Circuiti RL/RLC

1 Circuiti RL

La trattazione di un circuito RL nel caso in cui venga utilizzato un generatore di tensione indipendente dal tempo é del tutto analoga alla trattazione di un circuito RC, nelle stesse condizioni. La differenza principale sta nel fatto che mentre nel circuito RC man mano che il condensatre si carica, la differenza di potenziale ai suoi capi aumenta, fino a diventare uguale alla forza elettromotrice del generatore (e a quel punto la corrente che passa nel circuito si annulla), nel caso di un circuito RL la tensione ai capi dell'induttanza é grande quando la variazione di corrente é grande: per $t \to \infty$, la corrente raggiunge un valore costante e a quel punto l'induttanza L non produce alcun effetto, ed il circuito si comporta come se ci fosse solo la resistenza R ($\to i = \varepsilon/R$).
Per la soluzione del problema del circuito RL si puó sfruttare l'analogia con le equazioni del circuito RC:

$$\text{Circuito RC}: \varepsilon - V_c - iR = 0 \to (V_c = \frac{Q}{C}) \to \varepsilon - \frac{1}{C}Q - R\frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\text{Circuito RL}: \varepsilon - iR - V_L = 0 \to (V_L = L\frac{di}{dt}) \to \varepsilon - Ri - L\frac{di}{dl} = 0$$

Le due equazioni sono formalmente identiche, con le sostituzioni $Q \to i$, $\frac{1}{C} \to R$ e $R \to L$. La soluzione per $i(t)$ é quindi identica alla soluzione per $Q(t)$ nel caso di un circuito RC, a meno delle dette sostituzioni:

1. Processo di carica:
   - Corrente nel circuito: $i(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - \exp\{-Rt/L\})$
   - Differenza di potenziale sulla resistenza : $V_R(t) = iR = \varepsilon(1 - \exp\{-Rt/L\})$
   - Differenza di potenziale sull' induttanza : $V_L(t) = L\frac{di}{dt} = \varepsilon \exp\{-Rt/L\}$
2. Processo di scarica:
   - Corrente nel circuito: $i(t) = i(t=0)\exp\{-Rt/L\}$
   - Differenza di potenziale sull'induttanza: $V_L(t) = L\frac{di}{dt} = i(t=0)R\exp\{-Rt/L\}$
   - Differenza di potenziale sulla resistenza : $V_R(t) = iR = i(t=0)R\exp\{-Rt/L\}$

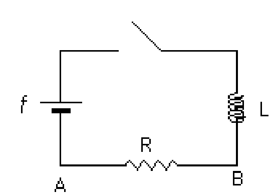
Esercizi preliminari

Esercizi relativi ai processi di carica e scarica di un circuito RC

Esempi tratti da esercizi di esame

Esame 17/12/2001

Si consideri il circito RL disegnato in figura. Si assuma che al tempo $t = 0$ l'interruttore venga chiuso. Si chiede dopo quanto tempo la differenza di potenziale fra A e B è di 5 V. Dati: $f = 15V$, $R = 15\Omega$, $L = 45mH$



SOLUZIONE:

La differenza di potenziale ai capi dellla resistenza vale, per la legg edi Ohm, $V_{AB} = iR$. Per sapere il tempo $\bar{t}$ per il quale $V_{AB} = 5V$, occorre qindi trovare il tempo per il quale $i = V_{AB}/R = 1/3A$. Per questosi scrive l'equazione della maglia:

$$f - iR - L\frac{di}{dt} = 0$$

che, con la condizione $i(0) = 0$ (all'istante iniziale l'interruttore è aperto,e quind non passa corrente) ha come soluzione

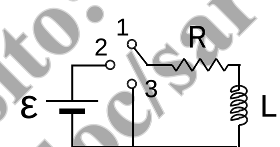
$$i(t) = \frac{f}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

dove $\tau = L/R = 0.003s$. Imponendo $i(\bar{t}) = 1/3A$ si ottiene allora

$$\bar{t} = -\tau ln\left(1 - \frac{iR}{f}\right) = 1.2ms$$

Esame 11/2003

Si consideri il circuito in figura. Inizialmente l'interruttore è nella posizione 1 e non scorre corrente nel circuito. Al tempo $t = 0$, l'interruttore viene spostato sulla posizione 2 e comincia a scorrere una corrente i. Ad un tempo t_1, l'interruttore viene spostato nella posizione 3, e successivamente, quando $t = t_2 = 2.5 \times 10^{-3}$ s, si misura nel circuito una corrente $i_2 = 0.7$ A. Dati $\varepsilon = 5$ V, $L = 10^{-3}$ H e $R = 1\Omega$, si determini il valore di t_1.



SOLUZIONE:

Fra gli istanti $t = 0$ e $t = t_1$ il circuito è un circuito RL in fase di carica. La corrente che scorre al suo interno sarà quindi descritta, in funzione di t, dall'espressione

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

dove $\tau = L/R$. Al tempo $t = t_1$, quando l'interruttore viene nuovamente spostato, la corrente sarà quindi

$$i(t_1) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right)$$

Da quel momento in poi, il circuito è un circuito RL in fase di scarica, e quindi la sua corrente sarà descritta, in funzione del tempo, dall'espressione

$$i(t) = i(t_1)e^{-(t-t_1)/\tau} \rightarrow i(t_2) = i(t_1)e^{-(t_2-t_1)/\tau}$$

Sostituendo il valore di $i(t_1)$ trvato in precedenza si ottiene

$$i(t_2) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right)e^{-(t_2-t_1)/\tau} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t_2/\tau}\left(e^{t_1/\tau} - 1\right)$$

Da cui, tramite alcuni passaggi matematici,

$$e^{t_1/\tau} = 1 + \frac{i_2 R}{\varepsilon}e^{t_2/\tau} \rightarrow t_1 = \tau ln\left(1 + \frac{i_2 R}{\varepsilon}e^{t_2/\tau}\right)$$

che, con i dati del problema, dà come risultato finale $t_1 = 10^{-3}$ s = 1 ms.

2 Circuiti in corrente alternata

Per i circuiti in corrente alternata, il problema é di ottenere le relazioni fra i due parametri (V_0 e ω) che caratterizzano l'andamento temporale della differenza di potenziale ai capi del generatore, ed i tre parametri (i_0, ω e ϕ) che caratterizzano la corrente che scorre nel circuito, essendo

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t) = \Re\{V_0 e^{j\omega t}\} = \Re\{\widetilde{V}\}$$

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t - \phi) = \Re\{i_0 e^{j\omega t - \phi}\} = \Re\{\widetilde{I}\}$$

A tale scopo, risulta particolarmente utile introdurre l'impedenza (complessa) del circuito definita come

$$Z = \Re\{Z\} + j\Im\{Z\} = \frac{\widetilde{V}}{\widetilde{I}}$$

tramite la quale le relazioni cercate si riducono a

$$i_0 = \frac{V_0}{|Z|}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\Im\{Z\}}{\Re\{Z\}}\right)$$

Il valore di Z si puó otteere utilizzando le regole degli elementi circuitali in serie o in parallelo, tenendo conto che per resistenze, induttanze e condensatori vale rispettivamente:

$$Z_R = R$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = -j/\omega C$$

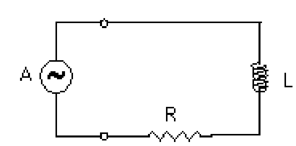
Esercizi preliminari

Operazioni con numeri complessi e regole di trasformazione dalla rappresentazione cartesiana a quella polare per i numeri complessi

Esempi tratti da esercizi di esame

Esame 15/4/2002

Il circuito in figura ($R = 10\Omega$, $L = 1$ mH) è alimentato con un alternatore costituito da una spira quadrata di lato $l = 10$ cm che viene fatta ruotare in un campo magnetico di 0.5 T. Si chiede quanto deve essere la velocità angolare ω con cui ruota la spira per avere una differenza di potenziale di 10 V ai capi della resistenza.



SOLUZIONE:

La differenza di potenziale ai capi della resistenza vale $V_R = Ri = Ri_0 e^{j(\omega t - \phi)}$. Per avere $Ri_0 = 10$ V deve essere $i_0 = 10/R = 1$ A. D'altra parte, in un circuito RL, $Z = R + j\omega L$ e quindi $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ e quindi

$$i_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Inoltre, dato che il generatore é costituito da una spira quadrata che ruota in un campo magnetico, $V(t) = BA\omega\cos(\omega t) \rightarrow V_0 = BA\omega$. L'espressione per i_0 é quindi:

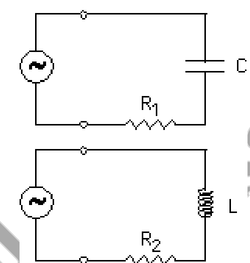
$$i_0 = \frac{BA\omega}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \rightarrow i_0^2 = \frac{(BA\omega)^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

e, invertendo la relazione precedente,

$$\omega = \frac{i_0 R}{\sqrt{(BA)^2 - (i_0 L)^2}} = 2.04 \times 10^3 rad/s$$

Esame 20/9/2002

I due circuiti in figura sono alimentati da due generatori identici che forniscono una alimentazione sinusoidale $V_0 cos(\omega t)$. Scrivendo le correnti che scorrono nei due circuiti come $i_1 = i_{0,1} cos(\omega t - \phi_1)$, $i_2 = i_{0,2} cos(\omega t - \phi_2)$, si chiede:
1) per quale valore di ω si ha $i_{0,1} = i_{0,2}$
2) per quale valore di ω si ha $cos(\phi_1) = cos(\phi_2)$
3) l'espressione di $i_{0,1}$ e $i_{0,2}$ in funzione di ω
Dati: $R_1 = R_2 = 10\Omega$; $L = 1mH$; $C = 10\mu F$; $V_0 = 10V$



SOLUZIONE:

Dato che $V_1 = V_2 = V_0\cos(\omega t)$, $i_{0,1} = i_{0,2}$ se $|Z_1| = |Z_2|$. Nel caso di un circuito RC serie,

$$Z_{RC} = R - j\frac{1}{\omega C} \rightarrow |Z_{RC}| = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$$

mentre per un RL serie

$$Z_{RL} = R + j\omega L \rightarrow |Z_{RC}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

che sono uguali se $\omega L = 1/(\omega C)$ ovvero se $\omega = 1/\sqrt{LC} = 10^4$ rad/s.
Per quanto riguarda il valore di ω per cui $\cos(\phi_1) = \cos(\phi_2)$, questo é equivalente ad avere $\phi_1 = \pm\phi_2$. Per un circuito RC,

$$\phi_{RC} = \arctan -1/\omega CR$$

mentre per un circuito RL

$$\phi_{RL} = \arctan \omega L/R$$

quindi $\phi_1 = \pm\phi_2$ se

$$\frac{1}{\omega CR} = \frac{\omega L}{R} \rightarrow \omega = 1/\sqrt{LC}$$

ovvero la stessa frequenza trovata in precedenza.

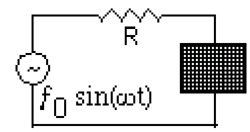
Infine, per quanto riguarda l'andamento di i_0 in funzione della frequenza per i due circuiti, si ha in entrambi i casi $i_0 = V_0/|Z|$ e quindi

$$i_{0,RC} = V_0 \frac{\omega C}{\sqrt{(\omega C R)^2 + 1}}$$

$$i_{0,RL} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Esame 20/1/2003 (scritto A)

Nel circuito in figura ($f_0 = 10.0V$), all'interno della scatola è presente un solo elemeto circuitale (R, L o C). Si misura la corrente che scorre nel circuito a due valori di ω ($\omega_1 = 5 \times 10^5 rad/s$, $\omega_2 = 2 \times 10^6 rad/s$) ottenendo in entrambi i casi $i(t) = i_0(\omega)\cos(\omega t - \phi(\omega))$, con $i_0(\omega_1) = 1.8A$ e $i_0(\omega_2) = 0.9A$. Si determini quale elemento è presente nella scatola, il suo valore numerico ed il valore di R.



SOLUZIONE:

Qualunque sia l'elemento circuitale, $i_0 = f_0/|Z|$, dove $|Z| = R + R'$ se nella scatola é presente una resistenza R', $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ se nella scatola ṕresente un'induttanza L, e $|Z| = \sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}$ se nella scatola ṕresente un codensatore C.
Come si può verificare, nel primo caso i_0 non dipende dalla frequenza, nel secondo diminuisce all'aumentare di ω, mentre nel secondo caso i_0 aumenta all'aumentare di ω.
Dato che secondo i dati del problema $\omega_2 > \omega_1$ e $i_0(\omega_2) < i_0(\omega_1)$, all'interno della scatola deve esserci necessariamente una induttanza L. Per trovare il valore di R e L, si considera che scrivendo $|Z| = R\sqrt{1 + (\omega_1 \tau_L)^2}$ (con $\tau_L = L/R$)

$$\begin{aligned} i_0(\omega_1) &= \frac{f_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_1 \tau_L)^2}} \\ i_0(\omega_2) &= \frac{f_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_2 \tau_L)^2}} \end{aligned}$$

dividendo membro a membro e definendo $r = i_0(\omega_1)/i_0(\omega_2)$ si ottiene

$$r = \sqrt{\frac{1 + (\omega_2 \tau_L)^2}{1 + (\omega_1 \tau_L)^2}}$$

da cui, tramite successivi passaggi algebrici

$$\tau_L = \sqrt{\frac{r^2 - 1}{\omega_2^2 - (r\frac{\omega_1}{\omega_2})^2}} = 10^{-6} s$$

Utilizzando questo valore di τ_L nell' espressione di $i_0(\omega_1)$ si ottiene allora

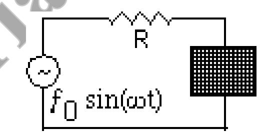
$$R = \frac{f_0}{i_0(\omega_1)} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_1 \tau_L)^2}} = 5\Omega$$

ed infine

$$L = \tau_L R = 5\mu H$$

Esame 20/1/2003 (scritto B)

Nel circuito in figura ($f_0 = 10.0V$), all'interno della scatola è presente un solo elemeto circuitale (R, L o C). Si misura la corrente che scorre nel circuito a due valori di ω ($\omega_1 = 1.0 \times 10^4 rad/s$, $\omega_2 = 4.0 \times 10^4 rad/s$) ottenendo $i_0(\omega_1) = 0.45A$ e $i_0(\omega_2) = 0.9A$. Si determini quale elemento è presente nella scatola, il suo valore numerico ed il valore di R.



SOLUZIONE:

Procedendo come nell'esercizio precedente, e considerando che secondo i dati del problema si ha in questo caso $\omega_2 > \omega_1$ e $i_0(\omega_2) > i_0(\omega_1)$, all'interno della scatola deve esserci necessariamente un condensatore C. Per trovare il valore di R e C, si considera che, scrivendo $|Z| = R\sqrt{1 + 1/(\omega_1\tau)^2}$ (con $\tau = RC$)

$$
\begin{aligned}
i_0(\omega_1) &= \frac{f_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1 + 1/(\omega_1\tau)^2}} \\
i_0(\omega_2) &= \frac{f_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1 + 1/(\omega_2\tau)^2}}
\end{aligned}
$$

dividendo membro a membro e definendo $r = i_0(\omega_1)/i_0(\omega_2)$ si ottiene

$$r = \sqrt{\frac{1 + 1/(\omega_2\tau)^2}{1 + 1/(\omega_1\tau)^2}}$$

da cui, tramite successivi passaggi algebrici

$$\tau = \sqrt{\frac{1 - (r\omega_2/\omega_1)^2}{\omega_2^2(r^2 - 1)}} = 5.0 \times 10^{-5}s$$

Utilizzando questo valore di τ nell' espressione di $i_0(\omega_1)$ si ottiene allora

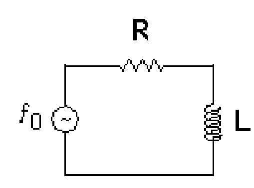
$$R = \frac{f_0}{i_0(\omega_1)}\frac{1}{\sqrt{1 + 1/(\omega_1\tau)^2}} = 9.9\Omega$$

ed infine

$$C = \tau/R = 5.0\mu F$$

Esame 10/2/2003

Si consideri il circuito in figura, con $f_0 = 10V$, $R = 5\Omega$ e $L = 1mH$. Supponendo come di consueto $f(t) = f_0 cos(\omega t)$ e $i(t) = i_0 cos(\omega t - \phi)$, per quali valori di ω si avrà $i_0 > 1A$? Come sarebbe cambiato il risultato se al posto di L ci fosse stato un condensatore di capacità $C = 1mF$?



SOLUZIONE:

In un circuito in regime di corrente alternata

$$i_0 = \frac{f_0}{|Z|}$$

Nel caso in questione, essendo $f_0 = 10V$, la condizione $i_0 \geq 1A$ si traduce nella condizione $|Z| \leq 10$. Per un circuito RL, per il quale $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, questo comporta

$$R\sqrt{1 + (\omega L/R)^2} \leq 10$$

da cui ($R = 5\Omega$)

$$1 + (\omega L/R)^2 \leq 4 \rightarrow \omega \leq \sqrt{3}(R/L) = 8660\, rad/s$$

Nel caso di un circuito RC, $|Z| = \sqrt{R^2 + 1(\omega C)^2}$, e quindi la condizione $i_0 \geq 1A$ si scrive

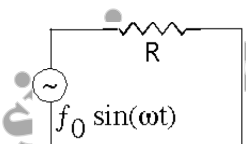
$$R\sqrt{1 - 1/(\omega RC)^2} \leq 10$$

e con passaggi analoghi al caso precedente si ottiene infine

$$1 + 1/(\omega RC)^2 \leq 4 \rightarrow \omega \geq \frac{1}{\sqrt{3}RC} = 115.5\, rad/s$$

Esame 22/7/2003

Sia dato il circuito in figura, in cui l'alimentatore è costituito da un alternatore nel quale una bobina quadrata di 100 spire e di lato $l = 10$ cm ruota in un campo magnetico $B = 0.5$ T. Se la resistenza vale $R = 100\ \Omega$, quanto deve valere la velocità angolare della bobina per avere una potenza dissipata di 100 W su R?



SOLUZIONE:

La potenza dissipata dalla resistenza vale

$$W = \frac{1}{2} f_0 i_0 = \frac{1}{2}\frac{f_0^2}{R}$$

D'altra parte, la $f.e.m.$ dell'alernatore è data da

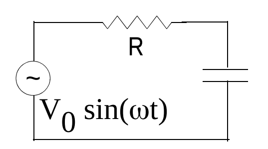
$$f_0 = \frac{d\Phi(B)}{dt} = \frac{d}{dt}(BNAcos(\omega t)) = \omega BNA\sin(\omega t)$$

dove N è il numero di spire di cui è costituita la bobina e $A = l^2$ è l'area di ogni singola spira. Imponendo che $W = 100W$ si ottiene

$$\frac{1}{2}\frac{(\omega BNl^2)^2}{R} = 100W \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2RW}{BNl^2}} = 200 rad/s$$

Esame 10/9/2003

Il circuito in figura è alimentato da un generatore in corrente alternata. Dati $V_0 = 200$ V, $R = 100\Omega$, $C = 10\mu$F, si chiede per quale valore di ω la potenza dissipata su R è pari a $W_R = 100$ W



SOLUZIONE:

La potenza dissipata sulla resistenza vale ($|Z| = R\sqrt{1 + (1/\omega RC)^2}$)

$$W_R = i_{qm}^2 R = \left(\frac{V_{qm}}{|Z|}\right)^2 R = \frac{V_0^2}{2R}\frac{1}{1 + 1/(\omega RC)^2} \tag{1}$$

Con i dati del problema, $\frac{V_0^2}{2R} = 200$ W, e quindi, per avere $W_R = 100$W deve essere

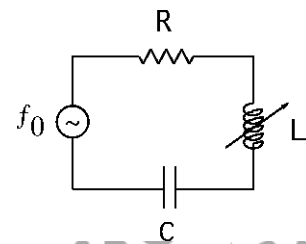
$$\frac{1}{1 + 1/(\omega RC)^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \omega RC = 1 \tag{2}$$

da cui

$$\omega = 1/RC = 1000 rad/s \tag{3}$$

Esame 21/1/2004 (scritto A)

Nel circuito RLC in figura, la resistenza ed il condensatore sono fissi, mentre l'induttanza può essere variata a piacere. Se la caduta di potenziale ai capi della resistenza è $V_R \cos(\omega t - \phi)$ e la caduta di potenziale ai capi dell' induttanza è $-V_L \sin(\omega t - \phi)$, si chiede per quali valori di L: (1) V_R è massima; (2) $V_R = V_L$. Quanto valgono V_L, V_R e ϕ per questi due valori di L? Si considerino noti R, C e ω.

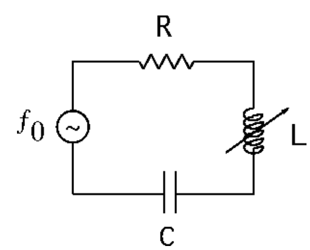


SOLUZIONE:

Per come sono state definite V_R e V_L nel testo, scrivendo come di consueto $i = i_0 \cos(\omega t - \phi)$ si ha $V_R = i_0 R$ e $V_L = \omega L i_0$. Il valore massimo di V_R si ha quindi in corrispondenza del massimo valore possibile per i_0. Essendo in un circuito RLC $i_0 = f_0/\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ tale valore massimo si ottiene se $\omega L = 1/\omega C \rightarrow L = 1/\omega^2 C$.
Per tale valore di L, $i_0 = f_0/R$ e quindi $V_R = f_0$ e $V_L = \omega L f_0/R$. Per avere $V_L = V_R$ deve invece essere $\omega L = R \rightarrow L = R/\omega$.
Per tale valore di L, $i_0 = f_0/\sqrt{R^2 + (R - 1/\omega C)^2}$ e $V_L = V_R = f_0/\sqrt{1 + (1 - 1/\omega RC)^2}$. Per quanto riguarda la fase, si ha in generale $\phi = \arctan(\omega L - 1/\omega C)/R$. Nel primo caso si ha quindi $\phi = 0$, mentre nel secondo $\phi = \arctan(1 - 1/\omega RC)$

Esame 21/1/2004 (scritto B)

In un circuito RLC, la resistenza e l'induttanza sono fissi, mentre il condensatore può essere variato a piacere. Se la caduta di potenziale ai capi della resistenza è $V_R \cos(\omega t - \phi)$ e la caduta di potenziale ai capi del condensatore è $V_C \sin(\omega t + \phi)$, si chiede per quali valori di C: (1) V_R è massima; (2) $V_R = V_C$. Quanto valgono V_C, V_R e ϕ per questi due valori di C? Si considerino noti R, L e ω.



SOLUZIONE:

Per cone sono state definite V_R e V_C nel testo, scrivendo come di consueto $i = i_0 \cos(\omega t - \phi)$ si ha $V_R = i_0 R$ e $V_C = i_0/\omega C$. Il valore massimo di V_R si ha quindi in corrispondenza del massimo valore possibile per i_0. Essendo in un circuito RLC $i_0 = f_0/\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ tale valore massimo si ottiene se $1/\omega C = \omega L \rightarrow C = 1/\omega^2 L$.

Per tale valore di L, $i_0 = f_0/R$ e quindi $V_R = f_0$ e $V_C = f_0/\omega CR$. Per avere $V_C = V_R$ deve invece essere $1/\omega C = R \rightarrow C = 1/\omega R$. Per tale valore di C, $i_0 = f_0/\sqrt{R^2 + (\omega L - R)^2}$ e $V_C = V_R = f_0/\sqrt{1 + (\omega L/R - 1)^2}$.
Per quanto riguarda la fase, si ha in generale $\phi = \arctan(\omega L - 1/\omega C)/R$. Nel primo caso si ha quindi $\phi = 0$, mentre nel secondo $\phi = \arctan(\omega L/R - 1)$