Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

25 Gennaio 2018

Scritto - Onde

Esercizi:

1) Da un filo metallico di densità lineare $\mu = 0.3\,\mathrm{g/m}$ si tagliano tre fili di lunghezze rispettivamente $L_1 = 1\mathrm{m}$, $L_2 = 1.25\ \mathrm{m}$ e $L_3 = L_1+L_2$. Vengono vincolati agli estremi e tesi in modo tale da avere la stessa frequenza fondamentale di $\nu = 50\,\mathrm{Hz}$. Tutti i fili sono sollecitati a produrre oscillazioni di ampiezza A = 1.5 mm. Calcolare:
   1) le tensioni T_1, T_2 e T_3 a cui devono essere sottoposti i fili;
   2) le energie di oscillazione E_1, E_2 e E_3 dei fili.

   Se i due fili più corti fossero tesi alla tensione T3, calcolare:
   3) le due frequenze fondamentali ν_1' e ν_2' ;
   4) le due energie di oscillazione E_1' e E_2' .

2) Una sorgente S_1 emette isotropicamente un'onda elettromagnetica monocromatica con una potenza $P = 100\,\mathrm{W}$. Calcolare:
   1) l'ampiezza del campo elettrico alla distanza $d = 1\,\mathrm{km}$;
   2) la densità di energia u;
   3) successivamente, viene posta una sorgente S_2 a una distanza $a = 5\,\lambda$ da S_1, coerente con quest'ultima ma sfasata di $\pi/2$: calcolare le posizioni dei massimi e i minimi di interferenza su uno schermo posto a una distanza $D = 100\,\lambda$ dalle sorgenti.

Domande:

1) Spiegare il fenomeno dei battimenti.
2) Illustrare le differenze principali tra onde piane e onde sferiche.
3) Scrivere esplicitamente l'espressione di un'onda elettromagnetica a scelta del candidato e spiegarne le proprietà. Per tale onda, com'è definito il vettore di Poynting?

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.
Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(Nm^2)}$ *e* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Ns^2/C^2}$.

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. Sappiamo che le frequenza naturali della corda vincolata agli estremi sono

$$\nu_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

e quella fondamentale avviene nel caso in cui n = 1.

Quindi la frequenza fondamentale è data da $\nu = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ e possiamo trovare la tensione da quest'ultima relazione:

$$T = 4\mu\nu^2L^2$$

Allora:

$$T_1 = 4\mu\nu^2L_1^2 = 4 \cdot 3 \cdot 10^{-4}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 25 \cdot 10^2\,\frac{1}{\text{s}^2} \cdot 1\,\text{m}^2 = 3\,\text{N}$$

$$T_2 = 4\mu\nu^2L_2^2 = 4 \cdot 3 \cdot 10^{-4}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 25 \cdot 10^2\,\frac{1}{\text{s}^2} \cdot 1.56\,\text{m}^2 = 4.69\,\text{N}$$

$$T_3 = 4\mu\nu^2L_3^2 = 4 \cdot 3 \cdot 10^{-4}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 25 \cdot 10^2\,\frac{1}{\text{s}^2} \cdot 5.06\,\text{m}^2 = 15.19\,\text{N}$$

2. L'energia di oscillazione di una corda percorsa da un'onda stazionaria è data da

$$E = \frac{1}{4}\mu L A^2\omega_n^2 \qquad \text{dove } \omega_n = 2\pi\nu_n \;\; —> \;\; \omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\,.$$

La relazione diventa:

$$E = \frac{1}{4}\mu L A^2\frac{\pi^2}{L^2}\frac{T}{\mu} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2A^2T}{L}$$

e possiamo calcolare le energie per tutti i fili:

$$E_1 = \frac{1}{4}\frac{\pi^2A^2T_1}{L_1} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2 \cdot 225 \cdot 10^{-8}\,\text{m}^2 \cdot 3\,\text{N}}{1\,\text{m}} = 1.66 \cdot 10^{-5}\,\text{J}$$

$$E_2 = \frac{1}{4}\frac{\pi^2 A^2 T_2}{L_2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2 \cdot 225 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^2 \cdot 4.69\,\mathrm{N}}{1.25\,\mathrm{m}} = 2.08 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}$$

$$E_3 = \frac{1}{4}\frac{\pi^2 A^2 T_3}{L_3} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2 \cdot 225 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^2 \cdot 15.19\,\mathrm{N}}{2.25\,\mathrm{m}} = 3.75 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}$$

3. Calcoliamo le frequenze fondamentali dei fili più corti nell'ipotesi in cui la tensione a cui sono sottoposti sia T_3, trovata nel punto 1.

$$\nu_1' = \frac{1}{2L_1}\sqrt{\frac{T_3}{\mu}} = \frac{1}{2 \cdot 1\,\mathrm{m}}\sqrt{\frac{15.19\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}^2}{3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}}} = 112.5\,\mathrm{Hz}$$

$$\nu_2' = \frac{1}{2L_2}\sqrt{\frac{T_3}{\mu}} = \frac{1}{2 \cdot 1.25\,\mathrm{m}}\sqrt{\frac{15.19\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}^2}{3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}}} = 90\,\mathrm{Hz}$$

4. Calcoliamo, ora, nella stessa ipotesi, le energie di oscillazione dei fili più corti.

$$E_1' = \frac{1}{4}\frac{\pi^2 A^2 T_3}{L_1} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2 \cdot 225 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^2 \cdot 15.19\,\mathrm{N}}{1\,\mathrm{m}} = 8.43 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}$$

$$E_2' = \frac{1}{4}\frac{\pi^2 A^2 T_3}{L_2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2 \cdot 225 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^2 \cdot 15.19\,\mathrm{N}}{1.25\,\mathrm{m}} = 6.74 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}$$

2) 1. Sapendo che la relazione tra l'intensità e la potenza media di un'onda è

$$I = \frac{P}{\Sigma} = \frac{P}{4\pi d^2}$$ dove Σ è l'a superficie attraversata dall'onda

possiamo calcolare l'intensità:

$$I = \frac{P}{4\pi\, d^2} = \frac{10^2\,\mathrm{W}}{4\pi\, 10^6\,\mathrm{m}^2} = 7.96 \cdot 10^{-6}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Inoltre sappiamo che

$$I = \frac{E_0^2}{2Z_0}$$ dove Z_0 è l'impedenza dell'onda nel vuoto e vale circa 377 Ω

allora

$$E_0 = \sqrt{2 Z_0 I} = \sqrt{2 \cdot 377\,\Omega \cdot 7.96 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}} = 7.75 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{V/m}$$

2. L'intensità media di un'onda si può anche scrivere come

$I = cu$ dove c è la velocità della luce e u è la densità di energia.

Allora troviamo che

$$u = \frac{I}{c} = \frac{7.96 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} = 2.6 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J/m^3}\,.$$

3. Nell'ipotesi in cui l'equazione delle onde è la seguente:

$$E_1 = E_{01}\cos(kr_1 - \omega t) = E_{01}\cos(\omega t - kr_1) = E_{01}\cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$E_2 = E_{02}\cos(kr_2 - \omega t + \frac{\pi}{2}) = E_{02}\cos(\omega t - kr_2 - \frac{\pi}{2}) = E_{02}\cos(\omega t + \alpha_2)$$

dove abbiamo chiamato

$$\alpha_1 = -kr_1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = -kr_2 - \frac{\pi}{2}$$

Allora lo sfasamento tra le due onde sarà

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = -kr_1 + kr_2 + \frac{\pi}{2} = k(r_2 - r_1) + \frac{\pi}{2}$$

dato che $r_2 - r_1 = a\sin\theta$ (dove θ è l'angolo tra la normale della distanza tra le due sorgenti e la direzione di propagazione delle onde)

allora la differenza di fase si può riscrivere come:

$$\delta = k(r_2 - r_1) + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}5\lambda\sin\theta + \frac{\pi}{2} = 10\pi\sin\theta + \frac{\pi}{2}$$

Sapendo che l'intensità totale è

$$I = 4I_1\cos^2\frac{\delta}{2} = 4I_1\cos^2(5\pi\sin\theta + \frac{\pi}{4})$$

Nel caso in cui vogliamo trovare i massimi e i minimi su uno schermo a distanza $D \gg a$, quindi nel caso descritto dall'esercizio, possiamo applicare le seguenti approssimazioni:

$$\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta = \frac{x}{D}$$ dove x è la distanza sullo schermo dal centro tra le S_1 e S_2

Allora l'intensità diventa:

$$I(x) = 4I_1 \cos^2\left(\frac{5\pi x}{D} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Per avere i massimi di interferenza dovrà essere:

$$\frac{5\pi x}{D} + \frac{\pi}{4} = n\pi \qquad \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$x_{\max} = \frac{4n-1}{4}\frac{D}{5} = \frac{4n-1}{4}\frac{100\lambda}{5} = 20\frac{(4n-1)}{4}\lambda = 5(4n-1)\lambda$$

Per avere i minimi di interferenza, invece:

$$\frac{5\pi x}{D} + \frac{\pi}{4} = (n + \frac{1}{2})\pi \qquad \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$x_{\min} = \frac{4n+1}{4}\frac{D}{5} = \frac{4n+1}{4}\frac{100\lambda}{5} = 20\frac{(4n+1)}{4}\lambda = 5(4n+1)\lambda$$