Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

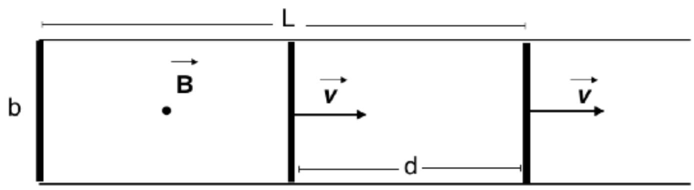
25 Gennaio 2018

Scritto - Elettromagnetismo

Esercizi:

1) Quattro cariche sono poste ai vertici di un quadrato nel piano cartesiano *(x,y)* con coordinate, in mm: $Q_1(0{,}0) = 1\,\mu\text{C}$, $Q_2(2{,}0) = -2\,\mu\text{C}$, $Q_3(2{,}2) = 4\,\mu\text{C}$ e $Q_4(0{,}2) = -3\,\mu\text{C}$. Calcolare:
   1) il valore del campo elettrico $\overrightarrow{\mathbf{E}}(1{,}1) = (E_x, E_y)$;
   2) il valore del potenziale $V(1{,}1)$;
   3) il momento di dipolo elettrico del sistema.

2) Un circuito è formato da due fili lunghi, paralleli e di resistenza elettrica trascurabile, connessi da un filo metallico, più breve di lunghezza $b = 0{,}5\,\text{m}$, disposto perpendicolarmente in modo da formare tre lati di un rettangolo. Un cingolo di materiale isolante, che si muove con velocità $v = 8\,\text{m/s}$, trasporta fili metallici disposti perpendicolarmente alla direzione di moto e a distanza $d = 50\,\text{cm}$ l'uno dall'altro. Il cingolo è disposto in maniera tale da mettere in contatto i fili con i due lati lunghi del rettangolo in una regione lunga $L = 1\,\text{m}$. Sapendo che in ogni istante vi sono due fili del cingolo in contatto con i lati lunghi, che l'intero sistema è immerso in un campo magnetico diretto verso l'alto di modulo $B = 0{,}5\,\text{T}$ e che tutti i lati corti, sia quello fisso che quelli in moto hanno una sezione $S = 1\,\text{mm}^2$ e una resistività $\rho = 10^{-4}\,\Omega\text{m}$ e determinare:
   1) la forza elettromotrice indotta nel circuito;
   2) la corrente che passa nel filo corto fisso;
   3) la forza magnetica agente sul cingolo.



Domande:

1) Ricavare l'espressione dell'energia elettrostatica di due sfere piene cariche molto distanti tra loro.
2) Descrivere come si distribuisce l'energia in funzione del tempo in un circuito RL.
3) Spiegare il principio di sovrapposizione per il potenziale elettrico.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.
Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{Nm}^2)$ *e* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Ns}^2/\text{C}^2$.

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. Ricordando che il campo elettrico ha la seguente espressione:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

e considerando che $r = \sqrt{2} \cdot 1\,\mathrm{mm} = \sqrt{2}\,\mathrm{mm}$, possiamo scrivere le espressioni dei campi elettrici per tutte e quattro le cariche, nelle loro componenti cartesiane:

$$\vec{\mathbf{E}}_\mathbf{1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}})$$

$$\vec{\mathbf{E}}_\mathbf{2} = (\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|Q_2|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|Q_2|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}})$$

$$\vec{\mathbf{E}}_\mathbf{3} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|Q_3|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|Q_3|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}})$$

$$\vec{\mathbf{E}}_\mathbf{4} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|Q_4|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|Q_2|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}})$$

Allora il campo elettrico risultante nel punto (1, 1) sarà:

$$\vec{\mathbf{E}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|Q_1| + |Q_2| - |Q_3| - |Q_4|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|Q_1| - |Q_2| - |Q_3| + |Q_4|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}) =$$

$$= (-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4 \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2 \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}) =$$

$$= (-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0}, -\frac{1}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0})$$

2. Il potenziale elettrico nel punto (1,1) è dato da:

$$V(1,1) = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{4\pi\epsilon_0\sqrt{2} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 0$$ dato che la somma delle cariche è nulla.

3. Ricordiamo che la definizione di momento di dipolo per un sistema di cariche è

$$\vec{\mathbf{p}} = \sum_i q_i \cdot \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$$ rispetto ad un polo.

Allora dividendo per le due coordinate, troviamo

$$p_x = \sum_i (q_i\, x_i) = Q_1(-1) + Q_2 + Q_3 + Q_4(-1) = (-1-2+4+3)\cdot 10^{-9}\,\mathrm{Cm} = 4\cdot 10^{-9}\,\mathrm{Cm}$$

$$p_y = \sum_i (q_i\, y_i) = Q_1(-1) + Q_2(-1) + Q_3 + Q_4 = (-1+2+4-3)\cdot 10^{-9}\,\mathrm{Cm} = 2\cdot 10^{-9}\,\mathrm{Cm}$$

Quindi, il modulo del momento di dipolo sarà

$$|\,\vec{\mathbf{p}}\,| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = 2\sqrt{5}\cdot 10^{-9}\,\mathrm{Cm}$$

2) 1. La forza elettromotrice è determinata dalla legge di Faraday-Neumann-Lentz. In questo caso la variazione di flusso è data solo dall'aumento lineare della superficie contenuta nel circuito, ossia:

$A_0 + bvt = b(l_0 + vt)$ avendo chiamato con A_0 l'area iniziale e l_0 il lato (orizzontale) iniziale del circuito.

Quindi la variazione del flusso rispetto al tempo sarà data da

$$\frac{\partial \Phi(\overrightarrow{\mathbf{B}})}{\partial t} = B\frac{\partial}{\partial t}[b(l_0 + vt)] = Bbv$$

Quindi la forza elettromotrice indotta non è altro che

$$f_i = Bbv = 0.5\,\mathrm{T}\cdot 0.5\,\mathrm{m}\cdot 8\,\mathrm{m/s} = 2\,\mathrm{V}$$

Tale fem è applicata in maniera eguale su entrambi i fili in movimento del cingolo.

2. La corrente che passa nel filo corto fisso si può determinare considerando il circuito costituito dai fili e il suo equivalente. Infatti, non è altro che un circuito con due resistenza in parallelo (fili corti del cingolo) alla stessa differenza di potenziale (fem indotta), in serie con una resistenza uguale alle altre due.

Avendo sia la sezione dei fili che la resistività, possiamo trovare il valore delle resistenze

$$R = \frac{\rho\, l}{S} = 50\,\Omega$$

Allora la resistenza equivalente del parallelo sarà $R' = \frac{R}{2}$ e, di conseguenza, la resistenza equivalente totale del circuito sarà la serie tra *R* e *R'*:

$$R_{\text{eq}} = R + R' = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

La corrente che passa nel filo corto sarà allora

$$i_i = \frac{f_i}{R_{\text{eq}}} = \frac{2f_i}{3R} = 27\,\text{mA}$$

3. Sapendo che la forza magnetica agente su un filo di lunghezza *l* è definita come

$$\vec{\mathbf{F}} = i\,\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

allora la forza totale agente sul cingolo sarà il doppio della forza che agisce su ciascun filo (che è uguale):

$$|\,\vec{\mathbf{F}}\,| = 2(\frac{i_i}{2}\,b\,B) = 75 \cdot 10^{-4}\,\text{N}$$

avendo considerato che su ogni filo del cingolo scorre la metà della corrente indotta che passa nel filo corto fisso.