Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

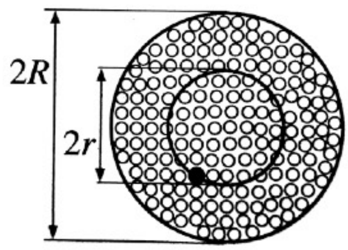
CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

27 Novembre 2017

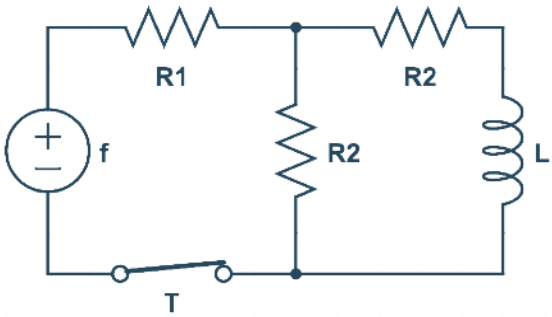
Secondo parziale - Compito A

Esercizi:

1) Si consideri un insieme di 100 fili rettilinei indefiniti che formano un cavo cilindrico di raggio $R = 0.5$ cm. Ciascun filo è attraversato da una corrente $i = 2\ A$. Calcolare:
    1) il campo magnetico B alla distanza $r = R/2$ dal centro dell'insieme;
    2) la forza per unità di lunghezza che agisce su uno dei fili alla stessa distanza r.



2) Il circuito mostrato in figura è inizialmente chiuso tramite il contatto T ed è costituito dalle resistenze $R_1 = 2\,\Omega$ e $R_2 = 5\,\Omega$ e da un'induttanza $L = 10$ mH. L'energia magnetica immagazzinata nel solenoide è $U_m = 1.25 \cdot 10^{-3}$ J. Calcolare:
    1) la corrente che scorre nell'induttanza;
    2) la forza elettromotrice del generatore;
    3) la corrente nelle tre resistenze al tempo $t_1 = 0.1$ ms, considerando che al tempo $t = 0$ il contatto T viene aperto.



3) Sia dato il campo $\overrightarrow{B}(x, y, z) = \alpha(x\hat{i} + f(x, y, z)\hat{j} + z\hat{k})$, con α costante. Trovare la forma che può assumere la funzione $f(x, y, z)$ affinché il campo dato possa rappresentare un campo magnetico nel vuoto, considerando la condizione che $B(0,0,0) = 0$.

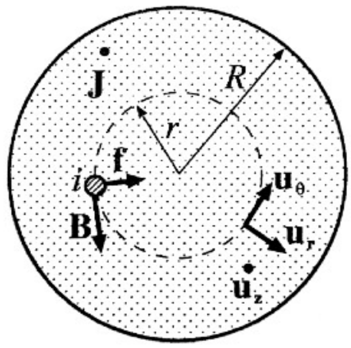
Domande:

1) Definire e discutere le caratteristiche principali della corrente di spostamento.
2) Definire l'induttanza e discuterne le sue proprietà.
3) Discutere la legge di Ampere - Maxwell, illustrandola con qualche esempio.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.
Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ $C^2/(Nm)^2$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Ns^2/C^2.

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. Dato l'elevato numero di fili che compongono il cavo, possiamo assumere, ai fini del calcolo del campo magnetico, che il cavo sia un conduttore cilindrico massiccio in cui la densità di corrente $\vec{J}$ sia distribuita uniformemente. Poniamo, come mostrato in figura, che la corrente fluisca in direzione perpendicolare al piano del foglio, verso uscente. La densità di corrente efficace nel cavo sarà data da



$$J = \frac{100\ i}{\pi R^2}\ ,$$ dove $J = |\ \vec{J}\ |$ e R è il raggio del cavo.

Ricordando che il campo magnetico generato da un filo conduttore infinito percorso da corrente I è

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{u}_\theta$$ con $\hat{u}_\theta$ versore tangente alle linee di flusso circolare di $\vec{B}$ centrate sull'asse del cavo e diretto in verso antiorario,

allora possiamo scrivere il campo del nostro caso:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 \pi r^2 J}{2\pi r}\hat{u}_\theta = \frac{\mu_0 100\ i\ r}{2\pi R^2}\hat{u}_\theta \quad \text{per } r < R$$
$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 \pi R^2 J}{2\pi r}\hat{u}_\theta = \frac{\mu_0 100\ i}{2\pi r}\hat{u}_\theta \quad \text{per } r \geq R$$

essendo r la distanza dall'asse del cavo a cui valutiamo il campo.

Il campo magnetico alla distanza $r = R/2$ dall'asse sarà dunque pari a

$$\vec{B}(R/2) = \frac{25\mu_0 i}{\pi R}\hat{u}_\theta$$

Il modulo è

$$B(R/2) = \frac{25\mu_0 i}{\pi R} = \frac{25 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{Ns^2}{C^2} \cdot 2\,A}{\pi\, 5 \cdot 10^{-3} m} = 4 \cdot 10^{-3}\,T\ .$$

2. La forza per unità di lunghezza agente sul filo a distanza $r = R/2$ dall'asse, quindi, è pari a

$$\frac{\overrightarrow{F}}{L} = i\,\hat{u}_z \times \overrightarrow{B}(R/2) = \frac{25\mu_0 i^2}{\pi R}\hat{u}_z \times \hat{u}_\theta$$

dove $\hat{u}_z$ è il versore perpendicolare al piano del foglio, diretto come la corrente.
Si noti che $\hat{u}_z \times \hat{u}_\theta = -\,\hat{u}_r$ dove $\hat{u}_r$ è il versore giacente nel piano del foglio e diretto radialmente rispetto all'asse del cavo con verso uscente da questo. Quindi:

$$\frac{\overrightarrow{F}}{L} = -\frac{25\mu_0 i^2}{\pi R}\hat{u}_r \ .$$

Il modulo, per unità di lunghezza, è

$$\frac{|\overrightarrow{F}|}{L} = \frac{25 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{Ns^2}{C^2} \cdot 4A^2}{\pi\, 5 \cdot 10^{-3}m} = 8 \cdot 10^{-3}N/m \ .$$

2) 1. Conoscendo l'energia magnetica del solenoide:

$$U_m = \frac{1}{2}Li_L^2$$

possiamo ricavare la corrente che circola in esso

$$i_L = \sqrt{\frac{2U_m}{L}} = 0.5\,A \ .$$

2. A regime, l'induttanza si comporta come un filo con R trascurabile, quindi, con questa considerazione, utilizzando la legge dei nodi, possiamo scrivere:

$$i_1 = i_2 + i_2$$

dove $\quad i_2 = i_L = 0.5\,A \quad$ (per la considerazione sull'induttanza fatta poco fa)

quindi $\quad i_1 = 2i_2 = 2i_L = 1\,A$.

Prendendo in considerazione la maglia a sinistra del circuito:

$$f = R_1 i_1 + R_2 i_2 = 2\,\Omega \cdot 1\,A + 5\,\Omega \cdot 0.5\,A = 4.5\,V \ .$$

3. Quando l'interruttore viene aperto, l'induttanza si scarica con una corrente che decresce esponenzialmente con costante di tempo:

$$\tau = \frac{L}{2R_2} = 1\,\text{ms}$$

dato che le due resistenze R_2 sono in serie nella maglia di destra (l'unica in cui circola corrente, dopo l'apertura del circuito).

L'andamento della corrente sarà quindi

$$i(t_1) = i_L e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0.5\ A\ e^{-\frac{0.1\,ms}{1\,ms}} = 0.45\,A\ .$$

3) Affinché $\overrightarrow{B}$ sia un campo magnetico nel vuoto, deve essere che $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0$ e $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = 0$.

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \alpha(1 + \frac{\partial f}{\partial y} + 1) = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -2$, quindi la funzione sarà: $f(x, y, z) = -2y + g(x, z)$

con $g(x, z)$ una funzione arbitraria di x e z.

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \hat{i}(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}) - \hat{j}(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}) + \hat{k}(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}) =$$

$$= \hat{i}(-\frac{\partial f}{\partial y}) - \hat{j}(0) + \hat{k}(\frac{\partial f}{\partial x}) = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e quindi $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = 0$

Quindi, abbiamo trovato che $g(x, z) = c$ con c costante arbitraria.
Dato che $B(0,0,0) = 0$, allora per soddisfare questa condizione deve essere che $c = 0$.

La forma della funzione f deve essere quindi:

$$f(x, y, z) = f(y) = -2y$$

Il campo magnetico nel vuoto avrà l'espressione

$$\overrightarrow{B}(x, y, z) = \alpha(x\hat{i} - 2y\hat{j} + z\hat{k})\ .$$

Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

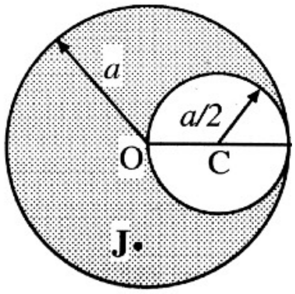
CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

27 Novembre 2017

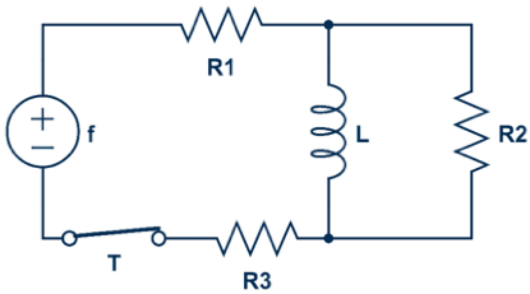
Secondo parziale - Compito B

Esercizi:

1) Un conduttore cilindrico indefinito di raggio $a = 4$ mm è percorso da una corrente $I = 2$ A distribuita uniformemente sulla sua sezione. Successivamente viene praticata nel conduttore una cavità cilindrica di raggio a/2 per tutta la sua lunghezza, mantenendo la stessa densità di corrente iniziale; il centro C della cavità dista a/2 dal centro O del conduttore. Calcolare:
   1) il campo magnetico B generato in O;
   2) il campo magnetico B generato in C.



2) Il circuito mostrato in figura è inizialmente chiuso tramite il contatto T ed è costituito dalle resistenze $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$ e $R_3 = 6\,\Omega$ e da un'induttanza $L = 5$ mH. L'energia magnetica immagazzinata nel solenoide è $U_m = 2 \cdot 10^{-3}$ J. Calcolare:
   1) la corrente che scorre nell'induttanza;
   2) la forza elettromotrice del generatore;
   3) la corrente nelle tre resistenze al tempo $t_1 = 0.5$ ms, considerando che al tempo $t = 0$ il contatto T viene aperto.



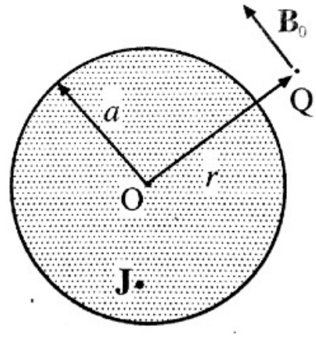
3) Sia dato il campo $\vec{B}(x, y, z) = (f(x, y, z)\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + x\hat{k})$. Trovare la forma che può assumere la funzione $f(x, y, z)$ affinché il campo dato possa rappresentare un campo magnetico nel vuoto, considerando la condizione che $B(0,0,0) = 0$.

Domande:

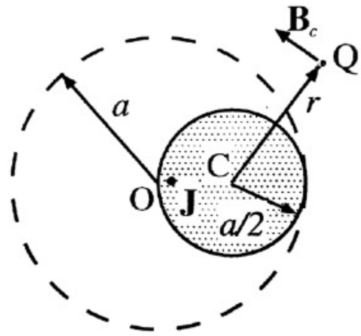
1) Spiegare tramite esempi la legge di Lenz.
2) Fornire una definizione di campo magnetico e discutere le sue proprietà principali.
3) Spiegare la legge di Faraday-Neumann.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.
Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ $C^2/(Nm)^2$ *e* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Ns^2/C^2.

Svolgimenti e soluzioni:



1) Si noti che la densità di corrente J circolante nel cilindro prima e dopo la creazione della cavità è la stessa, quindi possiamo risolvere il problema con il principio di sovrapposizione: il campo magnetico $\vec{B}$ generato dalla struttura è pari al campo $\vec{B}_0$ generato dal cilindro pieno di raggio a, sottratto del campo $\vec{B}_C$ generato dal cilindro di raggio a/2 che è stato enucleato dal conduttore per creare la cavità. Le figure illustrano l'andamento di questi due campi in un generico punto Q. Chiameremo r la distanza dal centro O del conduttore pieno ed r' la distanza dal centro C della cavità. In base ai dati del problema, la densità di corrente che fluisce nel conduttore è pari a:



$$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{u}_z$$ con $\hat{u}_z$ versore perpendicolare al piano del foglio e uscente.

Ricordando che il campo magnetico generato da un filo conduttore infinito percorso da corrente I è

$$\vec{B}(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{u}_\theta$$ con $\hat{u}_\theta$ versore tangente alle linee di flusso circolare di $\vec{B}$ centrate in O e diretto in verso antiorario,

allora possiamo ottenere il campo $\vec{B}_0$ e il suo andamento in funzione di r:

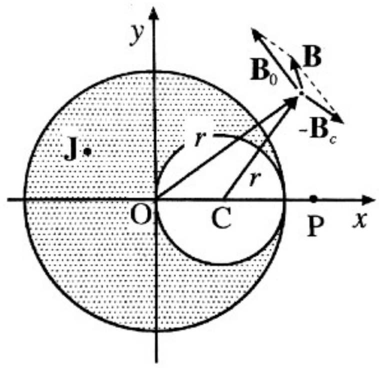
$$\vec{B}_0(r) = \frac{\mu_0 \pi r^2 J}{2\pi r}\hat{u}_\theta = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\hat{u}_\theta \quad \text{per } r < a$$
$$\vec{B}_0(r) = \frac{\mu_0 \pi a^2 J}{2\pi r}\hat{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{u}_\theta \quad \text{per } r \geq a$$

dove $J = |\,\vec{J}\,|$.

Applicando il teorema di Ampere al cilindro di raggio a/2 (cavità), otteniamo che il campo $\vec{B}_C$ da questo generato è

$$\vec{B}_C(r) = \frac{\mu_0 \pi r'^2 J}{2\pi r'}\hat{u}'_\theta = \frac{\mu_0 I r'}{2\pi a^2}\hat{u}'_\theta \qquad \text{per } r' < a/2$$
$$\vec{B}_C(r) = \frac{\mu_0 \pi (a/2)^2 J}{2\pi r'}\hat{u}'_\theta = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r'}\hat{u}'_\theta \quad \text{per } r' \geq a/2 \quad \text{e} \quad I' = I/4$$ è la corrente complessiva che scorre in questo secondo conduttore

dove $\hat{u}'_\theta$ è il versore tangente alle linee di flusso circolari di $\vec{B}_C$ centrate in C e diretto in verso antiorario.



1. Imponendo che $\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}_C$ e facendo uso dei versori degli assi x e y mostrati in figura, otteniamo per il campo in O:

$$\vec{B}(O) = \vec{B}_0(O) - \vec{B}_C(O) = 0 - [-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\hat{u}_y] = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\hat{u}_y$$

in modulo:

$$B(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\frac{Ns^2}{C^2} \cdot 2\,A}{4\pi \cdot 4 \cdot 10^{-3} m} = 0.5 \cdot 10^{-4}\,T$$

2. Per il campo in C, otteniamo invece

$$\vec{B}(C) = \vec{B}_0(C) - \vec{B}_C(C) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\hat{u}_y - 0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\hat{u}_y$$

in modulo: $B(C) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\frac{Ns^2}{C^2} \cdot 2\,A}{4\pi \cdot 4 \cdot 10^{-3} m} = 0.5 \cdot 10^{-4}\,T$

2) 1. Conoscendo l'energia magnetica del solenoide:

$$U_m = \frac{1}{2} L i_L^2$$

possiamo ricavare la corrente che circola in esso

$$i_L = \sqrt{\frac{2U_m}{L}} = 0.89\,A\ .$$

2. A regime, l'induttanza si comporta come un filo con R trascurabile, quindi, con questa considerazione, notiamo che nella maglia di sinistra le resistenze sono attraversate dalla stessa corrente:

$i_2 = i_L = 0.89\,A$ (per la considerazione sull'induttanza fatta poco fa) quindi $R_{eq} = R_1 + R_3 = 8\,\Omega$ (le resistenze, infatti, risultano in serie).

Quindi nella maglia:

$$f = R_{eq} i = 8\,\Omega \cdot 0.89\,A = 7.12\,V \ .$$

3. Quando l'interruttore viene aperto, l'induttanza si scarica con una corrente che decresce esponenzialmente con costante di tempo:

$$\tau = \frac{L}{R_2} = 1.25\,\text{ms}$$

dato che l'unica resistenza nella maglia percorsa da corrente (dopo l'apertura del circuito) è R_2.

La corrente sarà quindi

$$i(t_1) = i_L e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0.89\ A\ e^{-\frac{0.5\,ms}{1.25\,ms}} = 0.60\,A\ .$$

3) Affinché $\overrightarrow{B}$ sia un campo magnetico nel vuoto, deve essere che $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0$ e $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = 0$.

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = (\frac{\partial f}{\partial x} + 1) = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -1$, quindi la funzione sarà: $f(x, y, z) = -x + g(y, z)$

con $g(y, z)$ una funzione arbitraria di y e z.

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \hat{\imath}(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}) - \hat{\jmath}(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}) + \hat{k}(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}) =$$

$$= \hat{\imath}(0) - \hat{\jmath}(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}) + \hat{k}(\frac{\partial f}{\partial y}) = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ quindi $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, quindi $g(y, z) = h(z)$.

$1 - \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ quindi $\frac{\partial g(y, z)}{\partial z} = \frac{\partial h(z)}{\partial z} = 1$

Quindi, abbiamo trovato che $g(y,z) = h(z) = z + c$, dove c è una costante arbitraria che è definita dalle condizioni iniziali.

Sapendo che $B(0,0,0) = 0$:

$B(-x + z + c,\ y,\ x) = 0$ cioè $-x + z + c = 0$, quindi $c = 0$.

La forma della funzione *f* deve essere quindi:

$f(x, y, z) = f(x, z) = -x + z$.

Il campo magnetico nel vuoto avrà l'espressione

$\overrightarrow{B}(x, y, z) = ((-x + z)\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + x\hat{k})$.