Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

11 Gennaio 2018

Scritto - Onde

Esercizi:

1) Un'onda armonica viaggia lungo una corda, lunga L = 3.7 m e di massa m = 750 g, tenuta tesa da una forza di modulo F = 120 N. L'onda ha ampiezza A = 2.8 cm e frequenza $\nu = 32.9\,\text{Hz}$. Ignorando ogni effetto della forza peso, calcolare:
   1) la velocità v di propagazione dell'onda lungo la corda;
   2) la lunghezza d'onda λ;
   3) l'energia media per unità di lunghezza della corda (densità lineare di energia u);
   4) la potenza media $\bar{P}$ trasmessa dalla corda.

2) In una regione di spazio vuoto sono simultaneamente presenti due onde elettromagnetiche, le cui equazioni sono:

$$\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{1}} = E_0 \cos(ky + \omega t)(\hat{\imath} + \hat{k})/\sqrt{2}$$
$$\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{2}} = E_0 \cos(ky + \omega t + \pi/4)\hat{\imath}$$

   con $E_0 = 100\,\text{V/m}$ e $\omega = 10^{11}\,\text{s}^{-1}$. Determinare:
   1) la lunghezza d'onda λ delle due onde e la direzione di propagazione;
   2) l'espressione del campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ dell'onda risultante;
   3) l'intensità I dell'onda risultante;
   4) a quale regione dello spettro elettromagnetico appartengono tali onde.

Domande:

1) Spiegare il significato di impedenza meccanica o di impedenza per le onde elettromagnetiche.
2) Spiegare con qualche esempio l'effetto doppler.
3) In quali casi un mezzo su cui viaggiano le onde è detto dispersivo? Cosa significa? Fare qualche esempio.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.
Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{Nm}^2)$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Ns}^2/\text{C}^2$.

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. La velocità di propagazione di un'onda è data da:

$v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ dove T è la tensione a cui è sottoposta la corda, ovvero la forza F.

La densità lineare che appare nella relazione è

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0.75\,\text{kg}}{3.7\,\text{m}} = 0.2\,\text{kg/m}$$

Quindi la velocità di propagazione è

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{120\,\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{0.2\,\text{kg/m}}} = 24.49\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.$$

2. La lunghezza d'onda di un'onda è data da:

$\lambda = vT$ dove $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{\nu}$ è il periodo di oscillazione dell'onda.

Allora $\lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{24.49\,\text{m/s}}{32.9\,1/\text{s}} = 0.744\,\text{m} = 744\,\text{mm}\,.$

3. L'energia media della corda è data da

$E = \dfrac{1}{2}\mu A^2\omega^2\lambda$ dove $\omega = 2\pi\nu = 206.7\,\dfrac{1}{\text{s}}\,.$

Quindi la densità di energia u sarà:

$$u = \frac{E}{\lambda} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot 0.2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}\cdot(2.8\cdot10^{-2})^2\,\text{m}^2\cdot(206.7)^2\,\frac{1}{\text{s}^2} =$$

$$= 7.84\cdot10^{-5}\cdot 42724.89\,\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3.35\,\frac{\text{J}}{\text{m}}$$

4. La potenza media trasmessa dalla corda è data da

$$\bar{P} = \frac{E}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot (2{,}8 \cdot 10^{-2})^2\,\text{m}^2 \cdot (206.7)^2\,\frac{1}{\text{s}^2} \cdot 24.49\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 82.03\,\text{W}$$

2) 1. Sappiamo che la lunghezza d'onda si esprime come

$\lambda = \frac{v}{\nu}$ dove v è la velocità di propagazione dell'onda, che nel caso di onda elettromagnetica è c e ν è la frequenza.

Sapendo che $\omega = 2\pi\nu$, allora possiamo riscrivere la lunghezza d'onda come

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi 3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{10^{11}\,1/\text{s}} = 18.85\,\text{mm}\,.$$

La direzione di propagazione delle due onde è quella dell'asse y e sono entrambe onde regressive, quindi il verso di propagazione è quello negativo ($-\hat{\jmath}$).

2. Ricordiamo che il modulo del campo magnetico è legato a quello del campo elettrico dalla relazione:

$\vec{\mathbf{E}} = c\vec{\mathbf{B}}$, quindi possiamo scrivere le due ampiezze così:

$$\vec{\mathbf{B}}_1 = \frac{E_0}{c\sqrt{2}}\cos(ky + \omega t)(\hat{k} - \hat{\imath})$$
$$\vec{\mathbf{B}}_2 = \frac{E_0}{c}\cos(ky + \omega t + \frac{\pi}{4})\hat{k}$$

avendo ragionato sulle componenti di B considerando che esso deve essere perpendicolare sia alla direzione di oscillazione di E che a quella di propagazione delle onde.

Allora, il campo magnetico dell'onda risultante è

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2 = -\frac{E_0}{c\sqrt{2}}\cos(ky + \omega t)\hat{\imath} + \frac{E_0}{c\sqrt{2}}\cos(ky + \omega t)\hat{k} + \frac{E_0}{c}\cos(ky + \omega t + \frac{\pi}{4})\hat{k}$$

sviluppiamola ricordando anche la regola trigonometrica ($\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$) da applicare su $\vec{\mathbf{B}}_2$, dove $\alpha = ky + \omega t$ e $\beta = \frac{\pi}{4}$:

$$\vec{\mathbf{B}} = -\frac{\sqrt{2}E_0}{c}\cos(ky+\omega t)\hat{\imath} + \frac{\sqrt{2}E_0}{c}\sin(ky+\omega t)\hat{\imath} + \frac{E_0}{c\sqrt{2}}\cos(ky+\omega t)\hat{k}$$

3. L'onda risultante risulta avere l'espressione del campo elettrico data da

$$\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{TOT}} = \vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{1}} + \vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{2}} = E_0\cos(ky+\omega t)(\hat{\imath}+\hat{k})/\sqrt{2} + E_0\cos(ky+\omega t+\pi/4)\hat{\imath}$$

sviluppiamola ricordando anche la regola trigonometrica
$(\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$ da applicare su $\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{2}}$, dove $\alpha = ky - \omega t$ e $\beta = \frac{\pi}{4}$:

$$\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{TOT}} = \sqrt{2}E_0\cos(ky+\omega t)\hat{\imath} - \frac{E_0}{\sqrt{2}}\sin(ky+\omega t)\hat{\imath} + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos(ky+\omega t)\hat{k}$$

Sappiamo che l'intensità è data da: $\quad I = \epsilon\, c\, (E_0^2)_m$
dove $(E_0^2)_m$ è il valor medio del quadrato dell'ampiezza dell'onda, allora andiamo a calcolare quest'ultimo termine per tutte le componenti dell'onda risultante:

$$E_{0\hat{\imath}}^2 = (\sqrt{2}E_0\cos(ky+\omega t)\hat{\imath} - \frac{E_0}{\sqrt{2}}\sin(ky+\omega t)\hat{\imath})^2 =$$
$$= 2E_0^2\cos^2(ky+\omega t) + \frac{E_0^2}{2}\sin^2(ky+\omega t) - 2E_0^2\cos(ky+\omega t)\sin(ky+\omega t)$$

Il valor medio di questo termine, tenendo conto che il valor medio del seno e coseno è 1/2 e quello del loro prodotto è 0, è

$$(E_{0\hat{\imath}}^2)_m = \frac{2E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{4} - 0 = \frac{5}{4}E_0^2$$

Mentre, con le stesse considerazioni, per l'altra componente abbiamo

$$(E_{0\hat{k}}^2)_m = \frac{E_0^2}{4}$$

Quindi, in termini di intensità, avremo:

$$I_{\hat{\imath}} = \epsilon\, c\, \frac{5}{4}E_0^2 \qquad \text{e} \qquad I_{\hat{k}} = \epsilon\, c\, \frac{E_0^2}{4}$$

Allora l'intensità totale dell'onda risultante è

$$I = I_{\hat{\imath}} + I_{\hat{k}} = \epsilon\, c\, \frac{3}{2} E_0^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}\, \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2} \cdot 3 \cdot 10^8\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{3}{2} \cdot 10^4\, \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{m}^2} = 39.82\,\mathrm{W} \ .$$

Allo stesso risultato si arriva considerando il fenomeno dell'interferenza nella componente lungo l'asse x e, quindi, la relazione:

$$I_{\hat{\imath}} = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 + I_2} \cos \Delta$$

dove I_1 e I_2 sono le due intensità relative al coseno e al seno, mentre Δ è la differenza di fase tra le due onde (nel nostro caso $\Delta = \dfrac{\pi}{4}$).

4. Dato che la lunghezza d'onda trovata per entrambi le onde è $\lambda = 18.85\,\mathrm{mm}$, possiamo dire che esse appartengono alla regione dello spettro elettromagnetico delle microonde.

   Inoltre, conoscendo la pulsazione dell'onda, possiamo ricavarci la frequenza:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \simeq 8\,\mathrm{GHz}$$

che rientra nel range di frequenze delle microonde: $[1 - 300]\,\mathrm{GHz}$.