Fisica Generale L-A - Prof. M. Villa

CdL in Ingegneria Civile (A-K)

I parziale - 20 febbraio 2006 - **Compito A**

Esercizio 1: In un certo istante, un punto materiale è in moto lungo un arco di circonferenza. Sapendo che rispetto ad un certo SR, la velocità e l'accelerazione valgono $\vec{v} = 4\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} - 3\hat{k} \quad (m/s)$ e $\vec{a} = -2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \quad (m/s^2)$, determinare la velocità scalare, l'accelerazione tangenziale ed il raggio di curvatura della traiettoria.

Esercizio 2: La posizione di un punto materiale è individuata dal vettore posizione $\vec{r}(t) = 3t^3\hat{\imath} - t^{1/2}\hat{\jmath} + 2t^2\hat{k} \quad (m)$ con $t > 0$ espresso in secondi. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante di tempo ed il raggio di curvatura della traiettoria per *t=1 s*.

Esercizio 3: Un proiettile di massa M viene sparato da fermo da un cannone con un angolo $\alpha = 45°$ rispetto ad un piano orizzontale. Determinare:
1) il modulo *v* della velocità con cui si deve sparare il proiettile affinché colpisca un bersaglio che dista orizzontalmente dal cannone di *D=150 m* e si trova ad una altezza D/6 rispetto al cannone; 2) l'angolo con cui il proiettile colpisce il bersaglio; 3) il raggio di curvatura nel punto di massimo.

Esercizio 4: Una sfera di massa M=2 kg è appesa al ramo di un albero tramite un filo ideale di lunghezza *l=1,5 m*. Sapendo che in un certo istante soffia un vento parallelo al terreno e con una velocità *v=4 m/s*, in grado di esercitare una forza $\vec{F} = k\vec{v}$ sulla sfera e che, in condizioni di equilibrio, il filo devia rispetto alla direzione verticale di un angolo $\theta = 20°$, determinare la tensione del filo e il coefficiente *k* della forza.

Domande:
5) Cos'è una grandezza fisica? Quali sono le grandezze fondamentali in meccanica?
6) Quali sono le caratteristiche di un filo ideale in fisica?
7) Spiegare il principio d'inerzia.
8) L'accelerazione di gravità $\vec{g}$ è costante solo per un osservatore inerziale. Un osservatore solidale con la terra e che ruota con essa misura una accelerazione di gravità inferiore. Sapendo che la differenza tra le due è dovuta solo al moto di rotazione della terra, determinare quali tra le seguenti formule è quella giusta può descrivere la differenza di gravità Δg per i due osservatori sapendo che all'equatore questa dipende solo dalla pulsazione terrestre $\vec{\omega}$ e dal raggio *R* della Terra:
$a)\ \Delta g = \omega R \qquad b)\ \Delta g = \omega R^2 \qquad c)\ \Delta g = \omega / R \qquad d)\ \Delta g = \omega^2 R$
Determinarne inoltre il valore.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9,8\, m/s^2$

Fisica Generale L-A - Prof. M. Villa

CdL in Ingegneria Civile (A-K)

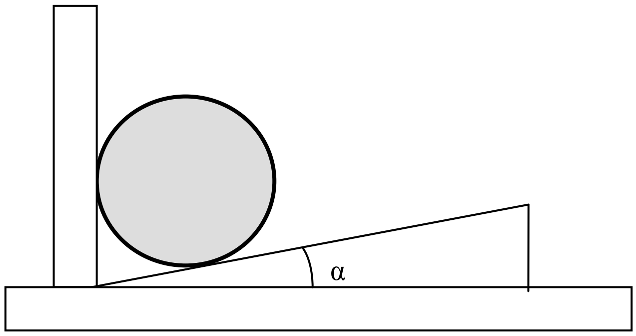
I parziale - 20 febbraio 2006 - **Compito B**

Esercizio 1: Dati i vettori $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ e $\vec{c} = 3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$, si calcoli la proiezione del vettore $\vec{a}$ su una retta perpendicolare al piano individuato dai vettori $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

Esercizio 2: Un sasso viene lasciato cadere da un'altezza di *30 m* e nello stesso istante un altro sasso viene lanciato in alto partendo da terra. Se i due sassi si incontrano ad un'altezza di *15 m*, qual è la velocità iniziale del secondo sasso? che velocità hanno i due sassi quando si incontrano?

Esercizio 3: Un aereo sta muovendosi esattamente verso est mentre la prora del velivolo è puntata in una qualche direzione più inclinata verso sud per compensare un vento costante che proviene da sud-sud-ovest. L'aeroplano (P) ha velocità $\vec{V}_{PA}$ rispetto all'aria (A) di modulo *215 km/h* e direzione formante un angolo θ verso sud rispetto a est. Il vento costante ha velocità $\vec{V}_{AT}$ rispetto al terreno (T) con modulo di *65 km/h* e direzione che forma un angolo di 22,5° ad est rispetto al nord (il vento è diretto in direzione nord-nord-est). Qual è la velocità dell'aereo rispetto al terreno, in modulo e direzione?

Esercizio 4: Una pallina di massa M=0,2 kg è ferma tra una superficie verticale ed un piano inclinato di un angolo $\alpha = 20°$, come mostrato in figura. Determinare le reazioni vincolari della superficie verticale e del piano inclinato.



Domande:

5) L'operazione somma tra vettori gode della proprietà commutativa. Quale significato *fisico* deriva da questa proprietà?

6) Qual è la definizione storica e quella attuale di metro?

7) Spiegare cosa sono i sistemi di riferimento inerziali ed il loro uso in fisica.

8) Un grave di massa M in caduta libera nell'aria è sottoposto ad una forza di attrito la cui espressione è: $\vec{F} = -k\vec{v}$ con $\vec{v}$ velocità del punto e k una costante. Sapendo che la velocità di caduta raggiunge un valore limite costante v_L, determinare quali, tra le seguenti formule, è fisicamente accettabile per v_L :

$a)\ v_L = Mg/k \qquad b)\ v_L = Mk/g \qquad c)\ v_L = kg/M \qquad d)\ v_L = Mgk$

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\,m/s^2$

Fisica Generale L-A - Prof. M. Villa

CdL in Ingegneria Civile (A-K)

I parziale - 20 febbraio 2006 - **Compito C**

Esercizio 1: In un certo istante, un punto materiale è in moto in un piano lungo un arco di circonferenza. Sapendo che rispetto ad un certo SR, la velocità e l'accelerazione valgono $\vec{v} = 4\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} - 3\hat{k} \quad (m/s)$ e $\vec{a} = -2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \quad (m/s^2)$, determinare l'accelerazione normale, il raggio di curvatura della traiettoria ed un versore normale al piano in cui avviene il moto.

Esercizio 2: La posizione di un punto materiale è individuata dal vettore posizione $\vec{r}(t) = (t^3 - 5)\hat{\imath} - (t-3)\hat{\jmath} - t^2\hat{k} \quad (m)$ con t espresso in secondi. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante di tempo, la terna di versori intrinseca ed il raggio di curvatura della traiettoria per *t=2 s.*

Esercizio 3: Un proiettile di massa M viene sparato orizzontalmente da fermo da un cannone posto su una altura che si eleva di *h=50 m* rispetto alla pianura circostante. Determinare:
1) il modulo *v* della velocità con cui si deve sparare il proiettile affinché colpisca un bersaglio nella pianura e che dista orizzontalmente dal cannone di *D=250 m*; 2) l'angolo con cui il proiettile colpisce il bersaglio; 3) la velocità scalare del proiettile quando colpisce il bersaglio.

Esercizio 4: Una sfera di massa M=2 kg è appesa sul soffitto di un laboratorio tramite un filo ideale di lunghezza *l=1,5 m*. Sapendo che la massa è in moto e descrive delle traiettorie circolari di raggio R=30 cm, parallele al terreno, con una velocità angolare ω costante, determinare la tensione del filo ed il periodo del moto.

Domande:
5) A cosa servono i modelli in fisica?
6) Cosa è un vincolo ? Cos'è una reazione vincolare?
7) Spiegare il secondo principio della meccanica.
8) A causa della rotazione della terra, un corpo che cade da una altezza *h* segue una traiettoria che è solo approssimativamente verticale. In realtà arriva a terra in un punto che è sempre spostato verso est rispetto alla verticale. Sapendo che l'entità dello spostamento Δx dipende da *h*, dall'accelerazione di gravità *g* e dalla pulsazione terrestre $\vec{\omega}$, determinare quale delle seguenti relazioni è fisicamente accettabile per:
$a)\ \Delta x = 4\omega hg/3 \qquad b)\ \Delta x = 2\omega h\sqrt{2gh}/3 \qquad c)\ \Delta x = 2\omega h\sqrt{2h/g}/3 \qquad d)\ \Delta x = \omega^{-2}h\sqrt{2g/h}/3$
Determinarne inoltre il valore per un corpo che cade da una altezza *h=100 m*.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\,m/s^2$

Fisica Generale L-A - Prof. M. Villa

CdL in Ingegneria Civile (A-K)

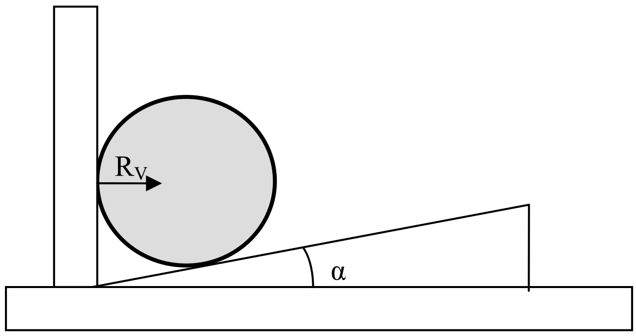
I parziale - 20 febbraio 2006 - **Compito D**

Esercizio 1: Dati i vettori $\vec{a} = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ e $\vec{c} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, si calcoli la proiezione del vettore $\vec{a}$ su una retta perpendicolare al piano individuato dai vettori $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

Esercizio 2: Un giocoliere lancia verticalmente una prima pallina che raggiunge un'altezza *h=4 m* misurata rispetto alla mano del giocoliere. Se nel momento di altezza massima della prima pallina il giocoliere lancia verticalmente una seconda pallina con la stessa velocità di lancio della prima, a che quota le due palline si incontrano? Che velocità hanno le due palline in quel momento?

Esercizio 3: Due punti hanno vettori posizione rispettivamente pari a $\vec{r}_1 = -2t^3\hat{\imath} + t^{1/2}\hat{\jmath} - 3t\hat{k} \quad (m)$ e $\vec{r}_2 = t^{1/2}\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + 2t\hat{k} \quad (m)$. Determinare i valori della velocità relativa e dell'accelerazione relativa all'istante *t=3 s*.

Esercizio 4: Una pallina di massa M è ferma tra una superficie verticale ed un piano inclinato di un angolo $\alpha = 25°$, come mostrato in figura. Determinare la massa della pallina e la reazione vincolare del piano inclinato sapendo che la reazione vincolare del piano verticale è pari a $R_V = 4N$.



Domande:

5) Spiegare che cosa si intende per problema *diretto* e per problema *inverso* della cinematica.
6) Quali sono le caratteristiche delle trasformazioni galileiane tra sistemi di riferimento?
7) Spiegare che tipo di relazione è la $\vec{F} = m\vec{a}$ e in quali casi è valida.
8) La forza elastica di una molla può essere descritta dalla relazione $\vec{F} = -k\vec{r}$. Determinare le dimensioni della costante k. Sapendo che un punto di massa M sottoposto ad una forza elastica di costante *k* ha un moto periodico di pulsazione ω dipendente da M e da *k* solamente, determinare sulla base delle dimensioni la relazione accettabile :
$a)\ \omega = k^2M^2 \qquad b)\ \omega = \sqrt{k/M} \qquad c)\ \omega = \sqrt{kM} \qquad d)\ \omega = k^2/M^2$

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\, m/s^2$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

M. Villa

21/3/2006

II Compito parziale - A

1) Un satellite artificiale percorre un'orbita radente alla superficie della Luna (raggio dell'orbita = raggio della Luna). Indicando con T il periodo di rivoluzione del satellite e con G la costante di gravitazione universale, scrivere l'espressione della densità media ρ_L della Luna.

2) Due sferette di masse m_1 e m_2, assimilabili a punti materiali, sono appoggiate in quiete sopra un piano orizzontale liscio. Esse sono collegate da un filo e tengono tra di loro compressa una molla di massa trascurabile. Si indichi con V l'energia potenziale immagazzinata nella molla. Ad un certo istante il filo viene tagliato, la molla si decomprime e si stacca dal sistema e le due sferette sono lasciate libere di muoversi. Calcolare le espressioni delle velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ assunte dalle due sferette.

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{3x^2y\,\vec{i} + (x^3 + 4yz^2)\,\vec{j} + 4y^2z\,\vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

4) Un disco omogeneo di raggio R=1.5 m e massa M=20 kg ruota con una velocità iniziale ω=5 s^{-1} attorno ad un asse normale alla superficie del disco e passante per il suo centro. Ad un certo istante (t=0) viene applicata sul bordo del disco una forza d'attrito di modulo F=6 N, in grado di rallentare il disco. Se la forza agisce solo per un intervallo di tempo di t=4 s, qual'è la velocità angolare del disco dopo la fine dell'applicazione della forza? Quanta energia è stata persa?

5) Spiegare le conseguenze della prime due leggi di Keplero.
6) Enunciare e dimostrare il teorema delle forze vive.
7) Enunciare e dimostrare il teorema di Koenig per il corpo rigido.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\,m/s^2$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

M. Villa

21/3/2006

II Compito parziale - B

1) Un satellite artificiale percorre un'orbita radente alla superficie della Luna (raggio dell'orbita = raggio della Luna). Indicando con ρ_L la densità media della Luna e con G la costante di gravitazione universale, scrivere l'espressione del periodo di rivoluzione del satellite.

2) Due sferette di masse m_1 e m_2, assimilabili a punti materiali, scivolano l'una verso l'altra sopra un piano orizzontale liscio con velocità rispettivamente $\vec{v}_1 = v_1 \vec{i}$ e $\vec{v}_2 = -v_2 \vec{i}$. Ad un certo istante esse, urtandosi, rimangono attaccate l'una all'altra per mezzo di un piccolo gancio, comprimendo nello stesso tempo una molla di massa trascurabile tra esse interposta. Calcolare le espressioni della velocità v_f assunta dal sistema dopo l'urto e l'energia ΔE immagazzinata nella molla.

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{(y^3 + 4xz^2)\,\vec{i} + 3xy^2\,\vec{j} + 4x^2z\,\vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

4) Un disco omogeneo di raggio R=1.5 m e massa M=20 kg, sul cui bordo esterno è avvolto un lungo filo ideale inestensibile, è posto in un piano verticale ed è libero di ruotare attorno ad un asse fisso. All'estremo libero del filo è posta una massa m=2 kg. Se il sistema è inizialmente in quiete, determinare l'accelerazione della massa e la sua velocità dopo una caduta di h=4 m.

5) Discutere il teorema di conservazione dell'energia meccanica.
6) Discutere le proprietà del centro di massa.
7) Discutere le forze impulsive.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\, m/s^2$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

M. Villa

21/3/2006

II Compito parziale - C

1) Sapendo che la Luna compie la sua rivoluzione intorno alla terra in un tempo T e indicando con M_T la massa della terra e con G la costante di gravitazione universale, scrivere l'espressione del raggio dell'orbita lunare nell'ipotesi che la traiettoria sia circolare.

2) Due dischetti di momenti d'inerzia I_1 e I_2 ruotano attorno allo stesso asse fisso, coincidente con il loro asse di simmetria normale, con velocità angolari $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$ e $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{k}$. Ad un certo istante i due dischetti vengono messi a contatto e (a causa dell'attrito tra le loro superfici) assumono la stessa velocità angolare. Ragionando come per un urto completamente anelastico, calcolare le espressioni della velocità angolare finale ω_f assunta dal sistema e l'energia cinetica dissipata ΔE.

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{4xz^2\ \vec{i} + 3y^2z\ \vec{j} + (y^3 + 4x^2z)\vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

4) Un disco omogeneo di raggio R=3.5 m e massa M=30 kg ruota con una velocità iniziale ω=4 s^{-1} attorno ad un asse normale alla superficie del disco e passante per il suo centro. Ad un certo istante (t=0) si frena il disco con un meccanismo in gradi di applicare una forza d'attrito di modulo F ad una distanza di 3R/4 dal centro del disco, in modo da rallentare il disco. Se alla forza occorrono solo un intervallo di tempo di t=5 s per fermare il disco, qual'e' il modulo della forza? Quanta energia è stata persa?

5) Discutere le proprietà della forza di attrazione gravitazionale.
6) Discutere le proprietà del momento d'inerzia.
7) Discutere le caratteristiche delle forze d'attrito.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\, m/s^2$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

M. Villa

21/3/2006

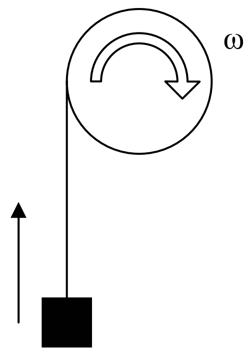
II Compito parziale - D

1) Indicando con R il raggio dell'orbita della Luna attorno alla Terra, con M_T la massa della terra e con G la costante di gravitazione universale, scrivere l'espressione del periodo di rivoluzione T della Luna (si consideri l'orbita circolare).

2) Due dischetti di momenti d'inerzia I_1 e I_2 possono ruotare attorno allo stesso asse fisso, coincidente con il loro asse di simmetria normale. Inizialmente il disco 1 è fermo, mentre il disco 2 ruota con velocità angolare $\vec{\omega}_2 = \omega_2\,\vec{k}$. Ad un certo istante i due dischetti vengono messi a contatto e (a causa dell'attrito tra le loro superfici) assumono la stessa velocità angolare. Ragionando come per un urto completamente anelastico, calcolare le espressioni della velocità angolare finale ω_f assunta dal sistema e l'energia cinetica dissipata ΔE.

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{3x^2z\,\vec{i} + 4yz^2\,\vec{j} + (x^3 + 4y^2z)\,\vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

4) Un disco omogeneo di raggio R=1.5 m e massa M=20 kg, sul cui bordo esterno è fissato l'estremo di un lungo filo ideale inestensibile, è posto in un piano verticale ed è libero di ruotare attorno ad un asse fisso. All'estremo libero del filo è posta una massa m=2 kg. Se il disco è inizialmente in moto e all'istante t=0 ha una velocità angolare ω=2 s^{-1} diretta in modo tale da far *salire* la massa m, determinare l'accelerazione della massa m e di quanto può salire la massa prima di cadere di nuovo.



5) Dedurre la terza legge di Keplero dalla legge di gravitazione di Newton nel caso di orbite circolari.
6) Enunciare e dimostrare il teorema di Huygens-Steiner.
7) Spiegare le equazioni cardinali della dinamica.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9,8\,m/s^2$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

M. Villa

21/3/2006

II Compito parziale - A

1) Un satellite artificiale percorre un'orbita radente alla superficie della Luna (raggio dell'orbita = raggio della Luna). Indicando con T il periodo di rivoluzione del satellite e con G la costante di gravitazione universale, scrivere l'espressione della densità media ρ_L della Luna.

Soluzione: Si vuole determinare la densità media della luna definita come:
$\rho_L = \frac{M_{luna}}{V_{luna}} = \frac{M_{luna}}{\frac{4\pi}{3} R^3}$.
Il satellite artificiale sente una forza di attrazione gravitazionale di modulo pari a $F = \frac{G M_{luna} m_{sat}}{R^2}$ dove R è il raggio dell'orbita, coincidente con il raggio della Luna. Dato che il satellite percorre un'orbita circolare a velocità areolare costante (II legge di Keplero), la velocità angolare ω del satellite sarà costante. L'accelerazione del satellite è quindi solo centripeta: $a = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$. Per il secondo principio della dinamica avremo quindi che: $F = m_{sat} a$. Dopo opportune semplificazioni si trova che $\frac{M_{luna}}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GT^2}$. Troviamo quindi che $\rho_L = \frac{M_{luna}}{V_{luna}} = \frac{M_{luna}}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{3}{4\pi} \frac{4\pi^2}{GT^2} = \frac{3\pi}{GT^2}$.

2) Due sferette di masse m_1 e m_2, assimilabili a punti materiali, sono appoggiate in quiete sopra un piano orizzontale liscio. Esse sono collegate da un filo e tengono tra di loro compressa una molla di massa trascurabile. Si indichi con V l'energia potenziale immagazzinata nella molla. Ad un certo istante il filo viene tagliato, la molla si decomprime e si stacca dal sistema e le due sferette sono lasciate libere di muoversi. Calcolare le espressioni delle velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ assunte dalle due sferette.

Soluzione: Il problema è un tipico problema d'urto dove non agiscono forze esterne (quindi si conserva la quantità di moto) e nello stato iniziale è disponibile una energia sotto forma di energia potenziale di una molla. La richiesta di conservazione della quantità di moto ci porta a dire che $\vec{Q}_{iniziale} = \vec{Q}_{finale}$, ma nello stato iniziale il sistema è in quiete, quindi $\vec{Q}_{iniziale} = \vec{0}$. Troviamo quindi una prima relazione tra $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$: $\vec{Q}_{finale} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{Q}_{iniziale} = \vec{0}$ da cui $\vec{v}_2 = -\frac{m_1\vec{v}_1}{m_2}$. Si può trovare una seconda relazione richiedendo la conservazione dell'energia. Nello stato iniziale l'energia è interamente di natura elastica: $E_{iniziale} = V$. Nello stato finale l'energia è solo di natura cinetica: $E_{finale} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$. Richiedendo la conservazione dell'energia ($E_{iniziale} = E_{finale}$) e sfruttando la prima relazione, si può risolvere per il modulo di $\vec{v}_1$: $v_1 = \sqrt{\frac{2Vm_2}{m_1(m_1+m_2)}}$ e conseguentemente $v_2 = \sqrt{\frac{2Vm_1}{m_2(m_1+m_2)}}$.

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{3x^2y\,\vec{i} + (x^3 + 4yz^2)\,\vec{j} + 4y^2z\,\vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

Soluzione: si verifica che $\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \vec{0}$, quindi il campo è *conservativo*. Il potenziale può essere trovato facendo un integrale di linea che partendo dal punto *O(0,0,0)* passi in successione i punti *A(x,0,0), B(x,y,0), C(x,y,z)* facendo dei tratti rettilinei. Si trova che

$$V(x,y,z) = -\int_{OABC} \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s} = -\left(\int_{OA} F_x(x',0,0)dx' + \int_{AB} F_y(x,y',0)dy' + \int_{BC} F_z(x,y,z')dz'\right) =$$
$$= \alpha(x^3y + 2y^2z^2)$$

4) Un disco omogeneo di raggio R=1.5 m e massa M=20 kg ruota con una velocità iniziale ω=5 s^{-1} attorno ad un asse normale alla superficie del disco e passante per il suo centro. Ad un certo istante (t=0) viene applicata sul bordo del disco una forza d'attrito di modulo F=6 N, in grado di rallentare il disco. Se la forza agisce solo per un intervallo di tempo di t=4 s, qual'è la velocità angolare del disco dopo la fine dell'applicazione della forza? Quanta energia è stata persa?

Soluzione: La forza di attrito è applicata tangenzialmente al bordo esterno, diretta in direzione opposta alla velocità dei punti sul bordo del disco. La forza F giace quindi nel piano del disco. Preso un polo di riduzione sull'asse del disco, sul sistema agisce un momento delle forze $\vec{M}^E = \vec{r}\wedge\vec{F}$ la cui direzione è coincidente a quella dell'asse del disco e il cui verso è opposto a quello della velocità angolare. Per la seconda equazione cardinale della dinamica, posto $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$, si ha:
$\dfrac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}^E$. Il momento angolare è dato da: $\vec{K} = I\vec{\omega} = \frac{1}{2}MR^2\omega\hat{k}$; il momento delle forze è pari a $\vec{M}^E = \vec{r}\wedge\vec{F} = -RF\hat{k}$. Dalla seconda equazione cardinale, si trova quindi che durante l'applicazione della forza d'attrito vi è una decelerazione angolare costante pari a $\dot{\omega} = -\dfrac{2F}{MR}$. L'integrazione di questa relazione porta a determinare l'equazione oraria per ω : $\omega(t) = -\dfrac{2F}{MR}t + \omega_o$. Dopo un tempo pari a t=4 s, la velocità angolare è dunque: $\omega_f = \omega(t) = -\dfrac{2F}{MR}t + \omega_o = 3{,}4\ s^{-1}$. Nel frenamento si è persa una quantità di energia cinetica pari a: $\Delta E = \frac{1}{2}I\omega_0^2 - \frac{1}{2}I\omega_f^2 = \frac{1}{4}MR^2(\omega_0^2 - \omega_f^2) = 151\ J$.

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

M. Villa

21/3/2006

II Compito parziale - B

1) Un satellite artificiale percorre un'orbita radente alla superficie della Luna (raggio dell'orbita = raggio della Luna). Indicando con ρ_L la densità media della Luna e con G la costante di gravitazione universale, scrivere l'espressione del periodo di rivoluzione del satellite.

Soluzione: La densità media della luna può essere definita come:
$\rho_L = \frac{M_{luna}}{V_{luna}} = \frac{M_{luna}}{\frac{4\pi}{3}R^3}$.
Il satellite artificiale sente una forza di attrazione gravitazionale di modulo pari a $F = \frac{GM_{luna}m_{sat}}{R^2}$ dove R è il raggio dell'orbita, coincidente con il raggio della Luna. Dato che il satellite percorre un'orbita circolare a velocità areolare costante (II legge di Keplero), la velocità angolare ω del satellite sarà costante. L'accelerazione del satellite è quindi solo centripeta: $a = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$. Per il secondo principio della dinamica avremo quindi che: $F = m_{sat}a$. Dopo opportune semplificazioni si trova che $\frac{M_{luna}}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GT^2} = \frac{4\pi\rho_L}{3}$. Risolvendo per il periodo di rivoluzione troviamo: $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho_L}}$.

2) Due sferette di masse m_1 e m_2, assimilabili a punti materiali, scivolano l'una verso l'altra sopra un piano orizzontale liscio con velocità rispettivamente $\vec{v}_1 = v_1\,\vec{i}$ e $\vec{v}_2 = -v_2\,\vec{i}$. Ad un certo istante esse, urtandosi, rimangono attaccate l'una all'altra per mezzo di un piccolo gancio, comprimendo nello stesso tempo una molla di massa trascurabile tra esse interposta. Calcolare le espressioni della velocità v_f assunta dal sistema dopo l'urto e l'energia ΔE immagazzinata nella molla.

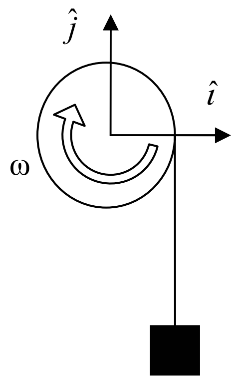
Soluzione: Il problema è un tipico problema d'urto *anelastico* dove non agiscono forze esterne (quindi si conserva la quantità di moto). La richiesta di conservazione della quantità di moto ci porta a dire che $\vec{Q}_{iniziale} = \vec{Q}_{finale}$, ma nello stato iniziale la quantità di moto è nota: $\vec{Q}_{iniziale} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1v_1 - m_2v_2)\vec{i}$. Visto che l'urto è anelastico si ha $\vec{Q}_{finale} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$. Richiedendo la conservazione della quantità di moto si risolve per v_f: $\vec{Q}_{iniziale} = \vec{Q}_{finale} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_f = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}\vec{i}$. L'energia immagazzinata nella molla è pari a quella cinetica persa: vale cioè la conservazione dell'energia cinetica: $E_{iniziale} = E_{finale}$, con $E_{iniziale} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ e $E_{finale} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_f^2 + \Delta E$ da cui si trova $\Delta E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_f^2 = ...$

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{(y^3 + 4xz^2)\,\vec{i} + 3xy^2\,\vec{j} + 4x^2z\,\vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

Soluzione: si verifica che $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$, quindi il campo è *conservativo*. Il potenziale può essere trovato facendo un integrale di linea che partendo dal punto *O(0,0,0)* passi in successione i punti *A(x,0,0), B(x,y,0), C(x,y,z)* facendo dei tratti rettilinei. Si trova che

$$V(x,y,z) = -\int_{OABC} \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s} = -\left(\int_{OA} F_x(x',0,0)dx' + \int_{AB} F_y(x,y',0)dy' + \int_{BC} F_z(x,y,z')dz'\right) =$$
$$= \alpha(xy^3 + 2x^2z^2)$$

4) Un disco omogeneo di raggio R=1.5 m e massa M=20 kg, sul cui bordo esterno è avvolto un lungo filo ideale inestensibile, è posto in un piano verticale ed è libero di ruotare attorno ad un asse fisso. All'estremo libero del filo è posta una massa m=2 kg. Se il sistema è inizialmente in quiete, determinare l'accelerazione della massa e la sua velocità dopo una caduta di h=4 m.



Soluzione: il sistema è caratterizzato dalla presenza di una forza esterna, la forza peso, che produce un momento della forza. Scegliamo come polo di riduzione il centro del disco. La seconda equazione cardinale ci dice che:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}^E .$$

Sia $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$, $\vec{M}^E = \vec{r} \wedge \vec{P} = -Rmg\hat{k}$, e $\vec{K} = I\vec{\omega} + \vec{r} \wedge m\vec{v}$.
Consideriamo il termine di momento angolare dovuto alla massa m: per il vincolo costituito dal filo, la sua velocità è legata alla velocità angolare: $|\vec{v}| = \omega R$; la direzione ed il verso del vettore $\vec{r} \wedge m\vec{v}$ è coincidente con quello di $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$. Possiamo quindi scrivere: $\vec{r} \wedge m\vec{v} = mR^2\vec{\omega}$.
La seconda equazione cardinale diventa quindi:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}^E \Rightarrow (I + mR^2)\dot{\omega} = -Rmg \quad \to \dot{\omega} = -\frac{Rmg}{I + mR^2} = -\frac{2mg}{(M+2m)R}.$$ Il disco subisce quindi una accelerazione angolare costante e la massa una accelerazione pari a:

$$a = \dot{\omega}R = -\frac{2mg}{(M+2m)} = 1{,}63\ m/s^2$$. La velocità che un corpo sottoposto ad una accelerazione pari ad *a*, dopo aver fatto un percorso pari ad *h* partendo da fermo è data da: $v = \sqrt{2ah} = 3{,}61\ m/s$.

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

M. Villa

21/3/2006

II Compito parziale - C

1) Sapendo che la Luna compie la sua rivoluzione intorno alla terra in un tempo T e indicando con M_T la massa della terra e con G la costante di gravitazione universale, scrivere l'espressione del raggio dell'orbita lunare nell'ipotesi che la traiettoria sia circolare.

Soluzione: La luna sente una forza di attrazione gravitazionale di modulo pari a $F = \frac{G m_{luna} M_T}{R^2}$ dove R è il raggio dell'orbita lunare. Dato che la luna percorre un'orbita circolare a velocità areolare costante (II legge di Keplero), la velocità angolare ω sarà costante. L'accelerazione della luna è quindi solo centripeta: $a = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$. Per il secondo principio della dinamica avremo quindi che: $F = m_{luna} a$. Dopo opportune semplificazioni si trova che $\frac{M_T}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GT^2}$. Risolvendo per il raggio R dell'orbita : $R = \sqrt[3]{\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}}$.

2) Due dischetti di momenti d'inerzia I_1 e I_2 ruotano attorno allo stesso asse fisso, coincidente con il loro asse di simmetria normale, con velocità angolari $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$ e $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{k}$. Ad un certo istante i due dischetti vengono messi a contatto e (a causa dell'attrito tra le loro superfici) assumono la stessa velocità angolare. Ragionando come per un urto completamente anelastico, calcolare le espressioni della velocità angolare finale ω_f assunta dal sistema e l'energia cinetica dissipata ΔE.

Soluzione: Possiamo considerare i due dischi come isolati nello spazio. Hanno un asse fisso, ma se utilizziamo come polo per il calcolo dei momenti un punto dell'asse di rotazione, il sistema non è soggetto né a forze esterne, né a momenti esterni delle forze. In questo sistema si ha quindi la conservazione della quantità di moto e del momento angolare. Visto che abbiamo dei dischi in rotazione ci concentriamo sulla conservazione del momento angolare. Il momento angolare iniziale sarà dato da: $\vec{K}_{iniziale} = I_1\omega_1\hat{k} + I_2\omega_2\hat{k}$. Quello finale sarà dato da: $\vec{K}_{finale} = (I_1 + I_2)\vec{\omega}_f$ dove notiamo che il momento d'inerzia finale dei due dischi è la somma dei due momenti d'inerzia (stesso asse, stessa velocità angolare). Imponendo la conservazione del momento angolare troviamo: $\vec{K}_{iniziale} = \vec{K}_{finale} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_f = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}\hat{k}$.

L'energia cinetica dissipata sarà pari a:

$$\Delta E = T_{iniziale} - T_{finale} = \tfrac{1}{2} I_1\omega_1^2 + \tfrac{1}{2} I_2\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_f^2 = \tfrac{1}{2}\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}\left(\omega_1 - \omega_2\right)^2 .$$

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{4xz^2\,\vec{i} + 3y^2z\,\vec{j} + (y^3 + 4x^2z)\vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

Soluzione: si verifica che $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$, quindi il campo è *conservativo*. Il potenziale può essere trovato facendo un integrale di linea che partendo dal punto *O(0,0,0)* passi in successione i punti *A(x,0,0), B(x,y,0), C(x,y,z)* facendo dei tratti rettilinei. Si trova che

$$V(x,y,z) = -\int_{OABC} \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s} = -\left(\int_{OA} F_x(x',0,0)dx' + \int_{AB} F_y(x,y',0)dy' + \int_{BC} F_z(x,y,z')dz'\right) =$$
$$= \alpha(zy^3 + 2x^2z^2)$$

4) Un disco omogeneo di raggio R=3.5 m e massa M=30 kg ruota con una velocità iniziale ω=4 s^{-1} attorno ad un asse normale alla superficie del disco e passante per il suo centro. Ad un certo istante (t=0) si frena il disco con un meccanismo in gradi di applicare una forza d'attrito di modulo F ad una distanza di 3R/4 dal centro del disco, in modo da rallentare il disco. Se alla forza occorrono solo un intervallo di tempo di t=5 s per fermare il disco, qual'e' il modulo della forza? Quanta energia è stata persa?

Soluzione: La forza di attrito è applicata tangenzialmente alla superficie del disco, diretta in direzione opposta alla velocità dei punti su cui agisce. La forza F giace quindi nel piano del disco. Preso un polo di riduzione sull'asse del disco, sul sistema agisce un momento delle forze $\vec{M}^E = \vec{r} \wedge \vec{F}$ la cui direzione è coincidente a quella dell'asse del disco e il cui verso è opposto a quello della velocità angolare. Per la seconda equazione cardinale della dinamica, posto $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$, si ha: $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}^E$. Il momento angolare è dato da: $\vec{K} = I\vec{\omega} = \tfrac{1}{2}MR^2\omega\hat{k}$; il momento delle forze è pari a $\vec{M}^E = \vec{r} \wedge \vec{F} = -\tfrac{3}{4}RF\hat{k}$. Dalla seconda equazione cardinale, si trova quindi che durante l'applicazione della forza d'attrito vi è una decelerazione angolare costante pari a $\dot{\omega} = -\frac{3F}{2MR}$. L'integrazione di questa relazione porta a determinare l'equazione oraria per ω : $\omega(t) = -\frac{3F}{2MR}t + \omega_o$. Dopo un tempo pari a t=5 s, la velocità angolare è nulla. Dunque: $\omega_f = \omega(t) = -\frac{3F}{2MR}t + \omega_o = 0$. Da questa relazione si ricava: $F = \frac{2MR\omega_o}{3t} = 56\ N$. Nel frenamento si è persa *tutta* l'energia cinetica iniziale, in quanto dopo l'azione della forza d'attrito il disco è fermo. Quindi: $\Delta E = \tfrac{1}{2}I\omega_0^2 = \tfrac{1}{4}MR^2\omega_0^2 = 1470\ J$.

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

M. Villa

21/3/2006

II Compito parziale - D

1) Indicando con R il raggio dell'orbita della Luna attorno alla Terra, con M_T la massa della terra e con G la costante di gravitazione universale, scrivere l'espressione del periodo di rivoluzione T della Luna (si consideri l'orbita circolare).

Soluzione: La luna sente una forza di attrazione gravitazionale di modulo pari a $F = \frac{G m_{luna} M_T}{R^2}$ dove R è il raggio dell'orbita lunare. Dato che la luna percorre un'orbita circolare a velocità areolare costante (II legge di Keplero), la velocità angolare ω sarà costante. L'accelerazione della luna è quindi solo centripeta: $a = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$. Per il secondo principio della dinamica avremo quindi che: $F = m_{luna} a$. Dopo opportune semplificazioni si trova che $\frac{M_T}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GT^2}$. Risolvendo per il periodo di rivoluzione troviamo: $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G M_T}}$.

2) Due dischetti di momenti d'inerzia I_1 e I_2 possono ruotare attorno allo stesso asse fisso, coincidente con il loro asse di simmetria normale. Inizialmente il disco 1 è fermo, mentre il disco 2 ruota con velocità angolare $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{k}$. Ad un certo istante i due dischetti vengono messi a contatto e (a causa dell'attrito tra le loro superfici) assumono la stessa velocità angolare. Ragionando come per un urto completamente anelastico, calcolare le espressioni della velocità angolare finale ω_f assunta dal sistema e l'energia cinetica dissipata ΔE.

Soluzione: Possiamo considerare i due dischi come isolati nello spazio. Hanno un asse fisso, ma se utilizziamo come polo per il calcolo dei momenti un punto dell'asse di rotazione, il sistema non è soggetto né a forze esterne, né a momenti esterni delle forze. In questo sistema si ha quindi la conservazione della quantità di moto e del momento angolare. Visto che abbiamo dei dischi in rotazione ci concentriamo sulla conservazione del momento angolare. Il momento angolare iniziale sarà dato da: $\vec{K}_{iniziale} = I_1 \omega_1 \hat{k} + I_2 \omega_2 \hat{k} = I_2 \omega_2 \hat{k}$. Quello finale sarà dato da: $\vec{K}_{finale} = (I_1 + I_2)\vec{\omega}_f$ dove notiamo che il momento d'inerzia finale dei due dischi è la somma dei due momenti d'inerzia (stesso asse, stessa velocità angolare). Imponendo la conservazione del momento angolare troviamo: $\vec{K}_{iniziale} = \vec{K}_{finale} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_f = \frac{I_2\omega_2}{I_1+I_2}\hat{k}$.

L'energia cinetica dissipata sarà pari a:

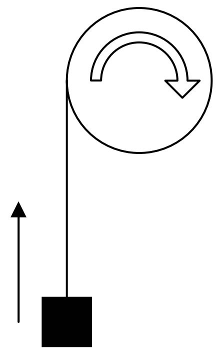
$$\Delta E = T_{iniziale} - T_{finale} = \tfrac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}(I_1+I_2)\omega_f^2 = \tfrac{1}{2}\frac{I_1I_2}{I_1+I_2}\omega_2^2$$

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{3x^2z\,\vec{i} + 4yz^2\,\vec{j} + (x^3+4y^2z)\,\vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

Soluzione: si verifica che $\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \vec{0}$, quindi il campo è *conservativo*. Il potenziale può essere trovato facendo un integrale di linea che partendo dal punto *O(0,0,0)* passi in successione i punti *A(x,0,0), B(x,y,0), C(x,y,z)* facendo dei tratti rettilinei. Si trova che

$$V(x,y,z) = -\int_{OABC}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s} = -\left(\int_{OA}F_x(x',0,0)dx' + \int_{AB}F_y(x,y',0)dy' + \int_{BC}F_z(x,y,z')dz'\right) =$$
$$= \alpha(zx^3 + 2y^2z^2)$$

4) Un disco omogeneo di raggio R=1.5 m e massa M=20 kg, sul cui bordo esterno è fissato l'estremo di un lungo filo ideale inestensibile, è posto in un piano verticale ed è libero di ruotare attorno ad un asse fisso. All'estremo libero del filo è posta una massa m=2 kg. Se il disco è inizialmente in moto e all'istante t=0 ha una velocità angolare ω=2 s^{-1} diretta in modo tale da far *salire* la massa m, determinare l'accelerazione della massa m e di quanto può salire la massa prima di cadere di nuovo.



Soluzione: il sistema è caratterizzato dalla presenza di una forza esterna, la forza peso, che produce un momento della forza. Scegliamo come polo di riduzione il centro del disco. La seconda equazione cardinale ci dice che:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}^E .$$

Sia $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$, $\vec{M}^E = \vec{r}\wedge\vec{P} = -Rmg\hat{k}$, e $\vec{K} = I\vec{\omega} + \vec{r}\wedge m\vec{v}$.

Consideriamo il termine di momento angolare dovuto alla massa m: per il vincolo costituito dal filo, la sua velocità è legata alla velocità angolare: $|\vec{v}| = \omega R$; la direzione ed il verso del vettore $\vec{r}\wedge m\vec{v}$ è coincidente con quello di $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$. Possiamo quindi scrivere: $\vec{r}\wedge m\vec{v} = mR^2\vec{\omega}$.

La seconda equazione cardinale diventa quindi:

$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}^E \Rightarrow (I + mR^2)\dot{\omega} = -Rmg \quad \rightarrow \dot{\omega} = -\frac{Rmg}{I + mR^2} = -\frac{2mg}{(M + 2m)R}$. Il disco subisce quindi una accelerazione angolare costante e la massa una accelerazione pari a:

$a = \dot{\omega}R = -\frac{2mg}{(M + 2m)} = 1,63\ m/s^2$. Per determinare di quanto può salire la massa m è opportuno affrontare il problema dal punto di vista energetico. Il sistema è caratterizzato dal fatto di avere solo forze conservative. L'energia in tali casi si conserva. L'energia iniziale è: $E_{in} = \frac{1}{2}mv_0^{\ 2} + \frac{1}{2}I\omega_0^2 + mgz_i$, con $v_0 = \omega_0 R$ e z_i la quota iniziale della massa m. Considero l'istante in cui il corpo m raggiunge la sua altezza massima: la sua velocità e la velocità angolare del disco sono nulle. L'energia è quindi: $E_{fin} = mgz_f$. Richiedendo che l'energia si conservi, si ha:

$$E_{in} = E_{fin} \quad \Rightarrow \quad h = z_f - z_i = \left(\tfrac{1}{2}mv_0^{\ 2} + \tfrac{1}{2}I\omega_0^2\right)/\,mg = \tfrac{1}{4}\frac{2m + M}{mg}R^2\omega_0^2 = 2,76\ m$$

con h lunghezza del tragitto fatto in salita dalla massa m.

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

(Prof. M. Villa)

21/3/2006

Compito A

1) Un paracadutista di 75 Kg si lancia nel vuoto con un paracadute di massa trascurabile. Se il paracadute si apre dopo 100 m di caduta libera e nei successivi 3 s la velocità di discesa diminuisce fino al valore 5 m/s, supponendo che l'accelerazione sia costante, quale forza esercita il paracadute nei 3 s considerati? Se successivamente il moto avviene a velocità costante, qual è la forza che il paracadute esercita sul paracadutista?

2) Due sferette di masse m_1 e m_2, assimilabili a punti materiali, sono appoggiate in quiete sopra un piano orizzontale liscio. Esse sono collegate da un filo e tengono tra di loro compressa una molla di massa trascurabile. Si indichi con V l'energia potenziale immagazzinata nella molla. Ad un certo istante il filo viene tagliato, la molla si decomprime e si stacca dal sistema e le due sferette sono lasciate libere di muoversi. Calcolare le espressioni delle velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ assunte dalle due sferette.

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{3x^2y\,\vec{i} + (x^3+4yz^2)\,\vec{j} + 4y^2z\,\vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

4) Un disco omogeneo di raggio R=1.5 m e massa M=20 kg ruota con una velocità iniziale ω=5 s^{-1} attorno ad un asse normale alla superficie del disco e passante per il suo centro. Ad un certo istante (t=0) viene applicata sul bordo del disco una forza d'attrito di modulo F=6 N, in grado di rallentare il disco. Se la forza agisce solo per un intervallo di tempo di t=4 s, qual'e' la velocità angolare del disco dopo la fine dell'applicazione della forza? Quanta energia è stata persa?

5) Discutere la differenza tra una legge sperimentale e un principio.
6) Enunciare e dimostrare il teorema delle forze vive.
7) Spiegare l'importanza delle piccole oscillazioni.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\, m/s^2$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

(Prof. M. Villa)

21/3/2006

Compito B

1) Una molla può essere compressa di 2 cm da una forza di 270 N. Un blocco di 12 Kg, inizialmente fermo in cima ad un piano inclinato privo di attrito ed inclinato di 30°, viene lasciato andare. Il blocco si arresta dopo aver compresso la molla di 5.5 cm disposta parallelamente al piano inclinato e fissata in un estremo alla fine del piano inclinato. In questo momento di quanto si è spostato lungo il piano inclinato? Qual è la velocità del blocco quando arriva a toccare la molla?

2) Due sferette di masse m_1 e m_2, assimilabili a punti materiali, scivolano l'una verso l'altra sopra un piano orizzontale liscio con velocità rispettivamente $\vec{v}_1 = v_1\,\vec{i}$ e $\vec{v}_2 = -v_2\,\vec{i}$. Ad un certo istante esse, urtandosi, rimangono attaccate l'una all'altra per mezzo di un piccolo gancio, comprimendo nello stesso tempo una molla di massa trascurabile tra esse interposta. Calcolare le espressioni della velocità v_f assunta dal sistema dopo l'urto e l'energia ΔE immagazzinata nella molla.

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{(y^3 + 4xz^2)\,\vec{i} + 3xy^2\,\vec{j} + 4x^2z\,\vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

4) Un disco omogeneo di raggio R=1.5 m e massa M=20 kg, sul cui bordo esterno è avvolto un lungo filo ideale inestensibile, è posto in un piano verticale ed è libero di ruotare attorno ad un asse fisso. All'estremo libero del filo è posta una massa m=2 kg. Se il sistema è inizialmente in quiete, determinare l'accelerazione della massa e la sua velocità dopo una caduta di h=4 m.

5) Discutere il teorema di conservazione dell'energia meccanica.
6) Discutere le proprietà del centro di massa.
7) Discutere la relazione tra il moto, i sistemi di riferimento ed i principi della dinamica.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\,m/s^2$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

(Prof. M. Villa)

21/3/2006

Compito C

1) Una pallina viene lanciata in una direzione formante un angolo θ di 20° con l'orizzontale dall'estremo di un piano di un tavolo alto 2 m e ad una distanza dal bordo del tavolo stesso di 3 m. Quale deve essere il minimo modulo della velocità di lancio v_0 affinché la pallina non ricada sul piano del tavolo? Se la pallina viene lanciata ad una velocità di modulo pari a 2* v_0, a quale distanza dal punto di lancio raggiunge il terreno?

2) Due dischetti di momenti d'inerzia I_1 e I_2 ruotano attorno allo stesso asse fisso, coincidente con il loro asse di simmetria normale, con velocità angolari $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$ e $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{k}$. Ad un certo istante i due dischetti vengono messi a contatto e (a causa dell'attrito tra le loro superfici) assumono la stessa velocità angolare. Ragionando come per un urto completamente anelastico, calcolare le espressioni della velocità angolare finale ω_f assunta dal sistema e l'energia cinetica dissipata ΔE.

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{4xz^2\ \vec{i} + 3y^2z\ \vec{j} + (y^3 + 4x^2z)\vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

4) Un disco omogeneo di raggio R=3.5 m e massa M=30 kg ruota con una velocità iniziale ω=4 s^{-1} attorno ad un asse normale alla superficie del disco e passante per il suo centro. Ad un certo istante (t=0) si frena il disco con un meccanismo in gradi di applicare una forza d'attrito di modulo F ad una distanza di 3R/4 dal centro del disco, in modo da rallentare il disco. Se alla forza occorrono solo un intervallo di tempo di t=5 s per fermare il disco, qual'e' il modulo della forza? Quanta energia è stata persa?

5) Discutere le proprietà della forza di attrazione gravitazionale.
6) Discutere le proprietà del momento d'inerzia.
7) Spiegare i principi della statica.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\, m/s^2$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

(Prof. M. Villa)

21/3/2006

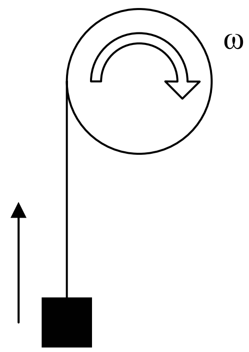
Compito D

1) Indicando con R il raggio dell'orbita della Luna attorno alla Terra, con M_T la massa della terra e con G la costante di gravitazione universale, scrivere l'espressione del periodo di rivoluzione T della Luna (si consideri l'orbita circolare).

2) Due dischetti di momenti d'inerzia I_1 e I_2 possono ruotare attorno allo stesso asse fisso, coincidente con il loro asse di simmetria normale. Inizialmente il disco 1 è fermo, mentre il disco 2 ruota con velocità angolare $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{k}$. Ad un certo istante i due dischetti vengono messi a contatto e (a causa dell'attrito tra le loro superfici) assumono la stessa velocità angolare. Ragionando come per un urto completamente anelastico, calcolare le espressioni della velocità angolare finale ω_f assunta dal sistema e l'energia cinetica dissipata ΔE.

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{3x^2z\ \vec{i} + 4yz^2\ \vec{j} + (x^3 + 4y^2z)\ \vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

4) Un disco omogeneo di raggio R=1.5 m e massa M=20 kg, sul cui bordo esterno è fissato l'estremo di un lungo filo ideale inestensibile, è posto in un piano verticale ed è libero di ruotare attorno ad un asse fisso. All'estremo libero del filo è posta una massa m=2 kg. Se il disco è inizialmente in moto e all'istante t=0 ha una velocità angolare ω=2 s^{-1} diretta in modo tale da far *salire* la massa m, determinare l'accelerazione della massa m e di quanto può salire la massa prima di cadere di nuovo.



5) Dedurre la terza legge di Keplero dalla legge di gravitazione di Newton nel caso di orbite circolari.
6) Enunciare e dimostrare il teorema di Huygens-Steiner.
7) Enunciare e discutere il secondo principio della dinamica.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9,8\,m/s^2$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

(Prof. M. Villa)

21/3/2006

Compito A

1) Un paracadutista di 75 kg si lancia nel vuoto con un paracadute di massa trascurabile. Se il paracadute si apre dopo 100 m di caduta libera e nei successivi 3 s la velocità di discesa diminuisce fino al valore 5 m/s, supponendo che l'accelerazione sia costante, quale forza esercita il paracadute nei 3 s considerati? Se successivamente il moto avviene a velocità costante, qual è la forza che il paracadute esercita sul paracadutista?

Soluzione: Sia *m=75 kg, h=100 m, t=3 s* e *v= 5 m/s*. Dopo una caduta di h a partire da fermo il paracadutista raggiunge una velocità verticale pari a $v_i = \sqrt{2gh} = 44{,}3\, m/s$. Nel tempo di frenamento, il paracadutista passa da una velocità v_i ad una velocità v subendo una accelerazione media pari a $a = (v - v_i)/t = -13{,}1\, m/s^2$. Per il secondo principio della dinamica, la forza esercitata dal paracadute ($\vec{F}_{par}$) più la forza peso ($\vec{P} = m\vec{g}$) è pari alla massa per l'accelerazione: $\vec{F}_{par} + \vec{P} = m\vec{a}$. Se indichiamo con $\hat{j}$ un asse verticale *diretto verso il basso*, troviamo quindi: $\vec{F}_{par} = m\vec{a} - \vec{P} = ma\hat{j} - mg\hat{j} = m(a-g)\hat{j} = -1{,}72\, kN\, \hat{j}$. Dopo la fase di frenata, il moto del paracadutista è a velocità costante. Sul paracadutista agisce quindi un sistema di forze a risultante nulla. Si ha quindi: $\vec{F}_{par} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{par} = -\vec{P} = -mg\hat{j} = -735\, N\, \hat{j}$.

2) Due sferette di masse m_1 e m_2, assimilabili a punti materiali, sono appoggiate in quiete sopra un piano orizzontale liscio. Esse sono collegate da un filo e tengono tra di loro compressa una molla di massa trascurabile. Si indichi con V l'energia potenziale immagazzinata nella molla. Ad un certo istante il filo viene tagliato, la molla si decomprime e si stacca dal sistema e le due sferette sono lasciate libere di muoversi. Calcolare le espressioni delle velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ assunte dalle due sferette.

Soluzione: Il problema è un tipico problema d'urto dove non agiscono forze esterne (quindi si conserva la quantità di moto) e nello stato iniziale è disponibile una energia sotto forma di energia potenziale di una molla. La richiesta di conservazione della quantità di moto ci porta a dire che $\vec{Q}_{iniziale} = \vec{Q}_{finale}$, ma nello stato iniziale il sistema è in quiete, quindi $\vec{Q}_{iniziale} = \vec{0}$. Troviamo quindi una prima relazione tra $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$: $\vec{Q}_{finale} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{Q}_{iniziale} = \vec{0}$ da cui $\vec{v}_2 = -\dfrac{m_1\vec{v}_1}{m_2}$. Si può trovare una seconda relazione richiedendo la conservazione dell'energia. Nello stato iniziale l'energia è interamente di natura elastica: $E_{iniziale} = V$. Nello stato finale l'energia è solo di natura cinetica: $E_{finale} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$. Richiedendo la conservazione dell'energia ($E_{iniziale} = E_{finale}$) e sfruttando la prima relazione, si può risolvere per il modulo di $\vec{v}_1$: $v_1 = \sqrt{\dfrac{2Vm_2}{m_1(m_1+m_2)}}$ e conseguentemente $v_2 = \sqrt{\dfrac{2Vm_1}{m_2(m_1+m_2)}}$.

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{3x^2y\,\vec{i} + (x^3+4yz^2)\,\vec{j} + 4y^2z\,\vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

Soluzione: si verifica che $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$, quindi il campo è *conservativo*. Il potenziale può essere trovato facendo un integrale di linea che partendo dal punto *O(0,0,0)* passi in successione i punti *A(x,0,0), B(x,y,0), C(x,y,z)* facendo tre tratti rettilinei paralleli rispettivamente agli assi *x, y* e *z*. Si trova che

$$V(x,y,z) = -\int_{OABC} \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s} = -\left(\int_{OA} F_x(x',0,0)dx' + \int_{AB} F_y(x,y',0)dy' + \int_{BC} F_z(x,y,z')dz'\right) =$$
$$= \alpha(x^3y + 2y^2z^2)$$

4) Un disco omogeneo di raggio R=1.5 m e massa M=20 kg ruota con una velocità iniziale ω_0=5 s^{-1} attorno ad un asse normale alla superficie del disco e passante per il suo centro. Ad un certo istante (t=0) viene applicata sul bordo del disco una forza d'attrito di modulo F=6 N, in grado di rallentare il disco. Se la forza agisce solo per un intervallo di tempo di t=4 s, qual'e' la velocità angolare del disco dopo la fine dell'applicazione della forza? Quanta energia è stata persa?

Soluzione: La forza di attrito è applicata tangenzialmente al bordo esterno, diretta in direzione opposta alla velocità dei punti sul bordo del disco. La forza F giace quindi nel piano del disco. Preso un polo di riduzione sull'asse del disco, sul sistema agisce un momento delle forze $\vec{M}^E = \vec{r} \wedge \vec{F}$ la cui direzione è coincidente a quella dell'asse del disco e il cui verso è opposto a quello della velocità angolare. Per la seconda equazione cardinale della dinamica, posto $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$, si ha: $\dfrac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}^E$. Il momento angolare è dato da: $\vec{K} = I\vec{\omega} = \frac{1}{2}MR^2\omega\hat{k}$; il momento delle forze è pari a $\vec{M}^E = \vec{r} \wedge \vec{F} = -RF\hat{k}$. Dalla seconda equazione cardinale, si trova quindi che durante l'applicazione della forza d'attrito vi è una decelerazione angolare costante pari a $\dot{\omega} = -\dfrac{2F}{MR}$. L'integrazione di questa relazione porta a determinare l'equazione oraria per ω : $\omega(t) = -\dfrac{2F}{MR}t + \omega_o$. Dopo un tempo pari a t=4 s, la velocità angolare è dunque: $\omega_f = \omega(t) = -\dfrac{2F}{MR}t + \omega_o = 3{,}4\ s^{-1}$. Nel frenamento si è persa una quantità di energia cinetica pari a: $\Delta E = \frac{1}{2}I\omega_0^2 - \frac{1}{2}I\omega_f^2 = \frac{1}{4}MR^2(\omega_0^2 - \omega_f^2) = 151\ J$.

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

(Prof. M. Villa)

21/3/2006

Compito B

1) Una molla può essere compressa di 2 cm da una forza di 270 N. Un blocco di 12 kg, inizialmente fermo in cima ad un piano inclinato privo di attrito ed inclinato di 30°, viene lasciato andare. Il blocco si arresta dopo aver compresso la molla di 5.5 cm disposta parallelamente al piano inclinato e fissata in un estremo alla fine del piano inclinato. In questo momento di quanto si è spostato lungo il piano inclinato? Qual è la velocità del blocco quando arriva a toccare la molla?

Soluzione: Iniziamo trovando la costante elastica della molla. Sappiamo che si comprime di $\Delta x = -0,02\, m$ quando è sottoposta ad una forza F=270 N. Sapendo che $F = -k\Delta x$, si trova $k = -\dfrac{F}{\Delta x} = 13,5\, kN/m$. La dinamica del sistema è caratterizzata da forze di natura conservativa (forza peso, forza elastica). In tale sistema l'energia meccanica si conserva. Consideriamo l'istante iniziale, quando il blocco è fermo ($v_i = 0$) in cima al piano inclinato. Sia z_i la quota del blocco. L'energia iniziale è pari a $E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgz_i = mgz_i$. Nell'istante finale il blocco è sceso ad una quota z_f, ha compresso la molla di una quantità pari a $\Delta x = -0,055\, m$ ed è di nuovo fermo ($v_f = 0$). L'energia finale è dunque:
$E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_f + \frac{1}{2}k\Delta x^2 = mgz_f + \frac{1}{2}k\Delta x^2$. Richiedendo la conservazione dell'energia si ha: $E_i = E_f \quad \Rightarrow \quad z_i - z_f = \dfrac{k\Delta x^2}{2mg} = 0,174\, m$. Lungo il piano inclinato ha quindi fatto un tragitto pari a $l = \dfrac{z_i - z_f}{\sin 30°} = 0,347\, m$. Prima di arrivare a toccare la molla ha fatto un tragitto pari a $l' = l - \Delta x = 0,292\, m$, corrispondenti ad un salto di quota pari a $h = l' \sin 30° = 0,146\, m$. Un corpo partendo da fermo, dopo essere caduto da una quota *h*, ha una velocità pari a $v = \sqrt{2gh} = 0,653\, m/s$. Tale valore corrisponde alla velocità del corpo prima di colpire la molla.

2) Due sferette di masse m_1 e m_2, assimilabili a punti materiali, scivolano l'una verso l'altra sopra un piano orizzontale liscio con velocità rispettivamente $\vec{v}_1 = v_1\, \vec{i}$ e $\vec{v}_2 = -v_2\, \vec{i}$. Ad un certo istante esse, urtandosi, rimangono attaccate l'una all'altra per mezzo di un piccolo gancio, comprimendo nello stesso tempo una molla di massa trascurabile tra esse interposta. Calcolare le espressioni della velocità v_f assunta dal sistema dopo l'urto e l'energia ΔE immagazzinata nella molla.

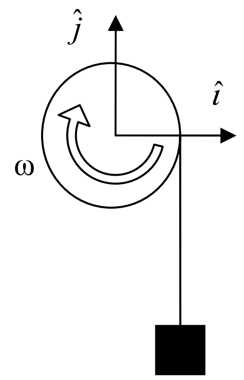
Soluzione: Il problema è un tipico problema d'urto *anelastico* dove non agiscono forze esterne (quindi si conserva la quantità di moto). La richiesta di conservazione della quantità di moto ci porta a dire che $\vec{Q}_{iniziale} = \vec{Q}_{finale}$, ma nello stato iniziale la quantità di moto è nota: $\vec{Q}_{iniziale} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 v_1 - m_2 v_2)\vec{i}$. Visto che l'urto è anelastico si ha $\vec{Q}_{finale} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$. Richiedendo la conservazione della quantità di moto si risolve per v_f: $\vec{Q}_{iniziale} = \vec{Q}_{finale} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_f = \dfrac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}\vec{i}$. L'energia immagazzinata nella molla è pari a quella cinetica persa: vale cioè la conservazione dell'energia cinetica: $E_{iniziale} = E_{finale}$, con $E_{iniziale} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ e $E_{finale} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 + \Delta E$ da cui si trova $\Delta E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = ...$

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{(y^3 + 4xz^2)\,\vec{i} + 3xy^2\,\vec{j} + 4x^2 z\,\vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

Soluzione: si verifica che $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$, quindi il campo è *conservativo.* Il potenziale può essere trovato facendo un integrale di linea che partendo dal punto *O(0,0,0)* passi in successione i punti *A(x,0,0), B(x,y,0), C(x,y,z)* facendo dei tratti rettilinei. Si trova che

$$V(x,y,z) = -\int_{OABC} \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s} = -\left(\int_{OA} F_x(x',0,0)dx' + \int_{AB} F_y(x,y',0)dy' + \int_{BC} F_z(x,y,z')dz'\right) =$$
$$= \alpha(xy^3 + 2x^2 z^2)$$

4) Un disco omogeneo di raggio R=1.5 m e massa M=20 kg, sul cui bordo esterno è avvolto un lungo filo ideale inestensibile, è posto in un piano verticale ed è libero di ruotare attorno ad un asse fisso. All'estremo libero del filo è posta una massa m=2 kg. Se il sistema è inizialmente in quiete, determinare l'accelerazione della massa e la sua velocità dopo una caduta di h=4 m.



Soluzione: il sistema è caratterizzato dalla presenza di una forza esterna, la forza peso, che produce un momento della forza. Scegliamo come polo di riduzione il centro del disco. La seconda equazione cardinale ci dice che:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}^E .$$

Sia $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$, $\vec{M}^E = \vec{r} \wedge \vec{P} = -Rmg\hat{k}$, e $\vec{K} = I\vec{\omega} + \vec{r} \wedge m\vec{v}$.
Consideriamo il termine di momento angolare dovuto alla massa m: per il vincolo costituito dal filo, la sua velocità è

legata alla velocità angolare: $|\vec{v}| = \omega R$; la direzione ed il verso del vettore $\vec{r} \wedge m\vec{v}$ è coincidente con quello di $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$. Possiamo quindi scrivere: $\vec{r} \wedge m\vec{v} = mR^2\vec{\omega}$.
La seconda equazione cardinale diventa quindi:
$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}^E \Rightarrow (I + mR^2)\dot{\omega} = -Rmg \quad \rightarrow \dot{\omega} = -\frac{Rmg}{I + mR^2} = -\frac{2mg}{(M + 2m)R}$. Il disco subisce quindi una accelerazione angolare costante e la massa una accelerazione pari a:
$a = \dot{\omega}R = -\frac{2mg}{(M + 2m)} = 1,63\ m/s^2$. La velocità che un corpo sottoposto ad una accelerazione pari ad a, dopo aver fatto un percorso pari ad h partendo da fermo è data da: $v = \sqrt{2ah} = 3,61\ m/s$.

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

(Prof. M. Villa)

21/3/2006

Compito C

1) Una pallina viene lanciata in una direzione formante un angolo θ di 20° con l'orizzontale dall'estremo di un piano di un tavolo alto h=2 m e ad una distanza dal bordo del tavolo stesso di L=3 m. Quale deve essere il minimo modulo della velocità di lancio v_0 affinché la pallina non ricada sul piano del tavolo? Se la pallina viene lanciata ad una velocità di modulo pari a 2* v_0, a quale distanza dal punto di lancio raggiunge il terreno?

Soluzione: Scelto un sistema di assi tali per cui l'asse x e' orizzontale, l'asse y è verticale e l'origine è nel punto di partenza della pallina, le sue equazioni della traiettoria sono:

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\theta)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t \end{cases}$$

Imponendo che la pallina passi per il bordo del tavolo (x=3, y=0) è possibile eliminare il parametro tempo e risolvere per v_0 . Si ottiene:

$$v_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{gL}{\cos\theta\sin\theta}} = 6,76\; m/s\,.$$

Usando ora nelle eq. Precedenti una velocità doppia e richiedendo che y(t)=-h, è possibile trovare prima il tempo necessario alla pallina per raggiungere il terreno e poi la distanza percorsa che è pari a $\Delta x = 16,1\, m$.

2) Due dischetti di momenti d'inerzia I_1 e I_2 ruotano attorno allo stesso asse fisso, coincidente con il loro asse di simmetria normale, con velocità angolari $\vec{\omega}_1 = \omega_1\,\vec{k}$ e $\vec{\omega}_2 = \omega_2\,\vec{k}$. Ad un certo istante i due dischetti vengono messi a contatto e (a causa dell'attrito tra le loro superfici) assumono la stessa velocità angolare. Ragionando come per un urto completamente anelastico, calcolare le espressioni della velocità angolare finale ω_f assunta dal sistema e l'energia cinetica dissipata ΔE.

Soluzione: Possiamo considerare i due dischi come isolati nello spazio. Hanno un asse fisso, ma se utilizziamo come polo per il calcolo dei momenti un punto dell'asse di rotazione, il sistema non è soggetto né a forze esterne, né a momenti esterni delle forze. In questo sistema si ha quindi la conservazione della quantità di moto e del momento angolare. Visto che abbiamo dei dischi in rotazione ci concentriamo sulla conservazione del momento angolare. Il momento angolare iniziale sarà dato da: $\vec{K}_{iniziale} = I_1\omega_1\hat{k} + I_2\omega_2\hat{k}$. Quello finale sarà dato da: $\vec{K}_{finale} = (I_1 + I_2)\vec{\omega}_f$ dove notiamo che il momento d'inerzia finale dei due dischi è la somma dei due momenti d'inerzia (stesso asse, stessa velocità angolare). Imponendo la conservazione del momento angolare troviamo: $\vec{K}_{iniziale} = \vec{K}_{finale} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_f = \dfrac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}\hat{k}$.

L'energia cinetica dissipata sarà pari a:

$$\Delta E = T_{iniziale} - T_{finale} = \tfrac{1}{2} I_1\omega_1^2 + \tfrac{1}{2} I_2\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_f^2 = \tfrac{1}{2}\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}\left(\omega_1 - \omega_2\right)^2$$

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{4xz^2\ \vec{i} + 3y^2z\ \vec{j} + (y^3 + 4x^2z)\vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

Soluzione: si verifica che $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$, quindi il campo è *conservativo.* Il potenziale può essere trovato facendo un integrale di linea che partendo dal punto *O(0,0,0)* passi in successione i punti *A(x,0,0), B(x,y,0), C(x,y,z)* facendo dei tratti rettilinei. Si trova che

$$V(x,y,z) = -\int_{OABC} \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s} = -\left(\int_{OA} F_x(x',0,0)dx' + \int_{AB} F_y(x,y',0)dy' + \int_{BC} F_z(x,y,z')dz'\right) =$$
$$= \alpha(zy^3 + 2x^2z^2)$$

4) Un disco omogeneo di raggio R=3.5 m e massa M=30 kg ruota con una velocità iniziale ω_o=4 s^{-1} attorno ad un asse normale alla superficie del disco e passante per il suo centro. Ad un certo istante (t=0 s) si frena il disco con un meccanismo in grado di applicare una forza d'attrito di modulo F ad una distanza di 3R/4 dal centro del disco, in modo da rallentare il disco. Se alla forza occorrono solo un intervallo di tempo di t=5 s per fermare il disco, qual'e' il modulo della forza? Quanta energia è stata persa?

Soluzione: La forza di attrito è applicata tangenzialmente alla superficie del disco, diretta in direzione opposta alla velocità dei punti su cui agisce. La forza F giace quindi nel piano del disco. Preso un polo di riduzione sull'asse del disco, sul sistema agisce un momento delle forze $\vec{M}^E = \vec{r} \wedge \vec{F}$ la cui direzione è coincidente a quella dell'asse del disco e il cui verso è opposto a quello della velocità angolare. Per la seconda equazione cardinale della dinamica, posto $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$, si ha:
$\dfrac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}^E$. Il momento angolare è dato da: $\vec{K} = I\vec{\omega} = \tfrac{1}{2}MR^2\omega\hat{k}$; il momento delle forze è pari a $\vec{M}^E = \vec{r} \wedge \vec{F} = -\tfrac{3}{4}RF\hat{k}$. Dalla seconda equazione cardinale, si trova quindi che durante l'applicazione della forza d'attrito vi è una decelerazione angolare costante pari a $\dot{\omega} = -\dfrac{3F}{2MR}$. L'integrazione di questa relazione porta a deter-

minare l'equazione oraria per ω : $\omega(t) = -\frac{3F}{2MR}t + \omega_o$. Dopo un tempo pari a t=5 s, la velocità angolare è nulla. Dunque: $\omega_f = \omega(t) = -\frac{3F}{2MR}t + \omega_o = 0$. Da questa relazione si ricava: $F = \frac{2MR\omega_o}{3t} = 56\ N$. Nel frenamento si è persa *tutta* l'energia cinetica iniziale, in quanto dopo l'azione della forza d'attrito il disco è fermo. Quindi: $\Delta E = \frac{1}{2} I\omega_0^2 = \frac{1}{4} MR^2\omega_0^2 = 1470\ J$.

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

(Prof. M. Villa)

21/3/2006

Compito D

1) Indicando con R il raggio dell'orbita della Luna attorno alla Terra, con M_T la massa della terra e con G la costante di gravitazione universale, scrivere l'espressione del periodo di rivoluzione T della Luna (si consideri l'orbita circolare).

Soluzione: La luna sente una forza di attrazione gravitazionale di modulo pari a $F = \frac{G m_{luna} M_T}{R^2}$ dove R è il raggio dell'orbita lunare. Dato che la luna percorre un'orbita circolare a velocità areolare costante (II legge di Keplero), la velocità angolare ω sarà costante. L'accelerazione della luna è quindi solo centripeta: $a = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$. Per il secondo principio della dinamica avremo quindi che: $F = m_{luna} a$. Dopo opportune semplificazioni si trova che $\frac{M_T}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GT^2}$. Risolvendo per il periodo di rivoluzione troviamo: $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM_T}}$.

2) Due dischetti di momenti d'inerzia I_1 e I_2 possono ruotare attorno allo stesso asse fisso, coincidente con il loro asse di simmetria normale. Inizialmente il disco 1 è fermo, mentre il disco 2 ruota con velocità angolare $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{k}$. Ad un certo istante i due dischetti vengono messi a contatto e (a causa dell'attrito tra le loro superfici) assumono la stessa velocità angolare. Ragionando come per un urto completamente anelastico, calcolare le espressioni della velocità angolare finale ω_f assunta dal sistema e l'energia cinetica dissipata ΔE.

Soluzione: Possiamo considerare i due dischi come isolati nello spazio. Hanno un asse fisso, ma se utilizziamo come polo per il calcolo dei momenti un punto dell'asse di rotazione, il sistema non è soggetto né a forze esterne, né a momenti esterni delle forze. In questo sistema si ha quindi la conservazione della quantità di moto e del momento angolare. Visto che abbiamo dei dischi in rotazione ci concentriamo sulla conservazione del momento angolare. Il momento angolare iniziale sarà dato da: $\vec{K}_{iniziale} = I_1\omega_1\hat{k} + I_2\omega_2\hat{k} = I_2\omega_2\hat{k}$. Quello finale sarà dato da: $\vec{K}_{finale} = (I_1 + I_2)\vec{\omega}_f$ dove notiamo che il momento d'inerzia finale dei due dischi è la somma dei due momenti d'inerzia (stesso asse, stessa velocità angolare). Imponendo la conservazione del momento angolare troviamo: $\vec{K}_{iniziale} = \vec{K}_{finale} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_f = \frac{I_2\omega_2}{I_1 + I_2}\hat{k}$.

L'energia cinetica dissipata sarà pari a:

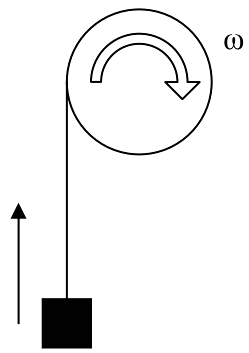
$$\Delta E = T_{iniziale} - T_{finale} = \tfrac{1}{2} I_2 \omega_2^2 - \tfrac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_f^2 = \tfrac{1}{2}\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}\omega_2^2$$

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{3x^2z\ \vec{i} + 4yz^2\ \vec{j} + (x^3 + 4y^2z)\ \vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

Soluzione: si verifica che $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$, quindi il campo è *conservativo*. Il potenziale può essere trovato facendo un integrale di linea che partendo dal punto *O(0,0,0)* passi in successione i punti *A(x,0,0), B(x,y,0), C(x,y,z)* facendo dei tratti rettilinei. Si trova che

$$V(x,y,z) = -\int_{OABC} \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{s} = -\left(\int_{OA} F_x(x',0,0)dx' + \int_{AB} F_y(x,y',0)dy' + \int_{BC} F_z(x,y,z')dz'\right) =$$
$$= \alpha(zx^3 + 2y^2z^2)$$

4) Un disco omogeneo di raggio R=1.5 m e massa M=20 kg, sul cui bordo esterno è fissato l'estremo di un lungo filo ideale inestensibile, è posto in un piano verticale ed è libero di ruotare attorno ad un asse fisso. All'estremo libero del filo è posta una massa m=2 kg. Se il disco è inizialmente in moto e all'istante t=0 ha una velocità angolare ω_0=2 s^{-1} diretta in modo tale da far *salire* la massa m, determinare l'accelerazione della massa m e di quanto può salire la massa prima di cadere di nuovo.



Soluzione: il sistema è caratterizzato dalla presenza di una forza esterna, la forza peso, che produce un momento della forza. Scegliamo come polo di riduzione il centro del disco. La seconda equazione cardinale ci dice che:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}^E .$$

Sia $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$, $\vec{M}^E = \vec{r} \wedge \vec{P} = -Rmg\hat{k}$, e $\vec{K} = I\vec{\omega} + \vec{r} \wedge m\vec{v}$.

Consideriamo il termine di momento angolare dovuto alla massa m: per il vincolo costituito dal filo, la sua velocità è legata alla velocità angolare: $|\vec{v}| = \omega R$; la direzione ed il verso del vettore $\vec{r} \wedge m\vec{v}$ è coincidente con quello di $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$. Possiamo quindi scrivere: $\vec{r} \wedge m\vec{v} = mR^2\vec{\omega}$.

La seconda equazione cardinale diventa quindi:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}^E \Rightarrow (I + mR^2)\dot{\omega} = -Rmg \quad \rightarrow \dot{\omega} = -\frac{Rmg}{I + mR^2} = -\frac{2mg}{(M + 2m)R}.$$ Il disco subisce quindi una accelerazione angolare costante e la massa una accelerazione pari a:

$a = \dot{\omega} R = -\frac{2mg}{(M+2m)} = 1,63\ m/s^2$. Per determinare di quanto può salire la massa m è opportuno affrontare il problema dal punto di vista energetico. Il sistema è caratterizzato dal fatto di avere solo forze conservative. L'energia in tali casi si conserva. L'energia iniziale è: $E_{in} = \frac{1}{2} m v_0^{\ 2} + \frac{1}{2} I \omega_0^2 + mgz_i$, con $v_0 = \omega_0 R$ e z_i la quota iniziale della massa m. Considero l'istante in cui il corpo m raggiunge la sua altezza massima: la sua velocità e la velocità angolare del disco sono nulle. L'energia è quindi: $E_{fin} = mgz_f$. Richiedendo che l'energia si conservi, si ha:

$$E_{in} = E_{fin} \quad \Rightarrow \quad h = z_f - z_i = \left(\tfrac{1}{2} m v_0^{\ 2} + \tfrac{1}{2} I \omega_0^2\right) / mg = \tfrac{1}{4} \frac{2m+M}{mg} R^2 \omega_0^2 = 2,76\ m$$

con h lunghezza del tragitto fatto in salita dalla massa m.

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

(Proff. A. Bertin, M. Villa e A. Vitale)

11/4/2006

(1)

1) Un carro di massa totale M, dotato di quattro ruote, ciascuna assimilabile ad un disco omogeneo di massa m e raggio R, è lanciato ad una velocità v_0 su una strada asfaltata orizzontale. Il carro si ferma dopo aver percorso un tratto di strada lungo s. Calcolare l'espressione del lavoro complessivo L_A compiuto delle forze d'attrito che hanno determinato l'arresto del carro.

2) Un corpo puntiforme di massa m viene lasciato cadere verticalmente. Oltre alla forza peso, esso è soggetto ad una forza di resistenza dell'aria proporzionale in modulo (e opposta in direzione) alla sua velocità (indicare con C la costante di proporzionalità). Scrivere l'equazione differenziale del moto del corpo, considerato nella sua proiezione lungo l'asse verticale z (orientato verso l'alto), cioè l'equazione differenziale che ha come soluzione la legge oraria $z(t)$.

3) Verificare se il campo di forze
$\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{(y^2z + 2xz^2)\,\vec{i} + 2xyz\,\vec{j} + (xy^2 + 2x^2z)\,\vec{k}\right\}$
è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

4) Si supponga che una stella che ruota con una velocità angolare ω_0 cominci a collassare. In questo processo la stella riduce il proprio raggio dal valore iniziale R_0 a quello finale R e modifica la propria velocità angolare di rotazione da ω_0 a ω, mentre mantiene inalterata la propria massa. Assimilando la stella ad una sfera piena uniforme e sapendo che le forze che determinano il collasso sono tutte forze interne, calcolare l'espressione della nuova velocità angolare ω e della variazione di energia potenziale della stella.

5) Definire il concetto di sistema inerziale.

6) Spiegare in quali condizioni la quantità di moto è una quantità conservata.

Soluzione LA1

1) $L_{\mathrm{A}} = T_f - T_i = 0 - \left[\frac{1}{2}Mv_0^2 + 4\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v_0}{R}\right)^2\right]$

$= -\frac{1}{2}(M+2m)v_0^2$

2) $m\ddot{z} = -mg - C\,\dot{z}$

$\ddot{z} = -g - \frac{C}{m}\dot{z}$

3) La forza è conservativa; $V = \alpha(xy^2z + x^2z^2)$

4)

$I\omega = I_0\omega_0$

$\omega = \frac{I_0}{I}\omega_0 = \frac{R_0^2}{R^2}\omega_0$

$\Delta V = -\Delta T = \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 - \frac{1}{2}I\omega^2$

$= \frac{1}{2}I_0\omega_0(\omega_0 - \omega) = \frac{1}{5}MR_0^2\omega_0^2\left(1 - \frac{R_0^2}{R^2}\right) \quad (<0)$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

(Proff. A. Bertin, M. Villa e A. Vitale)

11/4/2006

(2)

1) Ad un'automobile di massa M parcheggiata in discesa si rompe il freno a mano. L'automobile percorre un tratto di strada lungo s con pendenza costante di un angolo α e va a sbattere contro un albero con una velocità di modulo $v_F = \sqrt{gs\sin\alpha}$. Trascurando la massa delle ruote, calcolare l'espressione del lavoro complessivo L_{A} compiuto delle forze d'attrito che hanno rallentato l'automobile nella sua discesa.

2) Un corpo puntiforme di massa m è appeso verticalmente ad una molla ideale di costante elastica k. Considerando il moto nella sua proiezione lungo l'asse verticale z, orientato verso l'alto, e ponendo l'origine dell'asse nella posizione di riposo della molla, scrivere l'equazione differenziale del moto del corpo, cioè l'equazione differenziale che ha come soluzione la legge oraria $z(t)$.

3) Verificare se il campo di forze
$\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{2xyz\,\vec{i} + (x^2z + 2yz^2)\vec{j} + (x^2y + 2y^2z)\,\vec{k}\right\}$
è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

4) Un paracadutista di massa M si lancia nel vuoto con un paracadute di massa trascurabile. Il paracadute si apre dopo un tratto lungo L di caduta libera. Supponendo che il paracadute eserciti una forza costante F_{par}, calcolare l'espressione dell'intervallo di tempo Δt necessario a ridurre la velocità di discesa fino al valore v.

5) Descrivere il moto di un pendolo semplice.
6) Spiegare in quali condizioni il momento della quantità di moto è una quantità conservata.

Soluzione LA2

1) $L_{\mathrm{A}} = E_f - E_i = \frac{1}{2} M v_F^2 - Mgs \sin\alpha$

$= \frac{1}{2} Mgs \sin\alpha - Mgs \sin\alpha = -\frac{1}{2} Mgs \sin\alpha$

2) $m\ddot{z} = -mg - k\,z$

$\ddot{z} = -g - \frac{k}{m} z$

3) $V = \alpha(x^2 yz + y^2 z^2)$

4) $-P + F_{\mathrm{par.}} = M \frac{v - \sqrt{2gL}}{\Delta t}$

$\Delta t = M \frac{v - \sqrt{2gL}}{F_{\mathrm{par.}} - P}$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

(Proff. A. Bertin, M. Villa e A. Vitale)

11/4/2006

(3)

1) Un'automobile di massa M parte da ferma e raggiunge una velocità v_F dopo aver percorso un tratto di strada orizzontale lungo s. Ciascuna delle ruote dell'automobile è assimilabile ad un disco omogeneo di massa m e raggio R. Indicando con L_{A} il lavoro (negativo) compiuto dalle forze d'attrito, scrivere l'espressione del lavoro L_{M} compiuto dal motore dell'automobile.

2) Un corpo puntiforme di massa m scivola sopra una guida orizzontale liscia, rimanendo attaccato ad un estremo di una molla ideale di costante elastica k, il cui altro estremo è fissato alla guida. Essendo la guida immersa nell'acqua, nel suo moto il corpo risente di una forza di resistenza proporzionale in modulo (e opposta in direzione) alla sua velocità (indicare con β la costante di proporzionalità). Considerando il moto nella sua proiezione lungo l'asse orizzontale x coincidente con la direzione della guida e ponendo l'origine dell'asse nella posizione di riposo della molla, scrivere l'equazione differenziale del moto del corpo, cioè l'equazione differenziale che ha come soluzione la legge oraria $x(t)$.

3) Verificare se il campo di forze
$\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{(yz^2 + 2xy^2)\,\vec{i} + (xz^2 + 2x^2y)\vec{j} + 2xyz\,\vec{k}\right\}$
è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

4) Si supponga che una stella che ruota con una velocità angolare ω_0 cominci a collassare. In questo processo la stella riduce il proprio raggio dal valore iniziale R_0 a quello finale R e modifica la propria velocità angolare di rotazione da ω_0 a ω, mentre mantiene inalterata la propria massa. Assimilando la stella ad una sfera piena uniforme e sapendo che le forze che determinano il collasso sono tutte forze interne, calcolare le espressioni del nuovo raggio R e della variazione di energia potenziale della stella.

5) Enunciare e dimostrare il teorema di König.
6) Definire le forze conservative e discuterne le proprietà.

Soluzione LA3

1) $L_{\mathrm{M}} + L_{\mathrm{A}} = T_f - T_i = \left[\frac{1}{2} M v_F^2 + 4 \times \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right)\left(\frac{v_F}{R}\right)^2\right]$

$= \frac{1}{2}(M + 2m) v_0^2$

$L_{\mathrm{M}} = -L_{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}(M + 2m) v_0^2$

2) $m\ddot{x} = -k\,x - \beta\dot{x}$

$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x - \frac{\beta}{m}\dot{x}$

3) $V = \alpha(xyz^2 + x^2 y^2)$

4) $I\omega = I_0 \omega_0$

$\cancel{\frac{2}{5}M} R^2 \omega = \cancel{\frac{2}{5}M} R_0^2 \omega_0$

$R = \sqrt{R_0^2 \frac{\omega_0}{\omega}}$

$\Delta V = -\Delta T = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 - \frac{1}{2} I \omega^2 \; = \frac{1}{2} I_0 \omega_0 (\omega_0 - \omega) \quad (< 0)$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

(Proff. A. Bertin, M. Villa e A. Vitale)

11/4/2006

(4)

1) Un'automobile di massa M percorre una salita con pendenza costante di un angolo α. Ad un certo istante all'automobile, che sta viaggiando con velocità v_0, si spegne il motore. Dopo un tratto di strada lungo $s = v_0^2/(4g\sin\alpha)$ l'automobile si ferma. Trascurando la massa delle ruote, calcolare l'espressione del lavoro L_A compiuto dalle forze d'attrito.

2) Un corpo di massa m scivola lungo una guida inclinata di un angolo α rispetto alla direzione orizzontale. Essendo la guida immersa nell'acqua, nel suo moto il corpo risente della spinta di Archimede. Si indichi con m_A la massa del volume d'acqua occupato dal corpo. Si trascuri inoltre la forza di resistenza dovuta alla viscosità dell'acqua. Considerando il moto nella sua proiezione lungo l'asse x coincidente con la direzione della guida e orientato nel verso entrante nell'acqua, scrivere l'equazione differenziale del moto del corpo, cioè l'equazione differenziale che ha come soluzione la legge oraria $x(t)$.

3) Verificare se il campo di forze
$\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{(2xyz^2 + 3x^2y^2)\,\vec{i} + (x^2z^2 + 2x^3y)\vec{j} + 2x^2yz\,\vec{k}\right\}$
è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

4) Un paracadutista di massa M si lancia nel vuoto con un paracadute di massa trascurabile. Il paracadute si apre dopo un tratto lungo L di caduta libera. Nel successivo intervallo di tempo Δt la velocità di discesa diminuisce fino al valore v. Supponendo che il paracadute eserciti una forza costante nell'intervallo di tempo Δt, calcolare l'espressione di tale forza.

5) Discutere la relazione tra lavoro ed energia in meccanica.
6) Enunciare e commentare brevemente le leggi di Keplero.

Soluzione LA4

1) $L_{\mathrm{A}} = E_f - E_i = Mgs\sin\alpha - \frac{1}{2}Mv_0^2 = -\frac{1}{4}Mv_0^2$

2) $m\ddot{x} = (m - m_A)g\sin\alpha$

$$\ddot{x} = \frac{(m - m_A)}{m}g\sin\alpha$$

3) $V = \alpha(x^2yz^2 + x^3y^2)$

4) $-P + F_{\mathrm{par.}} = M\frac{v - \sqrt{2gL}}{\Delta t}$

$$F_{\mathrm{par.}} = Mg + M\frac{v - \sqrt{2gL}}{\Delta t}$$

Fisica Generale LA - Prof. M. Villa

CdL in Ingegneria Civile (A-K)

26 Giugno 2006

1) Un sistema meccanico, che si trova inizialmente fermo ad una altezza $h = 1,2\ m$ dal pavimento, è costituito da una pallina di massa $m_1 = 10\ g$ collocata in equilibrio (instabile) sopra una pallina di massa $m_2 = 5m_1$. Ad un certo istante, il sistema viene lasciato libero di cadere. Assumendo che ogni urto sia perfettamente elastico e trascurando le dimensioni delle palline, determinare: 1) l'altezza a cui rimbalza la pallina più leggera; 2) la velocità con cui arriva a terra la seconda pallina dopo l'urto. (Suggerimento: si tratti il problema come un problema unidimensionale e si immagini che la pallina superiore inizi a cadere un istante di tempo infinitesimo successivo alla caduta della pallina inferiore).

2) Due sferette di masse $m_1 = 20\ g$ e $m_2 = 2m_1$, assimilabili a punti materiali, sono appoggiate sopra un piano orizzontale liscio e collegate da un filo ideale lungo $L_i = 0,3\ m$. Inizialmente compiono un moto di rotazione attorno al centro di massa del sistema (che è quindi fermo) con una velocità angolare pari a $\omega = 12\ rad/s$. A partire da un certo istante, tramite un meccanismo interno, il filo viene accorciato fino ad una lunghezza pari a $L_f = L_i/2$. Determinare: 1) la velocità angolare finale del sistema; 2) il lavoro meccanico fatto dal meccanismo interno; 3) il moto del centro di massa.

3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{4x^3y\ \hat{\imath} + (x^4 - 2yz^3)\ \hat{\jmath} - 3y^2z^2\ \hat{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

4) Discutere il teorema di conservazione dell'energia meccanica.
5) Spiegare le principali caratteristiche del moto armonico smorzato.
6) Discutere le equazioni cardinali della meccanica.
7) Discutere le componenti intrinseche dell'accelerazione.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9,8\ m/s^2$

Fisica Generale LA - Prof. M. Villa

CdL in Ingegneria Civile (A-K)

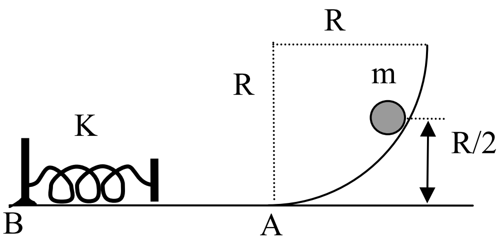
19 Luglio 2006

Esercizi:

1) Un punto materiale di massa m=30 g è inizialmente fermo su di un profilo circolare liscio di raggio R=20 cm ad una altezza H=R/2 rispetto al piano orizzontale. Scendendo lungo il profilo il punto incontra in A un piano orizzontale liscio su cui è vincolata in B una molla di costante elastica

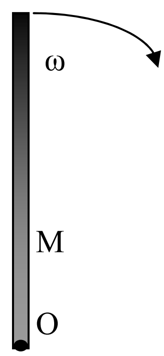
K=0,1 kg/s^{-2}, inizialmente a riposo. Determinare:

a) le componenti tangenziale (a_T) e centripeta (a_N) dell'accelerazione del punto nel punto iniziale ;
b) la reazione vincolare nel punto A, ultimo punto del profilo circolare;
c) la compressione massima della molla.



2) Sia dato il corpo rigido mostrato in figura costituito da un'asta *non* omogenea di massa M=2 kg, lunghezza L=1,2 m e spessore trascurabile, la cui densità lineare varia con la distanza (r) dall'estremo O secondo la relazione $\lambda=kr^2$ (dove k è una costante positiva incognita). L'asta ruota in un piano orizzontale attorno al punto O con velocità angolare costante ω=4 s^{-1}. Determinare:

a) l'*espressione* della costante k in funzione di M ed L;
b) il momento di inerzia I dell'asta rispetto all'estremo O;
c) l'energia cinetica totale del sistema.



3) Dato il campo di forze $\vec{F}(\vec{r}) = K_1 x^2 \hat{i} - K_2 z \hat{j} - K_2 y \hat{k}$,

a) fare l'analisi dimensionale delle costanti K_i
b) verificare se e quando il campo è conservativo;
c) in caso affermativo scriverne il potenziale;
d) trovare il lavoro compiuto dalla forza quando sposta il suo punto di applicazione sul percorso O – A – B, dove i punti hanno coordinate x, y, z rispettivamente O (0,0,0), A(1,1,0), B(-2,1,-1), assumendo $K_1 = K_2 = 3$ nelle opportune unità di misura del SI.

Domande:

4) Enunciare e discutere il terzo principio della dinamica.
5) Discutere almeno due condizioni per cui una forza e' conservativa.
6) Cosa sono le forze di attrito e quali sono le loro caratteristiche?
7) Discutere l'espressione dell'accelerazione in coordinate intrinseche.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9,8\, m/s^2$

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA
CdL in Ingegneria Civile (A-K) - Prof. M. Villa
11/09/2006

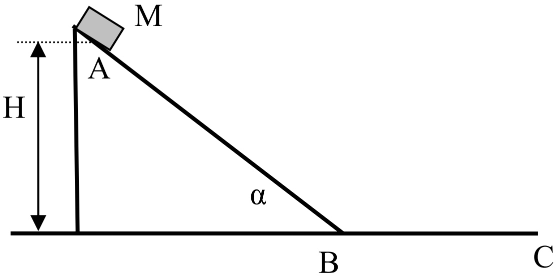
Esercizi:

1) Una cassa di massa M è appoggiata su di un piano scabro, inclinato di un angolo α=30° rispetto ad un piano orizzontale anch'esso scabro (vedi figura). Il coefficiente di attrito dinamico è ovunque pari a $\mu_D = 1/(2 \cdot \sqrt{3})$. Supponendo che la cassa si trovi inizialmente in quiete ad una altezza H=24 m sul piano orizzontale (punto A) e che il punto B di raccordo tra i piani sia arrotondato, determinare:

a) la velocità massima V_M raggiunta dalla cassa;

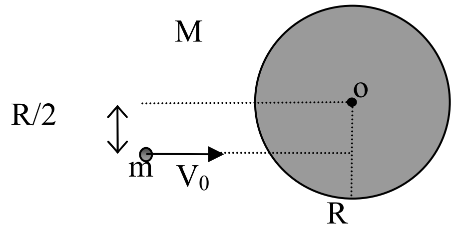
b) lo spazio totale percorso prima di fermarsi;

c) il lavoro complessivo fatto dalla forza d'attrito.



2) Un punto materiale di massa m=2M = 4 kg si muove su di un piano orizzontale liscio con velocità costante V_0 = 3 m/s. Ad un certo istante, muovendosi lungo una retta con braccio R/2 = 15 cm rispetto al centro del disco, urta in modo completamente anelastico un disco omogeneo di massa 4M e raggio R inizialmente fermo, ma libero di muoversi sul piano (vedi figura). Determinare:

a) quantità di moto finale del sistema;
b) il momento angolare K_I prima e K_F dopo l'urto, rispetto al centro O del disco;
c) l'energia ΔE rilasciata nell'urto.



3) Sia dato il campo di forze $\vec{F}(\vec{r}) = K_1(z+y)\hat{i} + K_2 x\hat{j} + K_3 x\hat{k}$.

a) Fare l'analisi dimensionale delle costanti K_i
b) Trovare la/le condizioni per cui il campo è conservativo;
c) In tali condizioni, scriverne il potenziale;
d) trovare il lavoro complessivo compiuto dalla forza quando sposta il suo punto di applicazione sul percorso O – A – B, dove i punti hanno coordinate x, y, z rispettivamente O (0,0,0), A(0,1,0), B(1,-2,-1), assumendo $K_1 = K_2 = K_3 = 2$ nelle opportune unità di misura del SI.

Domande:
4) Enunciare e discutere il primo principio della dinamica.
5) Discutere il teorema di conservazione dell'energia meccanica.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere alle domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\, m/s^2$

Fisica Generale L-A - Prof. M. Villa

CdL in Ingegneria Civile (A-K)

13 Dicembre 2006

Esercizi:

1) Un satellite di massa m, assimilabile ad un oggetto puntiforme, si muove lungo un'orbita circolare attorno alla Terra. Sapendo che il modulo del suo momento angolare rispetto al centro della Terra è J e conoscendo la massa M della Terra e la costante gravitazionale G, calcolare le espressioni delle seguenti quantità:

a) il modulo v della velocità del satellite.

b) il raggio r dell'orbita;

2) Un oggetto puntiforme di massa $m = 1$ kg è inizialmente fermo nel punto di coordinate (0, 1m, 2m) all'interno di un campo di forze conservativo $\vec{F}(x,y,z) = A(yz^2\,\vec{j} + y^2 z\,\vec{k})$ (dove $A = 1$ N/m^3). Sotto l'azione del campo $\vec{F}$ e di un'altra forza incognita $\vec{G}$ l'oggetto si mette in moto e si sposta nel punto di coordinate (3m, 0, 0), raggiunto il quale esso si ferma. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza $\vec{G}$. Quale delle tre componenti della forza $\vec{G}$ è sicuramente, in media, non nulla?

Domande:

3) Enunciare e discutere e il terzo principio della dinamica.

4) Spiegare la differenza tra i concetti di massa e peso.

5) Descrivere il moto di un pendolo semplice.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno un esercizio e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\,m/s^2$