Circuiti con condensatori e/o resistenze

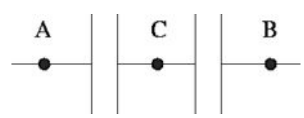
1 Esercizi con condensatori

Per questo tipo di esercizio sono fondamentali due prerequisiti:

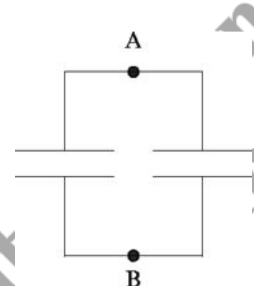
1) Ricordarsi l'espressione della capacitá di un condensatore (solitamente è sufficiente ricordare l'espressione della capacitá di un condensatore piano)
2) Aver capito con grande esattezza cosa si intende per "condensatori in serie" e condensatori in parallelo".

Per quanto riguarda il primo punto, il modo piú sicuro per ricordarsi l'espressione della capacitá è ricordarsi la sua definizione ($C = Q/\Delta V$), ricordarsi che $\Delta V = \int \vec{E} d\vec{s}$ (dove l'integrale va effettuato su una linea che congiunge le due armature del condensatore) e che $\vec{E}$ é legato a Q dal teorema di Gauss ($\Phi(E) = Q/\epsilon_0$).

Per quanto riguarda il secondo punto, bisogna tener presente che due condensatori si dicono "in serie" solo se sono collegati come segue



e se nessun filo è connesso al punto C. In questo caso, e solo in questo caso, i due condensatori possono essere considerati equivalenti ad un unico condensatore di capacitá $C_{eq} = 1/(1/C_1 + 1/C_2)$
Due condensatori si dicono "in parallelo" solo se sono collegati fra loro come segue:

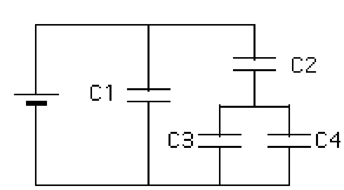


e se nessun altro dispositivo (condensatori, resistenze...) è connesso fra i due punti A e B. In questo caso, e solo in questo caso, i due condensatori sono equivalenti ad un unico condensatore di capacitá $C_{eq} = C_1 + C_2$

Esempi tratti da esercizi di esame

Esame 5/12/2001 (scritto B)

Si consideri il circuito in figura, con $V = 10V$, $C_1 = 25\mu F$, $C_2 = 10\mu F$, $C_3 = 30\mu F$, $C_4 = 20\mu F$. Calcolare la carica presente su ciascuno dei quattro condensatori.



SOLUZIONE:

Si nota innanzitutto che la dfferenza di potenziale ai capi della capacità C_1 deve essere uguale alla differenza di potenziale ai capi del generatore V:

$$V = Q_1/C_1 \rightarrow Q_1 = VC_1 = 250\mu C$$

per lo stesso motivo, la somma della differenza di potenziale attraverso C_2 e C_3 (o C_4) è ancora uguale a V, ed inoltre deve anche essere $V_3 = V_4$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} \\ \frac{Q_3}{C_3} &= \frac{Q_4}{C_4} \end{aligned}$$

Infine, la somma delle cariche su C_3 e C_4 deve essere uguale alla carica su C_2, essendo il parallelo di C_3 e C_4 in serie alla capacità C_2:

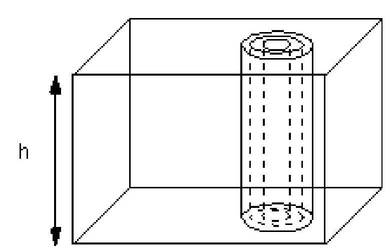
$$Q_3 + Q_4 = Q_2$$

mettendo le precedenti espressioni a sistema e risolvendolo si ottiene infine

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{VC_2}{C_2 + C_3 + C_4}(C_3 + C_4) = 83.33\mu C \\ Q_3 &= \frac{VC_2C_3}{C_2 + C_3 + C_4} = 50\mu C \\ Q_4 &= \frac{VC_2C_4}{C_2 + C_3 + C_4} = 33.33\mu C \end{aligned}$$

Esame 15/4/2002

Per misurare il livello di riempimento di una cisterna alta 2 m viene utilizzato un condensatore cilindrico, posto verticalmente all'interno della cisterna. Se la capacità del condensatore è di 1 nF quando la cisterna è vuota, si chiede:
a) il rapporto fra il raggio esterno del conduttore centrale e quello interno del conduttore esterno del condensatore
b) quanto vale la capacità del condensatore quando la cisterna è piena d'acqua ($\epsilon_{H_2O} = 80$)
c) l'espressione della capacità del condensatore in funzione del livello d'acqua.



SOLUZIONE

Sfruttando il teorema di Gauss si ottiene che il campo elettrico all'interno del condensatore (fra le due armature) è diretto radialmente ed il suo modulo è dato da

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 hr}$$

Integrando fra raggio esterno del conduttore interno (r_1) e raggio interno del conduttore esterno (r_2) si ottiene

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

dove r_2/r_1 è il rapporto fra i raggi richiesto dal problema. Data la definizione di capacità, $C = Q/\Delta V$, si ottiene infine

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(r_2/r_1)} \rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \exp\left\{\frac{2\pi\epsilon_0 h}{C}\right\} =$$

Se la cisterna è piena d'acqua, la sua capacità sarà ϵ_r volte più grande che in aria, essendo in generale la capacità di un condensatore riempito con un dielettrico ϵ_r volte più grande della capacità dello stesso condensatore in assenza di dielettrico. Di conseguenza

$$C(\text{pieno}) = \epsilon_r C(\text{vuoto}) = 80nF$$

Infine, se il condensatore è solo parzialmente pieno d'acqua, indicando con y il livello dell'acqua nel condensatore, quest'ultimo si può considerare equivalente a due condensatori in parallelo, l'uno di altezza y e pieno d'acqua, l'altro di altezza $h - y$, vuoto. Ricordando l'espressione della capacità del condensatore cilindrico, ricavata in precedenza, si ottiene infine

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r y}{\ln(r_2/r_1)} + \frac{2\pi\epsilon_0(h-y)}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r_2/r_1)}(\epsilon_r y + (h-y))$$

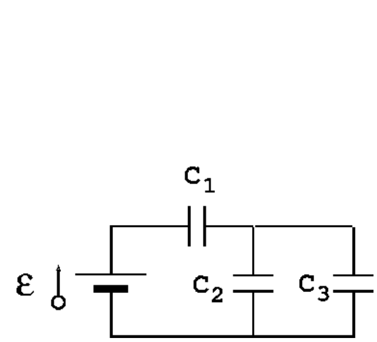
Che, ricordando l'espressione della capacità C della cisterna quando é vuota, può anche essere scritto ($\frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r_2/r_1)} = C/h$)

$$C_{eq} = \frac{C}{h}(\epsilon_r y + (h-y)) = C\left(1 + (\epsilon_r - 1)\frac{y}{h}\right)$$

si può facilmente verificare che se $y = 0$ (cisterna vuota) si ha $C_{eq} = C$, mentre per $y = h$ (cisterna piena) si ha $C_{eq} = \epsilon_r C$, come già trovato in precedenza.

Esonero 2003/2004 (scritto 3)

Si consideri il circuito in figura. Determinare la carica su ciascun condensatore in funzione delle tre capacità C_1, C_2 e C_3 e della differenza di potenziale V_0.



Domande successive:
a) Supponendo che $C_1 = C_2 = C_3 = C$, come si semplificano le espressioni delle tre cariche Q_1, Q_2 e Q_3?
b) Supponendo che i condensatori siano tutti condensatori piani, e tutti con la stessa distanza fra i piatti, quanto dovrebbe essere più grande (o più piccola) la superficie dei piatti di un solo condensatore piano, equivalente alle tre capacità collegate come nel circuito in figura, e avente la stessa distanza d fra i piatti?
c) Come cambiano i risultati precedenti se il condensatore C_3 viene riempito da un dielettrico di costante dielettrica relativa ϵ_r?

SOLUZIONE

I tre condensatori possono essere ridotti ad un solo condensatore, tenendo presente che C_2 e C_3 sono in paralelo e C_1 è in serie al parallelo fra C_2 e C_3:

$$C_{eq} = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Avendo ridotto i tre condensatori ad un solo condensatore equivalente, la carica su quest'ultimo vale semplicemente

$$Q = \Delta V_0 C_{eq} = \Delta V_0 \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Essendo C_{eq} ottenuta come la serie di C_1 e del parallelo di C_2 e C_3, questa sarà anche la carica su C_1 (cioè Q_1) e la carica complessiva su C_2 e C_3 (cioè $Q_2 + Q_3 = Q$). Dovendo poi essere $V_2 = V_3$ dal momento che C_2 è in parallelo a C_3, deve essere

$$\begin{aligned} Q_2 + Q_3 &= Q = \Delta V_0 \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} \\ Q_3/C_3 &= Q_2/C_2 \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema si ottiene

$$\begin{aligned} Q_2 &= \Delta V_0 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \\ Q_3 &= \Delta V_0 \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \end{aligned}$$

Domande successive:
a) Se $C_1 = C_2 = C_3 = C$, le espressioni delle tre cariche diventano

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{2}{3} C \Delta V_0 \\ Q_2 &= \frac{1}{3} C \Delta V_0 \\ Q_3 &= \frac{1}{3} C \Delta V_0 \end{aligned}$$

b) L'area dei piatti di un condensatore piano è legata alla capacità e alla distanza fra i piatti dala relazione

$$A = C \epsilon_0 d$$

Essendo tutti i codensatori con la stesso valore di d, i rapporti fra le aree saranno uguali ai rapporti fra le capacità. Se tutti i condensatori sono uguali e con capacità C, l'espressione della capacità equivalente trovata in precedenza si riduce a

$$C_{eq} = \frac{2}{3} C$$

e quindi l'area dei piatti del condensatore equivalente A_{eq} è legata all'area A dei singoli condensatori dalla relazione

$$A_{eq} = \frac{2}{3} A$$

c) Se il condensatore C_3 viene riempito con un dielettrico, la sua capacità diventa $C_3 = \epsilon_r C$, e quindi i tre valori di carica diventano

$$\begin{aligned} Q_1 &= \Delta V_0 \frac{C(1+\epsilon_r)}{2+\epsilon_r} \\ Q_2 &= \Delta V_0 \frac{C}{2+\epsilon_r} \\ Q_3 &= \Delta V_0 \frac{C\epsilon_r}{2+\epsilon_r} \end{aligned}$$

Inoltre

$$C_{eq} = \frac{(1+\epsilon_r)}{2+\epsilon_r} C$$

e quindi

$$A_{eq} = \frac{(1+\epsilon_r)}{2+\epsilon_r} A$$

2 Esercizi con resistenze

Oltre a quanto detto a riguardo dei collegamenti in serie o in parallelo (vedi sezione dedicata ai condensatori), la soluzione degli esercizi che riguardano problemi di circuiti contenenti resistenze richiede una adeguata conoscenza delle leggi di Kirchhoff e delle loro applicazioni. Le due leggi di Kirchhoff (nodi e maglie) possono essere scritte nel seguente modo:

- Legge dei nodi: $\sum_n i_n = 0$
- Legge delle maglie: $\sum_n \Delta V_n + \sum_m \varepsilon_m = 0$

Nella prima, la somma va estesa a tutte le correnti che entrano o escono dal nodo, con segno positivo per le correnti entranti e segno negativo per quelle uscenti. Nella seconda, la somma su n va estesa a tutte le cadute di potenziale sulle singole resistenze presenti nella maglia, mentre la somma su m va estesa a tutti i generatori presenti nella maglia. Il segno di ciascun ΔV_n e di ciascun ε_m dipende dal fatto se il potenziale aumenta o diminuisce attraversando la resistenza o il generatore.

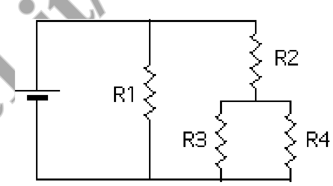
Esercizi preliminari

Esercizi relativi alla soluzione di sistemi di equazioni lineari (GEOMETRIA)

Esempi tratti da esercizi di esame

Esame 5/12/2001 (scritto A)

Si consideri il circuito in figura, con $V = 10V$, $R_1 = 25\Omega$, $R_2 = 10\Omega$,$R_3 = 40\Omega$,$R_4 = 24\Omega$. Calcolare la corrente circolante in ciascuna delle quattro resistenze.



SOLUZIONE:

Si può procedere in due modi:
a) Usando le equazioni di Kirchoff. Considerando le tre maglie contenenti rispettivamente il generatore e la resistenza R_1 (maglia 1), le resistenze R_1, R_2, R_3 (maglia 2) e le resistenze R_3 e R_4 (maglia 3) e l'equazione del nodo sotto la resistenza R_2, e ponendo tutte le correnti verso il basso, si ottiene

$$\begin{aligned} V &= i_1 R_1 \\ i_1 R_1 &= i_2 R_2 + i_3 R_3 \\ i_3 R_3 &= i_4 R_4 \\ i_2 &= i_3 + i_4 \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema si ottiene

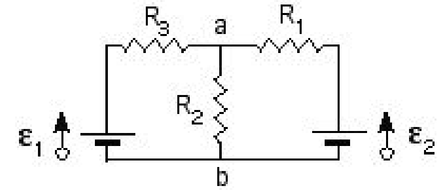
$$\begin{aligned} i_1 &= V/R_1 = 0.4A \\ i_2 &= \frac{V(R_4 + R_3)}{R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4} = 0.4A \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
i_3 &= \frac{VR_4}{R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4} = 0.15A \\
i_4 &= \frac{VR_3}{R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4} = 0.25A
\end{aligned}
$$

b) Considerando le regole di equivalenza per resistenze in serie e in parallelo, R_3 e R_4 sono equivalenti ad una sola resistenza di valore $1/R_{eq1} = 1/R_3 + 1/R_4 \rightarrow R_{eq1} = 15\Omega$. La serie di R_2 e R_{eq1} è allora equivalente a una resistenza $R_{eq2} = R_2 + R_{eq1} = 25\Omega$. Il circuito è quindi equivalente a due resistenze uguali in parallelo, la cui resistenza complessiva è $1/R_{eq3} = 1/R_1 + 1/R_{eq2} \rightarrow R_{eq3} = 12.5\Omega$. La corrente complessiva sarà quindi $i_{TOT} = V/R_{eq3} = 0.8A$ e si dividerà in parti uguali fra R_1 e R_{eq2} (e quindi $i_1 = i_2 = i_{TOT}/2 = 0.4A$). Per quanto riguarda i_3 e i_4, si fa uso delle due ultime equazioni trovate nel punto a) ottenendo lo stesso risultato trovato prima.

Esonero 5/11/2002 (scritto A)

Si consideri il circuito in figura, con $\varepsilon_1 = 10V$, $\varepsilon_2 = 5V$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 20\Omega$. Calcolare la differenza di potenziale $V_b - V_a$



Domande successive:
a) È possibile ridurre in qualche modo il circuito, sfruttando le regole delle resistenze in serie o in parallelo?
b) Come sarebbe cambiato il risultato scambiando R_1 ed R_3?
c) Verificare che scegliendo una diversa maglia per la scrittura della seconda legge di Kirchhoff il risultato sarebbe stato lo stesso

SOLUZIONE:

Si fa uso delle equazioni di Kirchoff. In particolare, orientando le correnti attraverso R_1 ed R_3 da destra verso sinistra e la corrente attraverso R_2 verso il basso, si ottiene per il nodo (a)

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

Considerando le due maglie contenenti la prima il generatore ε_1 e le resistenze R_2, R_3 (maglia 1), la seconda il generatore ε_2 e le resistenze R_2, R_1 (maglia 2), percorrendole entrambe in senso orario

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 - i_2R_2 - i_3R_3 &= 0 \\
i_1R_1 - \varepsilon_2 + i_2R_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Il sistema di tre equazioni in tre incognite ottenuto con la legge del nodo a) e le leggi delle due maglie appena trovate permette di trovare i tre valori delle correnti che circolano nelle tre resistenze. Il problema chiede quanto vale la differenza di potenziale $V_b - V_a$, che è data (in modulo) da i_2R_2. Risolviamo quindi il sistema per ottenere i_2. Lo si può fare ottenendo dalle due leggi delle maglie le espressioni di i_1 e i_3 in funzione di i_2 e dei dati del problema e inserendo tali espressioni nella legge del nodo:

$i_3 = \frac{\varepsilon_1 - i_2R_2}{R_3}$

$i_1 = \frac{\varepsilon_2 - i_2R_2}{R_1}$

$\frac{\varepsilon_1 - i_2R_2}{R_3} + \frac{\varepsilon_2 - i_2R_2}{R_1} - i_2 = 0$

$\rightarrow i_2\left(R_2/R_1 + R_2/R_3 + 1\right) = \varepsilon_1/R_3 + \varepsilon_2/R_1$

$\rightarrow i_2 = \frac{\varepsilon_1/R_3 + \varepsilon_2/R_1}{R_2/R_1 + R_2/R_3 + 1} = 0.286A$

Da cui, infine,

$$V_b - V_a = -i_2 R_2 = -2.86V$$

dove il segno - è stato inserito considerando che dal momento che i_2 è risultata positiva, la direzione di i_2 è quella prevista, cioè verso il basso, e quindi $V_b < V_a$.

Domande successive:

a) no, non essendoci in nessuna maglia due resistenze in serie nè due resistenze in parallelo

b) scambiare di posizione R_1 e R_3 eqivale a scambiare il valore di R_1 ed R_3 nell'espressione di i_2:

$$i_2 = \frac{\varepsilon_1/R_1+\varepsilon_2/R_3}{R_2/R_3+R_2/R_1+1} = 0.643A$$

$$\rightarrow V_b - V_a = -i_2 R_2 = -6.43V$$

c) Si può considerare la maglia contenente i due generatori e le resistenze R_1 e R_3, insieme alla prima delle due maglie considerate in precedenza:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - i_2 R_2 - i_3 R_3 &= 0 \\ \varepsilon_1 + i_1 R_1 - \varepsilon_2 - i_3 R_3 &= 0 \end{aligned}$$

ottenendo i_3 dalla prima e sostituendola nella seconda si ottengono le espressioni di i_1 e i_3 in funzione di i_2:

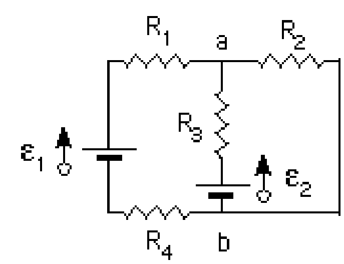
$$i_3 = \frac{\varepsilon_1 - i_2 R_2}{R_3}$$

$$i_1 = \frac{i_3 R_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_1} = \frac{\varepsilon_1 - i_2 R_2 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_1} = \frac{\varepsilon_2 - i_2 R_2}{R_1}$$

Per ottenere $V_b - V_a$ bisogna a questo punto sostituire queste due espressioni nella legge del nodo (a). Queste due espressioni per i_1 e i_3 sono tuttavia le stesse ottenute in precedenza, e quindi il risultato non può che essere lo stesso.

Esonero 5/11/2002 (scritto B)

Si consideri il circuito in figura, con $\varepsilon_1 = 10V$, $\varepsilon_2 = 15V$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $R_4 = 3\Omega$. Calcolare la differenza di potenziale $V_b - V_a$



Domande successive:

a) È possibile ridurre il circuito, sfruttando le regole delle resistenze in serie o in parallelo?

b) Come sarebbe cambiato il risultato scambiando R_2 ed R_3?

c) Verificare che scegliendo una diversa maglia nella scrittura della seconda legge di Kirchhoff il risultato sarebbe stato lo stesso

SOLUZIONE:

Si fa uso delle equazioni di Kirchoff. In particolare, orientando le correnti attraverso R_1 ed R_2 da sinistra verso destra e la corrente attraverso R_3 verso l'alto, si ottiene per il nodo (a)

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

Considerando le due maglie contenenti la prima il generatore ε_1 e le resistenze R_1, R_2, R_4 (maglia 1), la seconda il generatore ε_2 e le resistenze R_3, R_2 (maglia 2), percorrendole entrambe in senso orario

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - i_1 R_1 - i_2 R_2 - i_1 R_4 &= 0 \\ \varepsilon_2 - i_3 R_3 - i_2 R_2 &= 0 \end{aligned}$$

(la corrente che passa per la resistenza R_4 deve essere necessariamente uguale a quella che passa per la resistenza R_1, non essendoci nodi fra le due). Il sistema di tre equazioni in tre incognite ottenuto con la legge del nodo a) e le leggi delle due maglie appena trovate permette di trovare i tre valori delle correnti che circolano nelle tre resistenze. Il problema chiede quanto vale la differenza di potenziale $V_b - V_a$, che è data (in modulo) da $i_2 R_2$. Risolviamo quindi il sistema per ottenere i_2. Lo si può fare ottenendo dalle due leggi delle maglie le espressioni di i_1 e i_3 in funzione di i_2 e dei dati del problema e inserendo tali espressioni nella legge del nodo:

$$i_1 = \frac{\varepsilon_1 - i_2 R_2}{R_1 + R_4}$$

$$i_3 = \frac{\varepsilon_2 - i_2 R_2}{R_3}$$

$$\frac{\varepsilon_1 - i_2 R_2}{R_1 + R_4} + \frac{\varepsilon_2 - i_2 R_2}{R_3} - i_2 = 0$$

$$\rightarrow i_2 \left(R_2/(R_1 + R_4) + R_2/R_3 + 1 \right) = \varepsilon_1/(R_1 + R_4) + \varepsilon_2/R_3$$

$$\rightarrow i_2 = \frac{\varepsilon_1/(R_1 + R_4) + \varepsilon_2/R_3}{R_2/(R_1 + R_4) + R_2/R_3 + 1} = 0.786A$$

Da cui, infine,

$$V_b - V_a = -i_2 R_2 = -7.86V$$

dove il segno - è stato inserito considerando che dal momento che i_2 è risultata positiva, la direzione di i_2 è quella prevista, cioè verso il basso, e quindi $V_b < V_a$.

Domande successive:

a) Si può ridurre il circuito osservando che le due resistenze R_1 ed R_4 possono essere riunite in un'unica resistenza $R_x = R_1 + R_4$, essendo le due resistenze in serie: come già notato, non ci sono nodi fra le due e quindi la corrente che passa in una è la stessa che passa nell' altra. Lo si poteva dedurre anche a posteriori, notando che nelle equazioni delle maglie non compare mai R_1 o R_4 ma sempre la loro somma.

b) Mantenendo i simboli i_1, i_2 e i_3 per indicare le correnti che nel circuito originario scorrono nelle resistenze R_1, R_2 ed R_3, scambiare di posizione R_2 e R_3 eqivale a scambiare il valore di R_2 ed R_3 nell'espressione di i_2:

$$i_2 = \frac{\varepsilon_1/(R_1 + R_4) + \varepsilon_2/R_2}{R_3/(R_1 + R_4) + R_3/R_2 + 1} = 0.5A$$

Inoltre, $V_b - V_a = -i_2 R_3$:

$$V_b - V_a = -i_2 R_3 = -10V$$

c) Si può considerare la maglia contenente i due generatori e le resistenze R_1, R_3 ed R_4, insieme alla prima delle due maglie considerate in precedenza:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 - i_1R_1 - i_2R_2 - i_1R_4 &= 0 \\
\varepsilon_1 - i_1R_1 + i_3R_3 - \varepsilon_2 - i_1R_4 &= 0
\end{aligned}
$$

ottenendo i_1 dalla prima e sostituendola nella seconda si ottengono le espressioni di i_1 e i_3 in funzione di i_2:

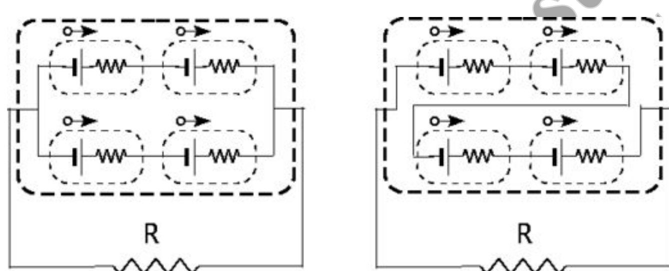
$$
i_1 = \frac{\varepsilon_1 - i_2R_2}{R_1 + R_4}
$$

$$
i_3 = \frac{i_1(R_1 + R_4) + \varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_3} = \frac{\frac{\varepsilon_1 - i_2R_2}{R_1+R_4}(R_1 + R_4) + \varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_3} = \frac{\varepsilon_2 - i_2R_2}{R_3}
$$

Per ottenere $V_b - V_a$ bisogna a questo punto sostituire queste due espressioni nella legge del nodo (a). Queste due espressioni per i_1 e i_3 sono tuttavia le stesse ottenute in precedenza, e quindi il risultato non può che essere lo stesso.

Esame 22/7/2003

L'alimentatore di un circuito è costituito da quattro batterie, ciascuna di *f.e.m.* $\varepsilon_0 = 4.5$ V e resistenza interna $r = 5\ \Omega$. Le quattro batterie possono essere collegate o in parallelo a due a due o tutte e quattro in serie (v. figura). Calcolare la corrente che passa attraverso R e attraverso ciascuna delle batterie nei due casi, sapendo che $R = 40\ \Omega$.



SOLUZIONE:

Nel primo caso (batterie in parallelo), definite i_1, i_2 e i_3 le correnti che scorrono rispettivamente nella prima e nella seconda serie di batterie e nella resistenza R, le equazioni di Kirchhoff si scrivono

$$
\begin{aligned}
2\varepsilon_0 - 2i_1r - i_3R &= 0 \\
2\varepsilon_0 - 2i_2r - i_3R &= 0 \\
i_1 + i_2 - i_3 &= 0
\end{aligned}
$$

sommando membro a membro le prime due equazioni e considerando che in base alla terza $i_1 + i_2 = i_3$ si ottiene

$$
2\varepsilon_0 - 2(i_1 + i_2)r - 2i_3R = 2\varepsilon_0 - 2i_3(r + R) = 0
$$

da cui

$$
i_3 = \frac{\varepsilon_0}{r + R} = 0.1A
$$

e, svolgendo ulteriormente i calcoli, si ottiene $i_1 = i_2 = 0.05$ A.
Nel secondo caso, la corrente è la stessa in ogni punto del circuito, essendo quest'ultimo costituito da una sola maglia. L'unia equazione di Kirchhoff è quindi

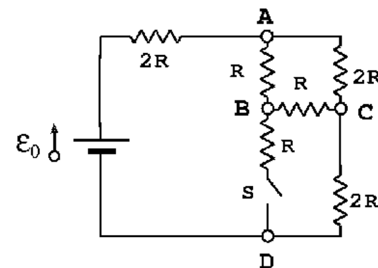
$$4\varepsilon_0 - 4ir - iR = 0$$

da cui

$$i = \frac{4\varepsilon_0}{4r + R} = \frac{\varepsilon_0}{r + R/4} = 0.3A$$

Esame 11/2/2004

Nel circuito in figura, l'interruttore S è inizialmente aperto. Si calcoli, in questa situazione, la dfferenza di potenziale fra i punti A e C. Calcolare anche le correnti che scorrono nelle varie resistenze se viene chiuso l'interruttore, sapendo che, chiudendo S, $V_A - V_C$ non cambia e $V_C - V_D$ diventa uguale a $V_A - V_C$ Dati: $\varepsilon_0 = 10$ V, $R = 10\Omega$



SOLUZIONE

Nel caso in cui l'interruttore sia aperto, il circuito è composto da una resistenza $2R$ in serie al parallelo fra due rami, ciascuno con resistenza equivalente pari a $2R$, e ad un'altra resistenza $2R$. La resistenza equivalente del circuito vale quindi

$$R_{eq} = 2R + \frac{(2R)^2}{2R + 2R} + 2R = 5R$$

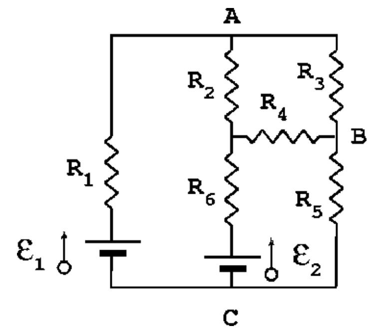
e la corrente che scorre nel generatore vale $i = \varepsilon_0/R_{eq} = \varepsilon_0/5R = 0.2$ A. Questa corrente, essendo la resistenza complessiva del ramo ACB uguale a quella del ramo AB, si dividerà in parti uguali fra i due rami, e quindi in ciascuno di essi scorrerà una corrente pari alla metà di i, cioè una corrente di 0.1 A. La differenza di potenziale fra il punto A ed il punto B varrà quindi $iR = 0.1$ A $\times 20\Omega = 2$ V.
Quando l'interruttore viene chiuso, per poter sapere la corrente che scorre in ciascun ramo è necessario scrivere le equazioni di Kirchhoff per i rami ed i nodi. Ponendo tutte le correnti da sinistra a destra o dall'alto verso il basso, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{aligned}
(nodoA) &\qquad i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\
(nodoC) &\qquad i_2 - i_4 - i_5 = 0 \\
(nodoB) &\qquad i_3 + i_4 - i_6 = 0 \\
(magliaACDA) &\qquad \varepsilon_0 - i_1 2R - i_2 R - i_5 R = 0 \\
(magliaABCA) &\qquad i_2 R - i_3 2R + i_4 R = 0 \\
(magliaCBDC) &\qquad i_5 R - i_4 R - i_6 2R = 0
\end{aligned}$$

Sapendo che $V_A - V_C$ e $V_C - V_D$ sono in questo caso entrambe uguali al valore di $V_A - V_B$ trovato in precedenza (2 V), si ottiene immediatamente $i_3 = i_6 = (V_A - V_B)/2R = 0.1$ A. Dalla equazione del nodo B si ottiene $i_4 = i_6 - i_3 = 0$ e quindi dall'equazione del nodo C $i_5 = i_2$. A questo punto rimangono come incognite solo i_1 ed i_2 che possono essere ottenute ad esempio tramite le equazioni del nodo A e della maglia ACDA, ottenendo $i_1 = 0.33$ A e $i_2 = 0.2$ A.

Esonero 2003/2004 (scritto 1)

Si consideri il circuito in figura. Si scrivano le equazioni del circuito, individuando le correnti fra loro diverse che lo attraversano.



Domande successive:
a) È possibile ridurre in qualche modo il circuito (e, se sì, come), sfruttando le regole delle resistenze in serie o in parallelo?
b) Come si semplificano le equazioni del circuito se tutte le reistenze sono uguali ed i due generatori hanno la stessa forza elettromotrice?
c) Supponendo noto $V_1 = V_A - V_B$ e $V_2 = V_B - V_C$, quanto valgono i_3, i_5, i_4, i_2, i_1 e i_6, sempre nell'ipotesi che tutte le resistenze siano fra loro uguali e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$? (suggerimento: calcolarle nell'ordine indicato, considerando che i_k sia la corrente che scorre nella resistenza R_k)
d) Quanta potenza viene generata/assorbita dai due generatori?

SOLUZIONE

Ognuna delle resistenze è percorsa da una corrente i diversa dalle altre, in quanto ogni volta che si passa da una resistenza a quella successiva si passa attraverso un nodo. Le correnti diverse fra loro presenti nel circuito sono quindi sei. Essendoci quattro nodi, ci saranno tre equazioni dei nodi indipendenti, e le restanti tre equazioni che servono dovranno essere prese dalle equazioni dele maglie. Scegliendo le correnti i_1 e i_5 verso l'alto, le correnti i_2, i_3 e i_6 verso ilbasso e la corrente i_4 verso sinistra, le equazioni dei nodi A, B e C e dele tre maglie a sinistra, in alto a destra ed in basso a destra (ciascuna ercorsa in senso orario) danno complessivamente il sistema di equazioni

$$\begin{aligned}
i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\
i_3 - i_4 + i_5 &= 0 \\
i_6 - i_1 - i_5 &= 0 \\
\varepsilon_1 - i_1 R_1 - i_2 R_2 - \varepsilon_2 - i_6 R_6 &= 0 \\
i_2 R_2 - i_3 R_3 - i_4 R_4 &= 0 \\
i_6 R_6 + \varepsilon_2 + i_4 R_4 + i_5 R_5 &= 0
\end{aligned}$$

Domande successive:
a) no, non essendoci in nessuna maglia due resistenze in serie nè due resistenze in parallelo
b) Chiamando R il valore di tutte le resistenze ed ε il valore di ciascuna delle due f.e.m., il sistema suddetto si può riscrivere

$$\begin{aligned}
i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\
i_3 - i_4 + i_5 &= 0 \\
i_6 - i_1 - i_5 &= 0 \\
-i_1 - i_2 - i_6 &= 0 \\
i_2 - i_3 - i_4 &= 0 \\
(i_6 + i_4 + i_5) R &= -\varepsilon
\end{aligned}$$

c) Per la legge di Ohm, $V_A - V_B = i_3 R$, per cui $i_3 = V_1/R$. Analogamente, per come sono state scelte le correnti, $V_B - V_C = -i_5 R$, da cui ancora $i_5 = -V_2/R$. Note i_3 e i_5, dalla seconda equazione si ricava $i_4 = i_3 + i_5 = V_1/R - V_2/R = (V_1 - V_2)/R$. Noto anche i_4, dalla quarta si ottiene $i_2 = i_3 + i_4 = V_1/R + (V_1 - V_2)/R = (2V_1 - V_2)/R$. Proseguendo, si può ottenere dalla prima $i_1 = i_2 + i_3 = (2V_1 - V_2)/R + V_1/R = (3V_1 - V_2)/R$ ed infine, dalla terza, $i_6 = i_1 + i_5 = (3V_1 - V_2)/R - V_2/R = (3V_1 - 2V_2)/R$. Inserendo i valori dati per R, V_1 e V_2 si ottiene infine

$$
\begin{aligned}
i_1 &= 0.25A \\
i_2 &= 0A \\
i_3 &= 0.25A \\
i_4 &= -0.25A \\
i_5 &= -0.5A \\
i_6 &= -0.25A
\end{aligned}
$$

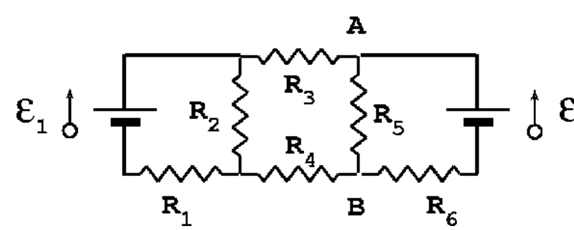
I segni delle correnti ottenuti, se si ricordano i versi di percorrenza ipotizzati, significano che in realtà i_1 e i_3 sono state scelte correttamente (la prima verso l'alto, la seconda verso il basso), i_2 è zero (quindi non scorre nè verso l'alto, nè verso il basso), i_5 e i_6 sono state scelte in verso contrario a quello reale (e quindi i_5 è in realtà diretta verso il basso, mentre i_6 è diretta verso l'alto) e anche i_4 è stata scelta discordamente al reale verso di percorrenza della corrente, e quindi in realtà scorre da sinistra verso destra.
c) In entrambi i generatori la corrente scorre nello stesso verso della f.e.m., quindi entrambi i generatori forniscono energia al circuito. In particolare, con i dati del problema,

$$
\begin{aligned}
W_1 &= i_1 \varepsilon_1 = 2.5W \\
W_2 &= i_6 \varepsilon_2 = 2.5W
\end{aligned}
$$

Esonero 2003/2004 (scritto 2)

Si consideri il circuito in figura. Si scrivano le equazioni del circuito, individuando le correnti fra loro diverse che lo attraversano.

Domande successive:
a) È possibile ridurre in qualche modo il circuito (e, se sì, come), sfruttando le regole delle resistenze in serie o in parallelo?
b) Come si semplificano le equazioni del circuito se tutte le reistenze sono uguali ed i due generatori hanno la stessa forza elettromotrice?
c) Supponendo noto $V_0 = V_A - V_B$, quanto valgono i_5, i_6, i_3, i_4, i_2 e i_1, sempre nell'ipotesi che tutte le resistenze siano fra loro uguali e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$? (suggerimento: calcolarle nell'ordine indicato, considerando che i_k sia la corrente che scorre nella resistenza R_k)
d) Quanta potenza viene generata/assorbita dai due generatori?



SOLUZIONE

Ognuna delle resistenze è percorsa da una corrente i diversa dalle altre, in quanto ogni volta che si passa da una resistenza a quella successiva si passa attraverso un nodo. Le correnti diverse fra loro presenti nel circuito sono quindi sei. Essendoci quattro nodi, ci saranno tre equazioni dei nodi indipendenti, e le restanti tre equazioni che servono dovranno essere prese dalle equazioni dele maglie. Scegliendo le correnti i_1 e i_4 verso sinistra, le correnti i_3 e i_6 verso destra e le correnti i_2 e i_5 verso il basso, le equazioni dei nodi A, B e C e dele tre maglie a sinistra, in alto a destra ed in basso a destra (ciascuna ercorsa in senso orario) danno complessivamente il sistema di equazioni

$$\begin{aligned}
i_3 - i_5 + i_6 &= 0 \\
i_5 - i_4 - i_6 &= 0 \\
i_2 + i_4 - i_1 &= 0 \\
\varepsilon_1 - i_2 R_2 - i_1 R_1 &= 0 \\
i_2 R_2 - i_3 R_3 - i_5 R_5 - i_4 R_4 &= 0 \\
i_5 R_5 - \varepsilon_2 + i_6 R_6 &= 0
\end{aligned}$$

Domande successive:
a) no, non essendoci in nessuna maglia due resistenze in serie nè due resistenze in parallelo
b) Chiamando R il valore di tutte le resistenze ed ε il valore di ciascuna delle due f.e.m., il sistema suddetto si può riscrivere

$$\begin{aligned}
i_3 - i_5 + i_6 &= 0 \\
i_5 - i_4 - i_6 &= 0 \\
i_2 + i_4 - i_1 &= 0 \\
(i_2 + i_1)R &= \varepsilon \\
i_2 - i_3 - i_5 - i_4 &= 0 \\
(i_5 + i_6)R &= \varepsilon
\end{aligned}$$

c) Per la legge di Ohm, $V_A - V_B = i_5 R$, per cui $i_5 = V_0/R$. Analogamente, per come sono state scelte le correnti, $V_A - V_B = -\varepsilon - i_6 R$, da cui ancora $i_6 = (\varepsilon - V_0)/R$. Note i_5 e i_6, dalla prima equazione si ricava $i_3 = i_5 - i_6 = V_0/R - (\varepsilon - V_0)/R = (2V_0 - \varepsilon)/R$ e analogamente dalla seconda si ottiene $i_4 = i_5 - i_6 = (2V_0 - \varepsilon)/R$. Noti i_3, i_4 e i_5, dalla quinta si ottiene $i_2 = i_3 + i_4 + i_5 = (2V_0 - \varepsilon)/R + (2V_0 - \varepsilon)/R + V_0/R = (5V_0 - 2\varepsilon)/R$. Infine, dalla terza equazione si ottiene $i_1 = i_2 + i_4 = (5V_0 - 2\varepsilon)/R + (2V_0 - \varepsilon)/R = (7V_0 - 3\varepsilon)/R$. Inserendo i valori dati per R, V_0 e ε si ottiene infine

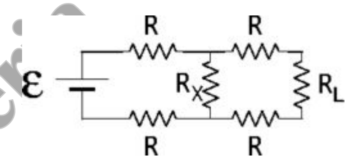
$$\begin{aligned}
i_1 &= 0.5A \\
i_2 &= 0.5A \\
i_3 &= 0A \\
i_4 &= 0A \\
i_5 &= 0.5A \\
i_6 &= 0.5A
\end{aligned}$$

I segni delle correnti ottenuti, se si ricordano i versi di percorrenza ipotizzati, significano che tutti i versi di percorrenza sono stati scelti correttamente, a parte le correnti i_3 e i_4 che, essendo zero, non circolano nè verso destra nè verso sinistra.
c) In entrambi i generatori la corrente scorre nello stesso verso della f.e.m., quindi entrambi i generatori forniscono energia al circuito. In particolare, con i dati del problema,

$$\begin{aligned}
W_1 &= i_1 \varepsilon_1 = 5W \\
W_2 &= i_6 \varepsilon_2 = 5W
\end{aligned}$$

Esame 20/9/2004

Nel circuito in figura $\varepsilon = 20$ V, $R = R_L = 5\Omega$ e R_x è una resistenza che può variare fra zero e 50 Ω. Calcolare l' espressione della corente che scorre in R_L in funzione di R_x. Per quale valore di R_x la potenza dissipata su R_L è pari a 0.2 W?



SOLUZIONE

Chiamando I_1 la corrente cehe scorre in R_L, I_2 la corrente che scorre in R_x e I_3 la corrente che scorre nel generatore, le leggi di Kirchhoff per il circuito si possono scrivere:

$$\varepsilon - 2I_3R - I_2R_x = 0$$

$$I_2R_x - (2R + R_L)I_1 = 0$$

$$I_3 = I_1 + I_2$$

Considerando che $R_L = R$, sostituendo I_3 ottenuto dalla terza nella prima equazione, risolvendo quest'ultima per ottenere I_2 ed inserendo infine il valore di I_2 nella seconda si ottiene

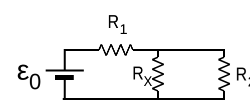
$$\frac{\varepsilon - 2I_1R}{2R + R_x}R_x = 3RI_1 \rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon R_x}{R}\frac{1}{6R + 5R_x}$$

Per rispondere alla seconda domanda, si tiene conto che la potenza dissipata su R_L è pari a $W = I_1^2R$ e quindi afinchè $W = 0.2$ W deve essere $I_1 = \sqrt{W/R} = 0.2$ A. Invertendo la relazione che lega I_1 a R_x si ottiene infine

$$R_x = \frac{6I_1R^2}{\varepsilon - 5RI_1} = 2\Omega$$

Esame 18/1/2005

Nel circuito in figura, la resistenza R_x può essere variata a piacimento. Trovare per quale valore di R_x la potenza dissipata sulla resistenza R_1 è la stessa di quella dssipata su R_2. Per tale valore di R_x, quanto deve valere ε_0 affinchè la potenza dissipata su R_1 sia 120 W? Dati: $R_1 = 30\Omega$, $R_2 = 4R_1$



SOLUZIONE

La potenza dissipata su una generica resistenza R in cui scorre una corrente i vale $W = i^2R$. Per soddisfare la condizione richiesta, è quindi necessario che $i_1^2R_1 = i_2^2R_2$. Essendo $R_2 = 4R_1$, questo corrisponde a $i_1 = 2i_2$. D'altra parte, per la legge dei nodi, $i_1 = i_x + i_2$, e quindi se $i_1 = 2i_2$, si ha $i_x = i_2 = i_1/2$. Essendo poi R_x e R_2 in parallelo, la differenza di potenziale ai capi di R_x deve essere la stessa che si trova ai capi di R_2 e quindi, per la legge di Ohm, $i_xR_x = i_2R_2$ ed essendo $i_x = i_2$ deve essere per forza anche $R_x = R_2 = 120\Omega$.
Per questo valore di R_x, la resistenza equivalente del circuito vale

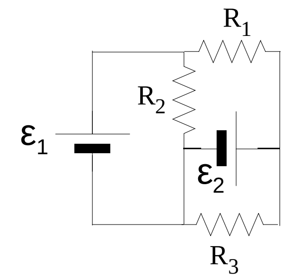
$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2^2}{R_2 + R_2} = R_1 + R_2/2 = R_1 + 2R_1 = 3R_1$$

e quindi la corrente che passa in R_1 vale $i_1 = \varepsilon_0/3R_1$ e la potenza dissipata su R_1 vale $W = (\varepsilon_0/3R_1)^2 R_1 = \varepsilon_0^2/9R_1$. Se si vuole che $W = 100$ W, deve essere

$$\varepsilon_0 = 3\sqrt{WR_1} = 180V$$

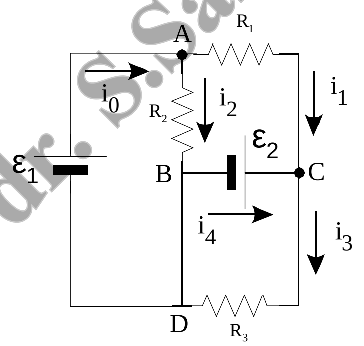
Esame 1/2/2005

Nel circuito in figura, $\varepsilon_1 = 10$ V, $\varepsilon_2 = 1$ V, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 20\Omega$ e $R_3 = 10\Omega$. Si calcoli la corrente che circola atraverso i due generatori. Si determini inoltre in che direzione scorre la corrente, nei singoli rami del circuito ed in particolare nei due generatori.



SOLUZIONE

Si definiscano le correnti che scorrono nel crcuito e le loro direzioni come in figura.



La corrente che circola attraverso il primo generatore si può ottenere considerando la legge dei nodi nel nodo A:

$$i_0 = i_1 + i_2$$

mentre la corrente che circola nel secondo generatore si può ottenere dall'equazione del nodo C:

$$i_4 = i_3 - i_1$$

Per avere i due valori i_0 e i_4 bisogna quindi ottenere i valori di i_1, i_2 e i_3. A questo scopo si può innanzitutto notare che nella maglia in basso a destra sono presenti solo il generatore ε_2 e la resistenza R_3 e quindi la legge delle maglie si scrive

$$\varepsilon_2 - i_3 R_3 = 0 \rightarrow i_3 = \varepsilon_2/R_3 = 0.1A$$

Per quanto riguarda i_2, si procede nello stesso modo considerando la maglia a sinistra, ottenendo

$$\varepsilon_1 - i_2 R_2 = 0 \rightarrow i_2 = \varepsilon_1/R_2 = 0.5A$$

Infine, per ottenere i_1 si può prendere in considerazione la maglia formata dal generatore ε_1, la resistenza R_1 ed il generatore ε_2 (maglia ACBDA), ottenendo

$$\varepsilon_1 - i_1 R_1 - \varepsilon_2 = 0 \rightarrow i_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/R_1 = 1.8A$$

Utilizzando le relazioni indicate in precedenza si ottiene quindi

$$i_0 = i_1 + i_2 = 2.3A$$

e

$$i_4 = i_3 - i_1 = -1.7A$$

La corrente scorre quindi dal basso verso l'alto nel generatore ε_1 e da destra a sinistra nel generatore ε_2. Per quanto riguarda le tre resistenze, la corrente scorre dall'alto in basso nella resistenza R_2, da sinistra a destra nella resistenza R_1 e da destra a sinistra nella resistenza R_3, come indicato dal fatto che tutte e tre queste correnti risultano essere positive avendo scelto i versi di percorrenza come in figura.

3 Circuiti con condensatori e resistenze

In generale, non è possibile in questi casi applicare le leggi di Kirchhoff nella loro forma più semplice (vedi circuiti con resistenze) in quanto l'eventuale passaggio di corrente attraverso uno o più condensatori può avvenire solo in regime transitorio, ovvero per un tempo limitato: al passaggio di corrente, infatti, sul condensatore si accumula carica elettrica ($\frac{dQ}{dt} = i$) fino a quando la caduta di potenziale ai capi del condensatore $\Delta V = Q/C$ eguaglia la forza elettromotrice del generatore, e a quel punto la corrente non passa più attraverso il circuito. Non è quindi lecito usare la legge dei nodi o quella delle maglie in modo assoluto, non essendoci alcuna corrente che transita nel circuito, una volta che il condensatore è carico.

Tuttavia, nell'intervallo di tempo in cui il condensatore si carica, le leggi di Kirchhoff valgono ancora. Per questioni di semplicità, vengono di solito considerati solo circuiti ad una sola maglia (e quindi senza nodi). L'equazione dei nodi non è quindi in generale utile, mentre l'equazione della maglia porta ai risultati noti del processo di carica/scarica di un condensatore:

1. Carica di un condensatore:
   - Differenza di potenziale sul condensatore: $V_C(t) = \varepsilon(1 - \exp\{-t/RC\})$
   - Differenza di potenziale sulla resistenza : $V_R(t) = \varepsilon \exp\{-t/RC\}$
   - Corrente nel circuito: $I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \exp\{-t/RC\}$
2. Scarica di un condensatore:
   - Differenza di potenziale sul condensatore: $V_C(t) = V(t=0) \exp\{-t/RC\}$
   - Differenza di potenziale sulla resistenza : $V_R(t) = V(t=0) \exp\{-t/RC\}$
   - Corrente nel circuito: $I(t) = \frac{V(t=0)}{R} \exp\{-t/RC\}$

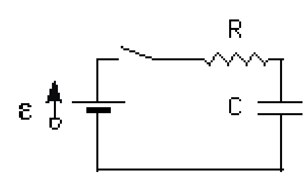
Esercizi preliminari

Esercizi relativi alla soluzione di equazioni differenziali lineari (ANALISI)

Esempi tratti da esercizi di esame

Esame 20/1/2003 (scritto A)

Si consideri il circuito in figura, con $\varepsilon = 10.0V$ e $R = 10.0k\Omega$. La capacità è costituita da un condensatore piano, riempito da una sostanza dielettrica, il cui rapporto fra superficie e distanza fra i piatti vale $A/d = 10.0m$. Al tempo $t = 0$ viene chiuso l'interruttore. Se al tempo $t_1 = 10^{-4}s$ $V_C(t_1) = 7.6V$, quanto vale la costante dielettrica del materiale che riempie il condensatore?



SOLUZIONE:

Il circuito in esame è un circuito RC, e pertanto l'andamento in funzione del tempo della caduta di potenziale ai capi del condensatore si può scrivere come

$$V_C(t) = \varepsilon(1 - exp(-t/\tau))$$

dove $\tau = RC$. Dato che al tempo t_1 $V_C = 7.6V$, invertendo la relazione precedente si ottiene

$$\tau = -\frac{t_1}{ln(1 - V_C(t_1)/\varepsilon)} = 7.0 \times 10^{-5}s$$

da cui anche

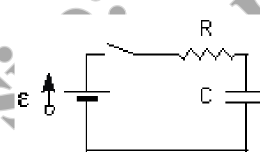
$$C = \tau/R = 7.0 \times 10^{-9}F$$

Essendo peraltro per un condensatore piano $C = \epsilon_r\epsilon_0 A/d$ si ottiene infine

$$\epsilon_r = \frac{Cd}{\epsilon_0 A} = 79.1$$

Esame 20/1/2003 (scritto B)

Si consideri il circuito in figura, con $\varepsilon_1 = 10.0V$ e $R = 5.0k\Omega$. La capacità è costituita da un condensatore piano, riempito da una sostanza dielettrica, il cui rapporto fra superficie e distanza fra i piatti vale $A/d = 10.0m$. Al tempo $t = 0$ viene chiuso l'interruttore. Se la costante dielettrica del materiale che riempie il condensatore vale $\epsilon_r = 16$, quanto vale la caduta di potenziale ai capi della resistenza V_R al tempo $t_1 = 10^{-5}s$?



SOLUZIONE:

Il circuito in esame è un circuito RC, e pertanto l'andamento in funzione del tempo della caduta di potenziale ai capi della resistenza si può scrivere come

$$V_R(t) = \varepsilon exp(-t/\tau)$$

dove $\tau = RC$. Dato che la costante dielettrica del mteriale vale $epsilon_r = 16$, la capacità del condensatore piano vale

$$C = \epsilon_r\epsilon_0 A/d = 1.4 \times 10^{-9}F$$

da cui

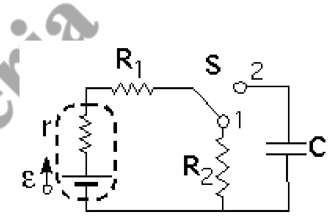
$$\tau = RC = 7.1 \times 10^{-6}s$$

Inserendo tale valore nell'espressione di $V_R(t)$ si ottiene infine

$$V_R(t_1) = \varepsilon exp(-t_1/\tau) = 2.4V$$

Esame 10/2/2003

Nel circuito in figura, l'interruttore S e' inizialmente posto nella posizione 1, ed in questa posizione la corrente che scorre nel circuito vale $i = 10mA$. All' istante $t = 0$ l'interruttore viene spostato nella posizione 2, e dopo un tempo $t = 0.14s$ la tensione ai capi del condensatore vale $V_C = 8.65V$. Sapendo che $R_1 = 2R_2$, quanto vale r, la resistenza interna del generatore reale? Dati: $\varepsilon = 10V$, $C = 1mF$.



SOLUZIONE:

Quando l'interruttore è nella posizione 1 il circuito è composto da tre resistenze in serie (r, R_1 e R_2) alimentate da un generatore di $f.e.m.$ ε. La corrente che scorre nel circuito vale quindi

$$i_0 = \frac{\varepsilon}{r + R_1 + R_2} = \frac{\varepsilon}{r + 3R_2} = 100mA$$

(avendo usato il fatto che, come indicato nel testo, $R_1 = 2R_2$). Quando invece l'nterruttore viene spostato nella posizione 2 il circuito è un RC in cui $R = r + R_1$. L'andamento in funzione del tempo della differenza di potenziale ai capi del condensatore seguirà quindi l'espressione

$$V_C(t) = \varepsilon(1 - e^{-t/\tau})$$

con $\tau = (r + R_1)C = (r + 2R_2)C$. Al tempo $t = 0.14s$ si ha $V_C = 8.65V$ e quindi

$$8.65 = 10(1 - e^{-0.14/\tau}) \rightarrow \tau = -0.14/ln(1 - 8.65/10) = 7 \times 10^{-2}s$$

Riassumendo:

$$\begin{aligned} r + 3R_2 &= \varepsilon/i_0 = 100\Omega \\ r + 2R_2 &= \tau/C = 70\Omega \end{aligned}$$

da cui si ottiene infine

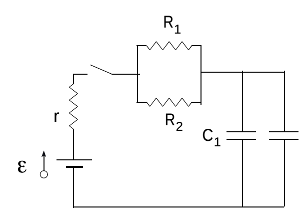
$$R_2 = 100 - 70 = 30\Omega \rightarrow R_1 = 2R_2 = 60\Omega$$

e

$$r = 70 - 2R_2 = 10\Omega$$

Esame 10/9/2003

Nel circuito in figura, $C_1 = 25\mu$F, $C_2 = 75\mu$F, $r = 5\Omega$ e $R_1 = 200\Omega$, mentre R_2 è una resistenza che può essere variata da zero a infinito. Calcolare il tempo caratteristico τ del circuito RC equivalente in funzione del valore di R_2, trovando il valore massimo ed il valore minimo possibili per τ.



SOLUZIONE:

Le due capacità sono in parallelo, e sono quindi assimilabili ad una sola capacità $C_{eq} = C_1 + C_2 = 100\mu$F. Le tre resistenze sono invece una resistenza (r) in serie a due resistenze fra loro in parallelo (R_1 ed R_2), che complessivamente sono assimilabili ad una sola resistenza

$$R_{eq} = r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (1)$$

Il tempo caratteristico del circuito, fatta questa riduzione, è

$$\tau = R_{eq}C_{eq} = \left(r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)(C_1 + C_2) \tag{2}$$

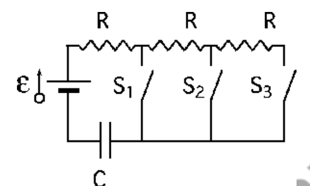
I valori massimo e minimo di τ si ottengono in corrispondenza dei valori minimo e massimo di R_{eq}, ovvero per i valori minimo e massimo del rapporto $R_1R_2/(R_1 + R_2)$. Questi corrispondono ai casi $R_2 = 0$ (per il quale $R_1R_2/(R_1+R_2) = 0 \rightarrow R_{eq} = r = 5\Omega$) e $R_2 = \infty$ (per il quale $R_1R_2/(R_1+R_2) = R_1 \rightarrow R_{eq} = r + R_1 = 205\Omega$). I valori di τ corrispondenti sono quindi

$$\tau_{min} = r(C_1 + C_2) = 500\mu s \tag{3}$$

$$\tau_{max} = (r + R_1)(C_1 + C_2) = 20.5ms \tag{4}$$

Esame 20/1/2004 (scritto A)

Si consideri il circuito in figura, nel quale le tre resistenze hanno tutte lo stesso valore $R = 5\Omega$, mentre il condensatore ha capacità $C = 1mF$. Si chiede quale dei tre interruttori S_1, S_2 o S_3 deve essere chiuso affichè la caduta di potenziale ai capi del condensatore sia pari ad un terzo di ε dopo un tempo $t_0 = 10$ ms dal momento della chiusura dell'interruttore.



SOLUZIONE:

In un circuto RC, la caduta di potenziale ai capi del condensatore, in funzione del tempo, è data da $V_C = \varepsilon(1 - e^{-t/\tau})$, con $\tau = RC$. Se si vuole avere $V_C = \varepsilon/3$ per $t = t_0$ deve essere

$$1 - e^{-t_0/\tau} = 1/3 \rightarrow t_0/\tau = -ln(2/3)$$

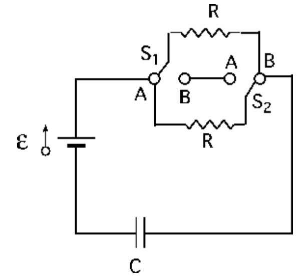
e quindi $\tau = -t_0/ln(2/3) = 0.01$ s, e quindi

$$R = \tau/C = 10\Omega$$

Per ottenere questo valore di R, è necessario chiudere l'interruttore S_2 in modo che il circuito contenga la capacità C e due resistenze da 5Ω in serie.

Esame 20/1/2004 (scritto B)

Si consideri il circuito in figura, nel quale le due resistenze hanno lo stesso valore $R = 5\Omega$, mentre il condensatore ha capacità $C = 1mF$. Sapendo che i due interruttori S_1 ed S_2 possono essere posti solo nelle due posizioni A e B, determinare in quale delle due posizioni deve essere messo ciascuno dei due interruttori affichè la caduta di potenziale ai capi del condensatore sia pari ad un terzo di ε dopo un tempo $t_0 = 10$ ms dal momento della chiusura dell'interruttore.



SOLUZIONE:

In uncircuto RC, la caduta di potenziale ai capi del condensatore, in funzione dle tempo, è data da $V_C = \varepsilon(1 - e^{-t/\tau})$, con $\tau = RC$. Se si vuole avere $V_C = \varepsilon/3$ per $t = t_0$ deve essere

$$1 - e^{-t_0/\tau} = 1/3 \rightarrow t_0/\tau = -ln(2/3)$$

e quindi $\tau = -t_0/ln(2/3) = 0.01$ s, e quindi

$$R = \tau/C = 10\Omega$$

Per ottenere questo valore di R, le due resistenze R_1 ed R_2 devono risultare collegate in serie, in modo che la resistenza complessiva sia pari a $R_{eq} = R_1 + R_2$. Per fare questo, è necessario porre l'interruttore S_1 sulla posizione B e l'interruttore S_2 nella posizione A.