Fisica Generale T2 - Prof. M. Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

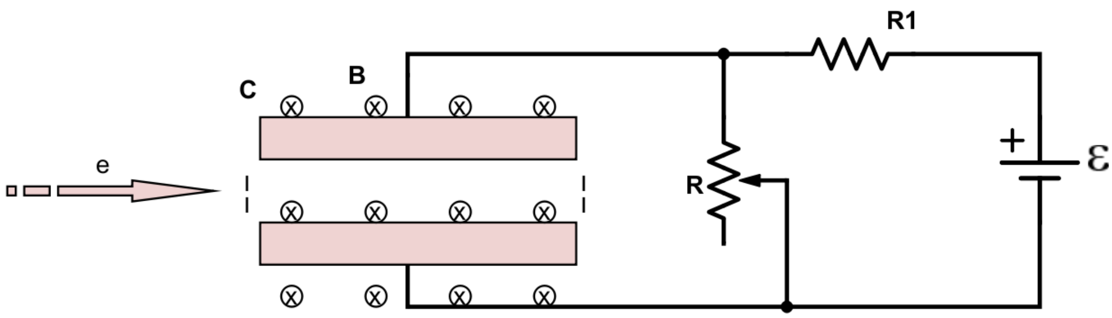
7 Febbraio 2018

Elettromagnetismo

Esercizi:

1) Una spira circolare con carica totale $Q = 1\,\mathrm{C}$ e raggio $R = 1\,\mathrm{m}$, ruota attorno al suo asse (retta perpendicolare al piano su cui posa e passante per il centro) con una frequenza $f = 10\,\mathrm{Hz}$. Definito un punto P sull'asse a distanza R dal centro della spira, determinare:
a) il potenziale elettrico lungo l'asse della spira e il suo valore in P, assumendo nullo il potenziale al centro della spira;
b) il campo elettrico lungo l'asse della spira e il suo valore in P;
c) il campo magnetico lungo l'asse della spira e il suo valore in P.

2) Un selettore di velocità per un fascio di elettroni è realizzato immergendo il circuito mostrato in figura in un campo magnetico, entrante nel piano del foglio, di intensità $|\vec{B}| = 0{,}1\,\mathrm{T}$. Il campo elettrico creato dal condensatore è perpendicolare al campo magnetico. Il condensatore è costituito da un capacitore piano di area $S = 1\,\mathrm{m}^2$ e distanza tra le piastre $d = 10\,\mathrm{cm}$, mentre la resistenza R_1 vale $R_1 = 100\,\Omega$ e la tensione erogata dal generatore vale $\varepsilon = 200\,\mathrm{V}$. Sapendo che la massa dell'elettrone vale $m_e = 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, calcolare:
a) quale resistenza deve essere selezionata nella resistenza variabile R in modo che vengano selezionati elettroni con energia $E_m = 4 \times 10^{-24}\,\mathrm{J}$;
b) modulo, direzione e verso del vettore di Poynting al centro del condensatore.



Domande:
1) Spiegare il potere di ionizzazione delle punte.
2) Cosa si intende per "resistenza interna" di un generatore di corrente? Come la si può misurare?
3) Definire il concetto di autoinduttanza e illustrarne qualche applicazione.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.
Nel caso servano, si usino i valori $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(Nm^2)}$ *e* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$

Soluzione Esercizio 1

a) Per il calcolo del potenziale (e del campo elettrico) non ha importanza che la spira sia in rotazione. Scelta l'origine al centro della spira, e indicata con z la coordinata del punto generico lungo l'asse, il contributo infinitesimo al potenziale di un arco di circonferenza su cui è depositata una carica dq è d$q/(4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2})$. Pertanto il potenziale totale vale:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}} + k,$$

dove k è una costante da determinare sulla base della condizione di normalizzazione. Imponendo che $V(0) = 0$ si ha $k = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}$ e quindi

$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{1}{R}\right),$$

e quindi $V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = -2,63\times 10^9$ V.
b) Il campo elettrico è diretto lungo l'asse z e vale:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{k}},$$

da cui $\vec{\mathbf{E}}(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\frac{1}{2\sqrt{2}}\hat{\mathbf{k}} = 3,18\times 10^9\,(\mathrm{V/m})\hat{\mathbf{k}}$ Si noti che, quando si è molto distanti dalla spira, l'andamento del campo elettrico è $\sim 1/z^2$, ovvero quello prodotto da una carica puntiforme.
c) La spira carica in rotazione si comporta, a tutti gli effetti, come una spira percorsa da una corrente stazionaria $i = Qf$. Il campo magnetico è diretto lungo l'asse e può essere ricavato dalla prima legge di Laplace, caso notevole affrontato a lezione nella parte di teoria. Il risultato vale:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\frac{iR^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0}{2}\frac{QfR^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{k}},$$

dove abbiamo sostituito alla corrente il prodotto Qf. Si ha quindi $\vec{\mathbf{B}}(R) = \frac{\mu_0}{2}\frac{Qf}{2R\sqrt{2}} = 2,22\,\mu$T. Si noti che, quando si è molto distanti dalla spira, l'andamento del campo magnetico è $\sim 1/z^3$, ovvero quello prodotto da un dipolo magnetico.

Soluzione Esercizio 2

Gli elettroni, in approssimazione non relativistica, avranno velocità di modulo $v = \sqrt{2E_m/m} = 2965$ m/s. La forza di Lorentz corrispondente a questa velocità è $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$. Visto che la direzione della traiettoria è perpendicolare al campo magnetico, il modulo della forza è $F = qvB$, con verso opposto a quella generata dal campo elettrico sugli elettroni.
Si richiede, quindi, $F(E) = F(B)$ per selezionare gli elettroni. Con $F(E) = qE$ e $E = V_R/d$, con V_R la tensione ai capi delle armature, che coincide con la tensione ai capi della resistenza variabile. Nel circuito, raggiunto l'equilibrio, $V_R = i*R = \frac{\epsilon}{R_1+R}R$. Risolvendo questa equazione per R, si trova $R = V_R R_1/(\epsilon - V_R)$. Sostituendo quindi a V_R la sua espressione, si ha

$$R = EdR_1/(\epsilon - Ed) = vBdR_1/(\epsilon - vBd) = \sqrt{2E_m/m}BdR_1/(\epsilon - Bd\sqrt{2E_m/m}) = 17.4\,\Omega\,.$$

Con $|E| = |vB|$ e B noto, sapendo che il campo elettrico è perpendicolare al campo magnetico, il vettore di Poynting nel centro del condensatore ha modulo

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{vB^2}{\mu_0} = 23.6\,\mathrm{MW/m^2}\,,$$

con la stessa direzione e verso del fascio di elettroni.