negative e due positive, sono disposte sui vertici di un quadrato di lato $L = 10cm$ come descritto in figura. Calcolare modulo, direzione e verso della forza complessiva esercitata su una carica q posta sull'asse disegnato in figura ad una distanza L dal lato del quadrato. Quanto vale la forza (in modulo, direzione e verso) se viene aggiunta una ulteriore carica positiva q al centro del quadrato? ($q = 1\mu$C)



SOLUZIONE:

Dividendo le quattro cariche in due dipoli uguali e opposti, si ha, ricordando l'espressione del campo generato da un dipolo su un punto generico dell'asse:

$$
\begin{aligned}
E_x(P) &= 0 \\
E_y(P) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qL}{r^3} \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qL}{((L/2)^2+D^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

dove D è la distanza dal dipolo. Nel nostro caso, ci sono due dipoli, orientati in modo opposto, da cui il punto P si trova rispettivamente a distanza $D_1 = 2L$ e $D_2 = L$. Il primo produrrà nel punto P un campo diretto verso il basso, il secondo un campo diretto verso l'alto:

$$
\begin{aligned}
E_{TOT,x}(P) &= 0 \\
E_{TOT,y}(P) &= -\frac{qL}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}) \\
&= -\frac{qL}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{((L/2)^2+(2L)^2)^{3/2}} - \frac{1}{((L/2)^2+(2L)^2)^{3/2})}\right) \\
&= 0.6\frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^2}
\end{aligned}
$$

Essendo la forza $\vec{F} = q\vec{E}$, ed inserendo i dati del problema si ottiene infine

$$
\begin{aligned}
F_{TOT,x}(P) &= 0 \\
F_{TOT,y}(P) &= 0.6\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} = 0.54N
\end{aligned}
$$

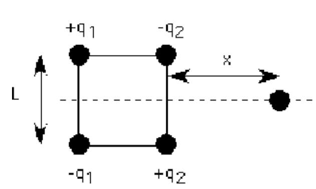
Il vettore forza è quindi diretto lungo la direzione y, verso l'alto, ed il suo modulo vale 0.54 N. Aggiungendo una carica al centro del quadrato, la forza totale sarà la somma delle forze prodotte dalle quattro cariche e dalla quinta aggiunta. Quest'ultima è diretta lungo l'asse x, e quindi la componente lungo y rimane invariata. Complessivamente,

$$
\begin{aligned}
F'_{TOT,x}(P) &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(3/2L)^2} = 0.4N \\
F'_{TOT,y}(P) &= 0.6\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} = 0.54N
\end{aligned}
$$

La nuova forza avra' quindi modulo $F'_{TOT} = \sqrt{(F'_{TOT,x})^2 + (F'_{TOT,y})^2} = 0.67N$ e sara' diretta verso destra, in alto, con un angolo rispetto all'asse orizzontale pari a $\theta = arctan(F'_{TOT,y}/F'_{TOT,x}) \simeq 53.5°$

Esame 5/12/2001 (scritto B)

Quattro cariche, di valore rispettivamente $+q_1$, $-q_1$, $+q_2$ e $-q_2$ sono disposte sui vertici di un quadrato di lato $L = 10cm$ come descritto in figura. Calcolare, infnzione di q_1, q_2 e D il campo elettrico generato dalle quattro cariche in un punto disposto sull'asse disegnato in figura ad una distanza x dal lato del quadrato. Determinare il rapporto fra q_1 e q_2 per il quale il campo si annulla per $x = L$.



SOLUZIONE:

Procedendo come nel caso precedente, si ottiene che il campo nel punto P è pari a

$$\begin{aligned}
E_{TOT,x}(x) &= 0 \\
E_{TOT,y}(x) &= -\frac{L}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1^3} - \frac{q_2}{r_2^3}\right) \\
&= -\frac{L}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{((L/2)^2 + (L+x)^2)^{3/2}} - \frac{q_2}{((L/2)^2 + (x)^2)^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

Volendo che il campo si annulli quando $x = L$, deve essere $E_{TOT,x}(L) = E_{TOT,y}(L) = 0$, ovvero, sostituendo $x = L$ nell'espressione precedente

$$\frac{q_1}{((L/2)^2 + (2L)^2)^{3/2}} - \frac{q_2}{((L/2)^2 + (L)^2)^{3/2})} = 0$$

$$\rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{((L/2)^2 + (2L)^2)^{3/2}}{((L/2)^2 + (L)^2)^{3/2}} = \left(\frac{\frac{1}{4} + 4}{\frac{1}{4} + 1}\right)^{3/2} = 6.27$$

2 Distribuzioni di carica notevoli

Può succedere che l'esercizio chieda di calcolare il campo generato da due o più oggetti di forma particolarmente semplice (sfere, piani, fili uniformemente carichi. . .). In questo caso, il campo generato da ogni singolo oggetto si può ricavare facilmente usando il teorema di Gauss, ed il campo complessivo sarà dato dalla somma dei campi generati dai singoli oggetti. Come nel caso di cariche puntiformi, la cosa più importante da ricordare è che si tratta di una somma vettoriale, e quindi non è corretto sommare semplicemente i moduli dei campi.

Esercizi preliminari

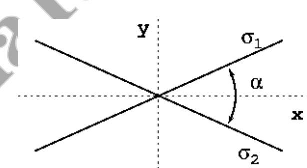
1. Esercizi che richiedano il calcolo del campo elettrico generato da oggetti ad elevata simmetria (piani, sfere, cilindri...)

2. Esercizi che richiedano di eseguire somme fra campi vettoriali (ad esempio, fra campi generati da cariche puntiformi...)

Esempi tratti da esercizi di esame

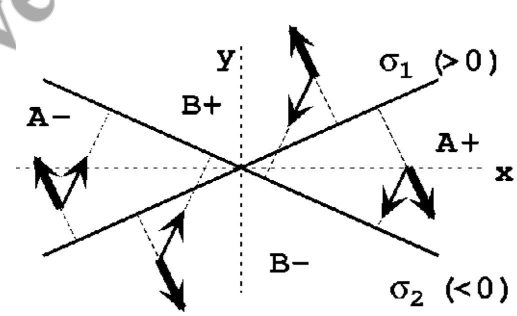
Esame 11/2/2004

Due piani infiniti uniformemente carichi ($\sigma_2 = -\sigma_1$, $\sigma_1 > 0$) formano un angolo α fra loro. Calcolare il valore di $\vec{E}$ in modulo, direzione e verso nei vari punti di un piano perpendicolare ai due piani carichi.



SOLUZIONE:

Il campo elettrico generato da un piano uniformemente carico vale $E_0 = \sigma/(2\epsilon_0)$ ed è diretto perpendicolarmente al piano. Il campo in un punto generico del piano perpendicolare ai due piani carichi è dato dalla somma vettoriale dei due campi $\sigma_1/2\epsilon_0$ e $\sigma_2/2\epsilon_0$. Si possono distinguere 4 zone del piano: le due zone A+ e A- contigue all'asse x, e le due zone B+ e B- contigue all'asse y. Nella figura, le frecce piú spesse si riferiscono al campo generato dal piano con carica σ_1 (> 0), mentre le piú sottili si riferiscono al campo generato dal piano con carica σ_2 (< 0).



Nelle zone A+, A- le componenti x dei due campi si annullano, mentre si sommano le componenti y:

$$\vec{E} = \{0, 2E_{0,y}\} = \{0, \pm 2\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}cos(\alpha/2)\} = \{0, \pm\frac{\sigma_1}{\epsilon_0}cos(\alpha/2)\}$$

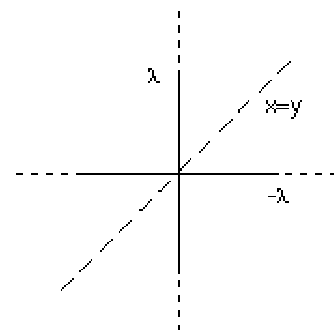
dove il segno + vale per $x < 0$ ed il segno - per $x > 0$. Nelle zone B+ e B-, viceversa, si annullano le componenti y del campo, mentre si sommano le componenti x:

$$\vec{E} = \{2E_{0,x}, 0\} = \{\pm 2\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}sin(\alpha/2), 0\} = \{\pm\frac{\sigma_1}{\epsilon_0}sin(\alpha/2), 0\}$$

dove il segno + vale per $y < 0$ ed il segno - per $y > 0$.

Esame 15/4/2002

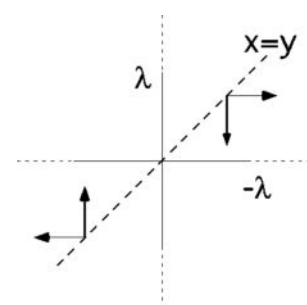
Due fili non metallici e uniformemente carichi, con densità lineare uguale e opposta, sono disposti su un piano, formando un angolo di 90°. Scegliendo come assi cartesiani x e y le due direzioni individuate dai due fili, si chiede l'espressione del campo elettico sulla linea $x = y$ e lungo l'asse z.



SOLUZIONE:

Il campo generato da un filo uniformemente carico è diretto perpendicolarmente al filo ed è pari (in modulo) a $|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ dove r è la distanza dal filo. Nel caso in questione, sulla retta $x = y$, il filo che giace lungo l'asse x produrrà quindi un campo diretto verticalmente e di modulo pari a $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}$, mentre il filo diretto lungo l'asse y produrrà un campo diretto orizzontalmente e pari a $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$. Dato che il filo orizzontale ha carica negativa mentre il filo verticale ha carica positiva, i versi dei singoli campi sono quelli disegnati in figura. Dato che per tutti i punti della retta, per definizione, $x = y$, il modulo del campo prodotto dal filo orizzontale è sempre uguale al modulo del campo prodotto dal filo verticale. Complessivamente, il campo avrà un' inclinazione di 45° rispetto all'asse x (per $x > 0$) e di 135° (per $x < 0$) e varrà in modulo

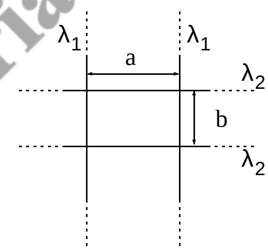
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 x}$$



Per quanto riguarda il campo lungo l'asse z, entrambi i campi sono in questo caso diretti lungo l'asse. La somma vettoriale si riduce quindi ad una somma scalare, ed essendo i due campi uguali in modulo ma opposti fra loro, il campo risultante sarà nullo.

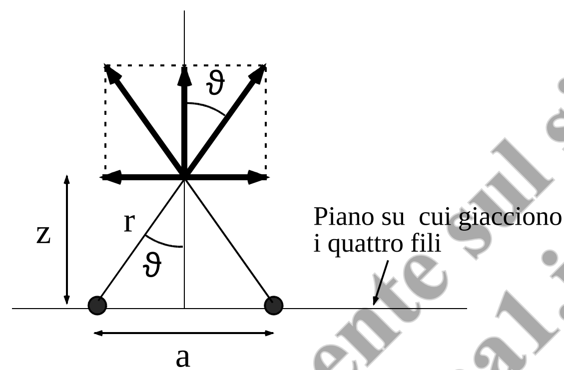
Esame 18/1/2005

Quattro fili infiniti uniformemente carichi ($\lambda_2 = -\lambda_1,\ \lambda_1 > 0$) sono disposti come in figura. Calcolare il valore di $\vec{E}$ in modulo, direzione e verso nei vari punti della retta perpendicolare al piano della figura, passante per il centro del rettangolo.



SOLUZIONE:

Il campo elettrico generato da un filo uniformemente carico vale $E_0 = \lambda/(2\epsilon_0 r)$, dove r è la distanza dal filo, ed è diretto perpendicolarmente al filo. Il campo in un punto generico dell'asse perpendicolare al piano individuato dai quattro fili è dato dalla somma vettoriale dei quattro campi generati dai quattro fili. Considerando inizialmente i due fili carichi positivamente, si ha (v.figura) che le componenti parallele al piano determinato dai fili si annullano per simmetria, mentre le due componenti lungo l'asse si sommano.



Ciascuna delle due componenti "verticali" vale

$$E_z = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}\cos\vartheta = \frac{\lambda_1 z}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

Dove $r = \sqrt{(a/2)^2 + z^2}$ e si è usato il fatto che $\cos\vartheta = z/r$ Il campo prodotto dai due fili carichi positivamente è quindi diretto verso l'alto e vale

$$E_z = \frac{\lambda_1 z}{\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda_1 z}{\pi\epsilon_0((a/2)^2 + z^2)}$$

In maniera del tutto analoga si può dimostrare che il campo generato dai due fili carichi negativamente è diretto verso il basso e vale (in modulo)

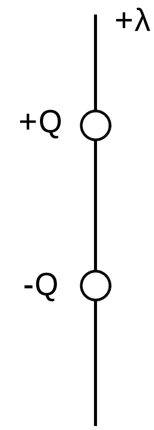
$$E_z = \frac{|\lambda_2| z}{\pi\epsilon_0((b/2)^2 + z^2)}$$

E quindi, essendo $\lambda_2 = -\lambda_1$, si ha infine

$$E_z = \frac{\lambda_1 z}{\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{((a/2)^2 + z^2)} - \frac{1}{((b/2)^2 + z^2)}\right)$$

Esonero 2003-2004 (scritto 3)

Si consideri un filo infinito di materiale isolante, uniformemente carico con densità di carica lineare λ. Sul filo vengono poste due cariche $+q$ e $-q$ ad una distanza d fra di loro. Ponendo l'asse x perpendicolarmente al filo e passante per il punto a metà fra le due cariche, si calcoli l'espressione del campo elettrico in un generico punto appartenente all'asse x.



Domande successive:
a) Se in un punto x_0 si ha $E_x(x_0) = -E_y(x_0)$, quanto vale il rapporto λ/q? (si supponga noto d)
b) Esistono dei punti sull'asse x in cui $\vec{E} = 0$? Esistono punti fuori dall'asse x per cui il campo $\vec{E}$ si annulla (descrivere a parole dove si potrebbe trovare questo punto)?
c) Esiste qualche simmetria del sistema? Si può usare per calcolare $\vec{E}$?

SOLUZIONE:

Il campo generato in un generico punto si può ottenere considerando la somma (vettoriale) dei campi generati dal filo e dalle due cariche. In particolare, il filo genererà un campo diretto lungo l'asse x, mentre le due cariche, formando un dipolo, genereranno un campo diretto ortogonalmente ad esso.

$$\begin{aligned} E_x(x) &= E_{filo} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \\ E_y(x) &= E_{dipolo} = -\frac{qd}{4\pi\epsilon_0 \left(x^2 + (d/2)^2\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

Tale campo è sempre diretto verso il basso, ed è diretto verso le x positive se $x > 0$ e verso le x negative se $x < 0$.

Domande successive:

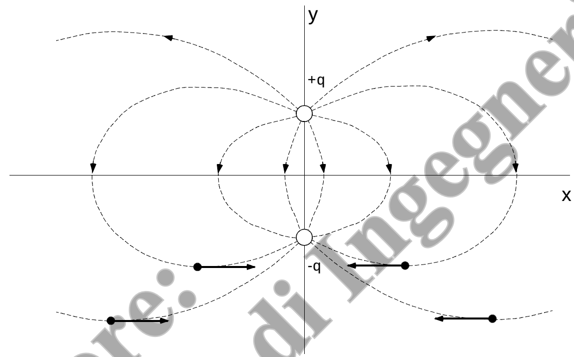
a) Se $E_x(x_0) = -E_y(x_0)$, dall'espresione del campo trovata si ottiene

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x_0} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 \left(x_0^2 + (d/2)^2\right)^{3/2}}$$

da cui

$$\frac{\lambda}{q} = \frac{d}{2}\frac{x_0}{\left(x_0^2 + (d/2)^2\right)^{3/2}}$$

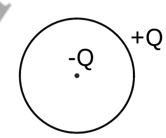
b) Per avere $\vec{E} = 0$ deve essere contemporaneamente $E_x = 0$ ed $E_y = 0$. Dalle espressioni ottenute, si vede che non esiste acun valore di x per cui queste due relazioni sono entrambe verificate, a parte il caso ovvio $x \to \pm\infty$. Per avere punti esterni all'asse x con $\vec{E} = 0$ deve valere la stessa condizione. Essendo il campo generato dal filo sempre diretto lungo la direzione x, questo significa che per avere $\vec{E} = 0$ il campo generato dal dipolo deve essere anch'esso diretto lungo la direzione x, in verso contrario al verso del campo del filo, ovvero verso le x negative se $x > 0$ e verso le x positive se $x < 0$. Se si tracciano le linee del campo elettrico generato da un dipolo, si ottiene che un campo siffatto può esistere solo per $y < 0$, nei punti in cui le linee di flusso, chiudendosi, sono orizzontali e dirette verso il dipolo (punti neri in figura).



c) Il sistema ha una simmetria di rotazione rispetto all'asse parallelo al filo. Il campo elettrico non può quindi cambiare se si ruota il filo lungo il suo asse. Tuttavia, questa simmetria non è sufficiente a facilitare il calcolo del campo elettrico, se non per il fatto che, indicato con x un asse perpendicolare al filo, con y un secondo asse perpendicolare al filo e all'asse x e con z l'asse paralelo al filo, una volta calcolato il campo lungo l'asse x si ottiene immediatamente anche il campo lungo l'asse y.

Esonero 2003-2004 (scritto 1)

Si consideri un anello di raggio R, isolante, di carica complessiva $+Q$, ed una carica puntiforme, di carica $-Q$, posta al centro dell' anello. Scrivere l'espressione del campo elettrico e del potenziale sull'asse dell'anello.



Domande successive:
a) Esistono punti in cui $\vec{E} = 0$?
b) La risposta alla domanda precedente pu cambiare se si scelgono opportunamente i valori di R o di Q?
c) Il sistema nel suo complesso è in qualche modo assimilabie ad un dipolo?

SOLUZIONE:

Il campo elttrico generato in un generico punto dell'asse dell'anello si può ottenere sommando il campo generato dall'anello e quello generato dalla carica puntiforme. Ponendo l'asse z paralelamente all'asse dell'anello, il campo dell'anello vale (in modulo)

$$E_{anello} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

ed è diretto verso le z positive se $z > 0$ e verso le z negative se $z < 0$. Il campo generato da punto è d'altra parte (in modulo)

$$E_{punto} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{z^2}$$

e, essendo $Q < 0$, è diretto verso le z negative se $z > 0$ e verso le z positive se $z < 0$. I due campi sono quindi sempre diretti in modo opposto,e quindi il modulo del campo risultante vale

$$E_{tot} = E_{anello} - E_{punto} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}} - \frac{1}{z^2}\right]$$

Per quanto riguarda il potenziale, anch'esso è la somma dei due potenziali generati dall'anello e dal punto, e quindi

$$V_{tot} = V_{anello} - V_{punto} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}} - \frac{1}{z}\right]$$

Domande successive:
a) Per avere $E = 0$ deve essere

$$\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}} - \frac{1}{z^2} = \frac{z^3 - (R^2+z^2)^{3/2}}{z^2(R^2+z^2)^{3/2}} = 0$$

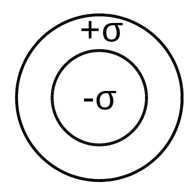
che può avvenire solo se

$$z^3 = (R^2+z^2)^{3/2} \rightarrow z^2 = (R^2+z^2)$$

cosa che non pu avvenire, per nessun valore di z
b) Per quanto detto al punto precedente, qualunque sia il valore di R non esistono valori di z per cui $E = 0$. D'altra parte, il valore di Q non compare nell' equazione che determina per quali valori di z si ha $E = 0$, quindi qualunque sia il valre di Q la risposta alla domanda precedente rimane invariata (non esiste alcun punto lungo l'asse z in cui $E = 0$)
c) In generale, una distribuzione di carica sferica è equivalente ad una sola carica puntiforme posta al centro della sfera. In questo caso, trattandosi non di una sfera ma di un anello, si poteva pensare che, almeno per quanto riguarda il campo sul piano, si possa assimilare la distribuzione di carica dell'anello ad una sola carica puntiforme $+Q$ posta nel centro del medesimo. Anche se ciò fosse vero, tuttavia, le due cariche $+Q$ e $-Q$ si troverebbero nello stesso punto (entrambe al centro dell'anello...) e quindi, anche se il ragionamento fosse stato corretto, si sarebbe trattato di un dipolo con distanza nulla fra le cariche, ovvero, in ogni caso di un dipolo con momento complessivo $p = Qd = 0$

Esonero 2003-2004 (scritto 2)

Si consideri un disco di raggio R_1, isolante, carico con densità di carica superficiale costante e pari a σ_1, all'interno del quale viene scavato un foro di raggio R_2, concentrico al disco, successivamente riempito di un secondo materiale isolante, carico con densità di carica superficiale costante e pari a σ_2. Scrivere l'espressione del campo elettrico sull'asse del disco.



Domande successive:
a) Supponendo noti R_1, R_2 ed il punto z_0 sull'asse del disco in cui E si annulla, determinare il rapporto σ_2/σ_1
b) Cosa succederebbe se si avesse $\sigma_1 = \sigma_2$?
c) Se la carica complessiva del disco forato Q_1 è uguale e opposta alla carica complessiva del disco interno Q_2, quanto deve valere il rapporto σ_2/σ_1

SOLUZIONE:

Il campo elttrico generato in un generico punto dell'asse del sistema può essere scritto com il campo generato dal disco interno (con densità di carica σ_2) più il campo dovuto alla corona circolare esterna. Quest'ultimo può essere a sua volta ottenuto come il campo dovuto all'intero disco di raggio R_1 meno il campo che sarebbe generato dal disco di raggio R_2 che è stato asportato. Ponendo l'asse z coincidente con l'asse dell'anello

$$
\begin{aligned}
E_{corona} &= E_{disco1} - E_{disco2} \\
&= \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R_1^2+z^2}}\right] - \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right] \\
&= \frac{z\sigma_1}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}}\right]
\end{aligned}
$$

a questo va aggiunto il campo del disco di raggio R_2, carico con densità di carica σ_2:

$$
\begin{aligned}
E_{tot} &= E_{corona} + E_{disco2} \\
&= \frac{z\sigma_1}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}}\right] + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right] \\
&= \frac{1}{2\epsilon_0}\left[\sigma_2 + z\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Questo campo sarà sicuramente diretto lungo l'asse del disco, mentre il suo verso (se è cioè diretto verso il disco o in verso opposto) sarà determinato da σ_1, σ_2 e z

Domande successive:

a) Per avere $E = 0$ per $z = z_0$ deve essere

$$
\sigma_2 + z_0\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{R_1^2+z_0^2}} + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sqrt{R_2^2+z_0^2}}\right) = 0
$$

o equivalentemente

$$
\sigma_1\frac{z_0}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R_2^2+z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2+z_0^2}}\right] = -\sigma_2\frac{1}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{z_0}{\sqrt{R_2^2+z_0^2}}\right]
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma_2}{\sigma_1} &= -z_0\frac{\frac{1}{\sqrt{R_2^2+z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2+z_0^2}}}{1 - \frac{z_0}{\sqrt{R_2^2+z_0^2}}} \\
&= -z_0\frac{1 - \sqrt{\frac{R_2^2+z_0^2}{R_1^2+z_0^2}}}{\sqrt{R_2^2+z_0^2}+1}
\end{aligned}
$$

b) Se si avesse $\sigma_2 = \sigma_1$, l'espressione del campo totale sarebbe

$$
\begin{aligned}
E_{tot} &= \frac{1}{2\epsilon_0}\left[\sigma_1 + z\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} + \frac{\sigma_1-\sigma_1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)\right] \\
&= \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}\left[1 + \frac{z}{\sqrt{R_1^2+z^2}}\right]
\end{aligned}
$$

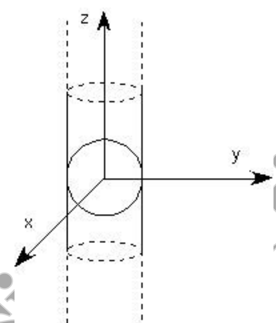
che è esattamente il campo gnerato da un disco pieno di raggio R_1 e carica superficiale σ_1. Del resto, se $\sigma_2 = \sigma_1$, tutto il disco ha la stessa carica superficiale, ed il sistema è quindi effettivamente un disco pieno di raggio R_1 e carica superficiale σ_1

c) La carica complessiva del disco di raggio R_2 vale $Q_2 = \sigma_2 \pi R_2^2$, mentre la carica complessiva della corona circolare vale $Q_1 = \sigma_1 \pi (R_1^2 - R_2^2)$. Se $Q_2 = -Q_1$, questo vuol dire che

$$\sigma_2 \pi R_2^2 = -\sigma_1 \pi (R_1^2 - R_2^2) \rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2} = 1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$$

Esonero 5/11/2002 (scritto 1)

Si consideri un clindro infinito di materiale isolante, di raggio R, uniformemente carico con densità di carica di volume ρ_0. In un punto del cilindro, viene scavata una sfera, anch'essa di raggio R, centrata sull' asse del cilindro. Ponendo l'origine degli assi nel centro della sfera e l'asse z coincidente con l'asse del cilindro, si calcoli l'espressione del campo elettrico in un generico punto appartenente all'asse x, con $x > R$.



Domande successive:
a) Il sistema ha complessivamente qualche simmetria?
b) Quanto vale il campo per un generico punto appartenente all'asse y, con $y > R$?
c) Quanto vale il campo nel punto $\vec{P} = \{2R, 0, 2R\}$?
d) Discutere a parole se e nel caso come si potrebbe affrontare il problema per $x < R$

SOLUZIONE:

Il campo generato in un generico punto si può ottenere considerando che il cilindro infinito si può considerare come la somma della sfera e del cilindro in cui è stata scavata la sfera. Chiamando $\vec{E}$ il campo generato dal cilindro scavato, si ha quindi

$$\vec{E}_{cil,inf} = \vec{E}_{sfera} + \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_{cil,inf} - \vec{E}_{sfera}$$

dove $\vec{E}_{cil,inf}$ è il campo generato dal cilindro infinito, uniformemente carico e $\vec{E}_{sfera}$ è il campo generato da una sfera uniformemente carica con la stessa densità di carica del cilindro. Per questioni di simmetria, il campo sarà radiale sul piano $z = 0$ per entrambe le figure geometriche (cilindro e sfera). Per un punto dell'asse x deve quindi essere diretto lungo l'asse x. Tramite il teorema di Gauss si ottiene che il modulo del campo deve valere rispettivamente ($x > R$)

$$E_{cil,inf}(x) = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 x}$$

$$E_{sfera}(x) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 x^2}$$

$$\rightarrow E(x) = \frac{\rho_0 R^2}{\epsilon_0 x}\left(\frac{1}{2} - \frac{R}{3x}\right)$$

Domande successive:

a) Non ci sono simmetrie usuali: la presenza della sfera rende non applicabile la simmetria cilindrica, mentre la presenza del cilindro rende non esatta la simmetria sferica. Tuttavia, se ci si limita al piano $z = 0$, qualunque direzione su quel piano è equivalente.

b) Per quanto detto al punto precedente, il modulo del campo lungo l'asse y si può ottenere sostituendo y al posto di x nell'espressione ottenuta per l' asse x:

$E(y) = \frac{\rho_0 R^2}{\epsilon_0 y}\left(\frac{1}{2} - \frac{R}{3y}\right)$

Il campo sarà diretto in questo caso lungo l'asse y, dovendo in ogni caso essere radiale.

c) Il punto $\vec{P}$ non giace sul piano $z = 0$ e quindi non si può usare il risultato precedente. Tuttavia, si può ancora considerare il campo come differenza fra il campo generato dal cilindro e quello generato dalla sfera. Nel punto in questione, il campo generato dal cilindro infinito sarà ancora diretto lungo la direzione x (ovvero lungo la direzione $\{1, 0, 0\}$), e di modulo dato dall'espressione trovata in precedenza, con $x = 2R$. Il campo generato dalla sfera sarà radiale rispetto alla sfera e quindi diretto lungo la direzione $\hat{P} = \vec{P}/|\vec{P}| = \{2R, 0, 2R\}/\sqrt{(2R)^2 + (2R)^2} = \{1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\}$, e di modulo dato sempre dal teorema di Gauss ($|\vec{E}_{sfera}| = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2}$, dove $r^2 = |\vec{P}|^2 = (2R)^2 + (2R)^2) = 8R^2$):

$\vec{E}_{cil,inf}(\{2R, 0, 2R\}) = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 (2R)}\{1, 0, 0\} = \frac{\rho_0 R}{4\epsilon_0}\{1, 0, 0\}$

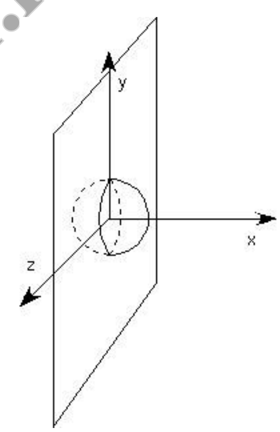
$\vec{E}_{sfera}(\{2R, 0, 2R\}) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 (8R^2)}\{1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\} = \frac{\rho_0 R}{24\epsilon_0}\{1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\}$

$\rightarrow \vec{E}(\{2R, 0, 2R\}) = \frac{\rho_0 R}{4\epsilon_0}\{1 - 1/6\sqrt{2}, 0, -1/6\sqrt{2}\}$

d) Per $x < R$ il campo sarebbe stato dato ancora dalla differenza fra il campo generato dal cilindro e quello generato dalla parte scavata. Tuttavia, in questo caso il campo generato dal cilindro sarebbe stato ottenibile come di consueto dal teorema di Gauss, ma il campo generato dalla parte scavata non sarebbe stato di facile calcolo: se si immagina di intersecare il cilindro uniformemente carico con una superficie gaussiana cilindrica ad esso coassiale, attraverso la quale calcolare il flusso e quindi il campo per un punto $x < R$, la parte scavata corrispondente non avrebbe una forma geometrica facilmente descrivibile, e quindi il campo prodotto dalla parte scavata non sarebbe stato facile da calcolare.

Esonero 5/11/2002 (scritto 2)

Si consideri un piano infinito di materiale isolante, uniformemente carico con densità di carica superficiale σ_0. In un punto del piano, viene scavatato un disco di raggio R, nel quale viene alloggiata una sfera, anch'essa di raggio R, uniformemente carica con densità di carica di volume ρ_0. Ponendo l' origine degli assi nel centro della sfera e l'asse x perpendicolare al piano, si calcoli l'espressione del campo elettrico in un generico punto appartenente all'asse x, con $x > R$.



Domande successive:

a) Il sistema ha complessivamente qualche simmetria?

b) Quanto vale il campo per un generico punto appartenente all'asse x, con $x < -R$?

c) Quanto vale il campo per $x \gg R$? Discutere brevemente il risultato.

d) Discutere a parole se e come si poteva trattare il caso di un punto non appartenente all'asse x.

SOLUZIONE:

Il campo generato in un generico punto si può ottenere considerando che il sistema che genera il campo e' costituito da un piano in cui è stato praticato un foro di diametro R più una sfera. Per quanto riguarda il primo pezzo (piano forato) si procede come segue: Il piano infinito si può considerare come la somma del disco di raggio R e del piano in cui è stata praticato il foro circolare. Chiamando $\vec{E}_p$ il campo generato dal piano cui è stato tolto il disco, si ha quindi

$$\vec{E}_{piano} = \vec{E}_{disco} + \vec{E}_p \rightarrow \vec{E}_p = \vec{E}_{piano} - \vec{E}_{disco}$$

dove $\vec{E}_{piano}$ è il campo generato dal piano infinito, uniformemente carico e $\vec{E}_{disco}$ è il campo generato da un disco uniformemente carico con la stessa densità di carica del piano. A questo va aggiunto il campo generato $\vec{E}_{sfera}$ dalla sfera di raggio R posizionata in corrispondenza del disco eliminato, e quindi il campo complessivo $\vec{E}$ sarà dato da:

$$\vec{E} = \vec{E}_{piano} - \vec{E}_{disco} + \vec{E}_{sfera}$$

Tutti e tre i campi in questione sono orientati, per un generico punto dell'asse x, lungo la direzione x e quindi il campo complessivo si ottiene sommando algebricamente i tre campi. I moduli dei tre campi si possono calcolare utilizzando il teorema di Gauss (per il piano e lasfera) e tramite integrazione (per quanto riguarda il disco). Per $x > R$

$$E_{piano}(x) = \sigma_0/2\epsilon_0$$

$$E_{disco}(x) = \sigma_0/2\epsilon_0 \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

$$E_{sfera}(x) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 x^2}$$

$$\rightarrow E(x) = \sigma_0/2\epsilon_0 \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} + \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 x^2}$$

Domande successive:

a) Non ci sono simmetrie usuali: la presenza della sfera rende non applicabile la simmetria piana, mentre la presenza del piano rende non esatta la simmetria sferica. L'unica parziale simmetria si ottiene considerando che se si ruota il sistema di 180 ° intorno a uno qualunque degli assi indicati non cambia nulla, e quindi $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{-r})$.

b) Per quanto detto al punto precedente, il modulo del campo per $x < 0$ è lo stesso che si avrebbe per $x > 0$. Il campo è tuttavia diretto nel verso delle x negative

c) Per $x \gg R$ $x^2 + R^2 \simeq x^2$ e quindi

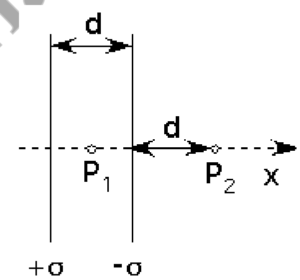
$$E(x) \simeq \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 x^2}$$

che corrisponde alla somma del campo generato dal piano infinito e dalla sfera. L'assenza, per grandi x del termine corrispondente al foro nel piano è ragionevole, in quanto da grande distanza il foro apparirebbe estremamente piccolo e quindi trascurabile. Per x ancora maggiori diverrebbe trascurabile anche il termine corrispndente alla sfera, come è logico che sia dato che il campo generato da una sfera si annulla come $1/r^2$ al crescere di r

d) Per un punto non appartenente all'asse, il campo sarebbe stato dato ancora dalla differenza fra il campo generato dal piano e quello generato dal disco, più il campo generato dalla sfera. Tuttavia, in questo caso il campo generato dal disco non sarebbe facile da calcolare, in quanto il conto er un disco è eseguibile con ragionevole facilità solo lungo il suo asse.

Esame 10/2/2003

Due piani uniformamente carichi con densità di carica superficiale $+\sigma$ e $-\sigma$ ($\sigma = 10^{-9} C/m^2$) sono posti ad una distanza $d = 1cm$ l'uno dall'altro. Ponendo un sistema di riferimento con l'asse x perpendicolare ai due piani e con origine a metà fra i due piani, quanto vale il campo nei due punti $P_1 = \{0, 0, 0\}$ e $P_2 = \{1.5d, 0, 0\}$? Se i due piani fossero sostituiti da due fili uniformemente carichi (con $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$), quanto deve valere λ perchè il campo nel punto P_1 sia lo stesso che nel caso dei due piani? Quanto vale, con questo valore di λ, il campo nel punto P_2?



SOLUZIONE:

Il campo nelle vicinanze di due piani uniformemente carichi, con carica uguale e pposta, è pari a σ/ϵ_0 nello spazio fra i due piani e zero all'esterno di essi. Quindi, con i dati del problema,

$$E(P_1) = \sigma/\epsilon_0 = 113\, V/m; \quad E(P_2) = 0$$

Un filo uniformemente carico produce un campo di modulo $|E| = \lambda/(2\pi\epsilon_0 r)$ (dove r è la distanza dal filo), diretto radialmente nel piano perpendicolare al filo, uscente se $\lambda > 0$ ed entrante nel caso opposto. Nel caso in questione, ponendo l'asse x come indicato nel testo, il campo complessivo generato dai due fili con densità di carica lineare uguale e opposta sarà, lungo l'asse x

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(-x-d/2)} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(-x+d/2)}, && x < -d/2 \\
E(x) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d/2+x)} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(-x+d/2)}, && -d/2 < x < d/2 \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d/2+x)} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(x-d/2)}, && x > d/2
\end{aligned}$$

Nei due punti P_1 e P_2 il campo vale quindi ($x(P_1) = 0$, $x(P_2) = 1.5d$)

$$\begin{aligned}
E(P_1) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d/2} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d/2} = \frac{2\lambda}{\pi\epsilon_0 d} \\
E(P_2) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 2d} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}
\end{aligned}$$

Per trovare il valore di λ bisogna a questo punto uguagliare $E(P_1)$ al valore precedentemente trovato:

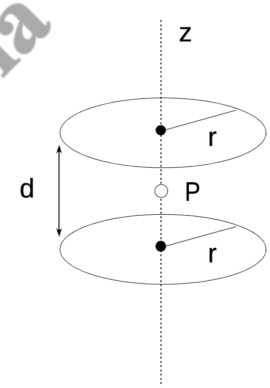
$$E(P_1) = \frac{2\lambda}{\pi\epsilon_0 d} = 113\, V/m \rightarrow \lambda = 1.57 \times 10^{-11} C/m$$

Inserendo tale valore nell'espressione di $E(P_2)$ si ottiene infine

$$E(P_2) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} = 28.3\, V/m$$

Esame 10/9/2003

Due anelli isolanti di raggio r, uniformemente carichi, sono disposti coassialmente uno sopra l'altro, ad una distanza d l' uno dall' altro (v. figura). Calcolare l'espressione del campo lungo l'asse z, passante per il centro dei due anelli, ed in particolare il campo nel punto intermedio fra i due centri degli anelli. Calcolare infine l'espressione del potenziale sull'asse z nel limite $z \gg d$ (suggerimento: eseguire prima il limite $z \gg r$ e poi il limite $z \gg d$). Dati: $d = 0.1$ m, $r = 0.05$ m. La carica dei due anelli è pari a $+Q_0$ (anello inferiore) e $-Q_0$ (anello superiore), con $Q_0 = 1\mu C$.



SOLUZIONE:

Il campo generato da un anello uniformemente carico con carica complessiva Q_0 vale, lungo il suo asse

$$E_A = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} \tag{1}$$

Ponendo l'origine degli assi nel punto intermedio fra i due anelli, il campo complessivo sarà dato dalla somma dei campi generati dagli anelli. Orientando l'asse z verso l'alto,

$$E = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{z+d/2}{(r^2+(z+d/2)^2)^{3/2}} - \frac{z-d/2}{(r^2+(z-d/2)^2)^{3/2}}\right] \tag{2}$$

Nel punto intermedio fra i centri degli anelli si ha $z = 0$ ed il campo vale dunque

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{d/2}{(r^2+(d/2)^2)^{3/2}} - \frac{-d/2}{(r^2+(-d/2)^2)^{3/2}}\right] \\ &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{d}{(r^2+(d/2)^2)^{3/2}} \\ &= 2.54\times 10^6 N/C \end{aligned} \tag{3}$$

Infine, se si considera l'espressione del campo generato da un anello nel limite $z \gg r$ si ottiene

$$\begin{aligned} E_A &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} \\ &\simeq \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{z^2} \end{aligned} \tag{4}$$

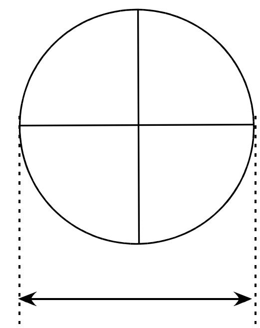
che è equivalente al campo generato da una carica puntiforme. Essendo i due anelli di carica uguale ed opposta, l'espressione del potenziale a grandi distanze dai due anelli è quindi uguale al potenziale di un dipolo:

$$V(z \gg d) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_0 d}{z^2} \tag{5}$$

dove si è considerato che, essendo l' asse z parallelo al dipolo, indicando con $\vec{R}$ vettore che unisce il dipolo al punto in cui si vuole calcolare il potenziale, lungo z si ha $\vec{p}\cdot\vec{R} = pR = Q_0 dR$ e $R = z$.

Esame 11/2003 (*)

Un anello isolante di raggio r e due fili anch'essi isolanti di lunghezza $2r$ sono disposti su un piano come indicato in figura. Inizialmente, l'anello e' scarico e i due fili hanno entrambi una carica complessiva $Q_0 = 10\mu$C, distribuita uniformemente lungo ciascun filo. Calcolare, in questa configurazione, il campo lungo l'asse z, perpendicolare al piano e passante per il punto dove i due fili si incrociano. Ad un tempo t_0, l'anello viene caricato con una carica complessiva $Q_A = -20\mu$C, distribuita uniformemente sull'anello. Calcolare il campo lungo l'asse z in questa nuova configurazione, e verificare se esiste un punto (ed in questo caso quale) in cui il campo si annulla.



SOLUZIONE:

Il campo generato da un filo uniformemente carico sdi lunghezza $2r$, sul suo asse, è dato da

$$E_f = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 z}\frac{1}{((2r)^2+4z^2)^{1/2}} = \frac{Q_0}{8\pi\epsilon_0 z}\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}}$$

Essendo i due fili ugualmente carichi, il campo complessivo generato dai due fili è quindi il doppio di questo campo, e cioè

$$E = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 z}\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}}$$

Quando viene caricato anche l'anello, al campo dei due fili si aggiunge il campo dell'anello

$$E_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

Ed il campo complessivo vale

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 z}\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}} + \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0(r^2+z^2)^{1/2}}\left[\frac{Q_0}{z} + \frac{Q_A z}{r^2+z^2}\right] \end{aligned}$$

Tale campo può annullarsi solo se la quantità fra parentesi quadre si annulla, ovvero se

$$\frac{Q_0}{z} = -\frac{Q_A z}{r^2+z^2} \rightarrow -\frac{Q_0}{Q_A} = \frac{z^2}{r^2+z^2}$$

da cui si ottiene

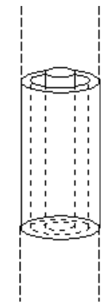
$$z^2 = \frac{-Q_0/Q_A}{1+Q_0/Q_A}r^2 = \frac{1/2}{1-1/2}r^2 = r^2$$

da cui infine

$$z = \pm r$$

Esame 17/12/2001

Un cavo coassiale è costituito da un cilindro metallico di raggio R_1 e da un guscio cilindrico (di raggio interno $R_2 > R_1$ e raggio esterno $R_3 > R_2$), coassiale al cilindro, della stessa lunghezza. Si consideri un cavo coassiale di lunghezza infinita, e si carichi il conduttore interno in modo che possegga una carica di $1\mu C$ per ogni metro di lunghezza, lasciando complessivamente scarico il conduttore esterno. Determinare direzione e verso del campo elettrico su un piano perpendicolare all'asse del cavo. Calcolare, sullo stesso piano, il modulo del campo elettrico in funzione della distanza r dall'asse del cavo in tutto l'interallo di valori da $r = 0$ a $r = +\infty$.



SOLUZIONE:

Il sistema ha simmetria cilindrica, e quindi anche il campo avrá la stessa simmetria. In particolare, il campo sara' diretto lungo il piano ortogonale all'asse del cavo, e sarà diretto radialmente. Si puo' allora usare il teorema di Gauss per ottenere il valore del campo elettrico in funzione di r: presa una superficie gaussiana cilindrica coassiale al cavo, di altezza h, il campo sarà costante e ortogonale alla superficie laterale della superficie cilindrica, e parallelo alle basi superiore ed inferiore. Il flusso del campo attraverso la superficie gaussiana sarà quindi pari al flusso sulle pareti laterali, essendo il flusso attraverso le basi superiore ed inferiore nullo ($\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$):

$$\begin{aligned}\Phi(E) &= \int_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= E \int_{\Sigma_L} dS \\ &= E 2\pi r h = Q_\Sigma/\epsilon_0\end{aligned}$$

dove Σ é la superficie gaussiana cilindirca e Σ_L é la porzione laterale della stessa, mentre Q_Σ e' la carica contenuta all'interno di Σ. Si distinguono 4 casi:

1. $r < R_1$: Essendo il cilindro metallico, non ci sono cariche al suo interno e quindi una qualunque superficie gaussiana contenuta all'interno del cilindro non contiene nessuna carica: $Q_\Sigma = 0 \rightarrow E = 0$. Del resto, il campo all'interno di un metallo è sempre nullo…

2. $R_1 < r < R_2$: la carica contenuta all'interno di Σ é la carica presente sulla superficie del cilindro, in un tratto di altezza h:

$$Q_\Sigma = \sigma_1 2\pi R_1 h$$

dove σ_1 è le densità di carica superficiale sulla superficie del cilindro. Prendendo $h = 1m$, la carica complessiva in un metro di cavo è, come detto nel testo, $1\mu C$, e quindi

$$\begin{aligned}\sigma_1 2\pi R_1 h &= 1\mu C \\ \rightarrow \sigma_1 &= \frac{1}{2\pi R_1 h}\mu C/m^2 \\ \rightarrow Q_\Sigma &= \frac{1}{2\pi R_1 h}(2\pi R_1 h) = 1\mu C\end{aligned}$$

e quindi

$$E = Q_\Sigma/(2\pi\epsilon_0 r h) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r}$$

3. $R_2 < r < R_3$: Il campo all'interno del metallo di cui è costituito il guscio cilindrico deve essere nullo ($E(r) = 0$). Utilizzando il teorema di Gauss, questo significa che per $R_2 < r < R_3$ la superficie gaussiana cilindrica non deve contenere alcuna carica, ovvero $Q_\Sigma = 0$. Ma la carica complessiva all'interno della superficie gaussiana è pari alla somma della carica sulla superficie del cilindro più la carica sulla superficie di raggio R_2:

$$\begin{aligned} Q_\Sigma &= 2\pi R_1 h\sigma_1 + 2\pi R_2 h\sigma_2 = 0 \\ \rightarrow \sigma_2 &= -\sigma_1 \frac{R_1}{R_2} \end{aligned}$$

4. $r > R_3$: il guscio cilindrico è complessivamente neutro, quindi la carica sulla superficie esterna del guscio deve essere uguale e opposta alla carica sulla superficie interna: considerando un tratto di cavo lungo h:

$$\begin{aligned} 2\pi R_2 h\sigma_2 &= -2\pi R_3 h\sigma_3 \\ \rightarrow \sigma_3 &= -(R_2/R_3)\sigma_2 \end{aligned}$$

Complessivamente, la carica contenuta in una superficie gaussiana cilindrica di raggio $r > R_3$ e altezza h è pari a

$$\begin{aligned} Q_\Sigma &= 2\pi h(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2 + \sigma_3 R_3) \\ &= 2\pi h\sigma_1 R_1 = 1\mu C \end{aligned}$$

Da cui infine

$$E = Q_\Sigma/(2\pi\epsilon_0 r h) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r}$$