Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

07 Febbraio 2018

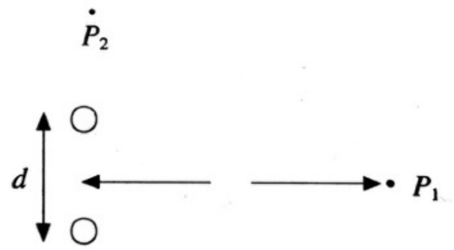
Scritto - Onde

Esercizi:

1) Un'onda armonica viaggia, con velocità $v = 20\,\mathrm{m/s}$, lungo una corda di massa $m = 500\,\mathrm{g}$. La corda è tesa e fissata ai suoi estremi a due pareti poste a una distanza $L = 4\,\mathrm{m}$. Si consideri che l'onda ha frequenza $\nu = 25\,\mathrm{Hz}$ e ampiezza $A = 2.5\,\mathrm{cm}$.
   Determinare:
   1) la tensione a cui è sottoposta la corda;
   2) la lunghezza d'onda;
   3) l'energia immagazzinata nella corda;
   4) ad un certo punto la corda viene vincolata anche nel punto a distanza $L_1 = 3/4\,L$ dalla parete sinistra, mantenendo la corda tesa alla stessa tensione. Determinare le frequenze fondamentali delle onde nei due tratti di corda.

2) Due sorgenti di onde elettromagnetiche, di uguale frequenza $\nu = 800\,\mathrm{MHz}$ ed uguale potenza P, poste a distanza $d = 12.5\,\mathrm{cm}$, emettono in fase onde sferiche che si propagano con velocità c. In un punto P_1 dell'asse di simmetria, distante $r = 5\,\mathrm{m}$ dal punto di mezzo tra le sorgenti, l'onda risultante ha ampiezza pari a $E_{0P_1} = 5\,\mathrm{V/m}$.
   Calcolare, nelle approssimazioni che si riterrà utile introdurre:
   1) l'ampiezza E_0 dell'onda di ciascuna sorgente in P_1;
   2) la potenza di ciascuna sorgente.

   Considerato il punto P_2 che sta sulla retta congiungente le due sorgenti alla stessa distanza r dal centro, calcolare in P_2:
   3) l'intensità dell'onda risultante I_2;
   4) l'ampiezza dell'onda risultante E_{0P_2}.



Domande:

1) Spiegare il principio fisico alla base del fenomeno della diffrazione.
2) Illustrare con qualche esempio la legge di Snell.
3) Descrivere il fenomeno della polarizzazione ed illustrarne le caratteristiche principali.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.
Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(Nm^2)}$ *e* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Ns^2/C^2}$.

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. La velocità di propagazione di un'onda è data da:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$ dove T è la tensione a cui è sottoposta la corda.

La densità lineare che appare nella relazione è

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0.5\,\mathrm{kg}}{4\,\mathrm{m}} = 0.125\,\mathrm{kg/m}$$

Quindi la tensione è

$$T = v^2\mu = 400\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \cdot 0.125\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} = 50\,\mathrm{N}\,.$$

2. La lunghezza d'onda di un'onda è data da:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{20\,\mathrm{m/s}}{25\;1/\mathrm{s}} = 0.8\,\mathrm{m}\,.$$

3. Ricordando che la densità di energia è data da

$$u = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 \qquad \text{dove} \quad \omega = 2\pi\,\nu = 157.08\,\mathrm{s}^{-1}$$

allora l'energia totale immagazzinata nella corda considerata è

$$E = \frac{1}{4}\mu L A^2\omega^2 = \frac{1}{4}\frac{m}{L}LA^2\omega^2 = \frac{1}{4}mA^2\omega^2 =$$

$$\frac{1}{4}\cdot 0.5\,\mathrm{kg}\cdot(2.5\cdot 10^{-2})^2\,\mathrm{m}^2\cdot(157.08)^2\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} = 1.93\,\mathrm{J}$$

4. Ricordiamo che le frequenze delle armoniche sono date da

$$\nu_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$ e quella fondamentale avviene nel caso di n = 1.

Inoltre, nei due tratti della corda, notiamo che la massa rimane la stessa, così come la densità lineare, infatti:

$$\mu_1 = \frac{\frac{3}{4}m}{\frac{3}{4}L} = \frac{m}{L} = \mu = \mu_2 = \frac{\frac{1}{4}m}{\frac{1}{4}L} = \frac{m}{L}$$

Allora, le frequenza fondamentali dei due tratti sono rispettivamente:

$$\nu_{01} = \frac{1}{2\frac{3}{4}L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{2}{3L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{6\,\mathrm{m}}\sqrt{\frac{50\,\mathrm{N}}{0.125\,\mathrm{kg/m}}} = 3.33\,\mathrm{Hz}$$

$$\nu_{02} = \frac{1}{2\frac{1}{4}L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{2\,\mathrm{m}}\sqrt{\frac{50\,\mathrm{N}}{0.125\,\mathrm{kg/m}}} = 10\,\mathrm{Hz}$$

2) 1. Prima di tutto possiamo metterci nell'approssimazione in cui

$r_1 = r_2 \simeq r$ dato che $d \ll r$.

Sappiamo che per il fenomeno di interferenza vale

$I = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2}$ dato che le due sorgenti hanno la stessa potenza e, quindi, la stessa intensità I_1 .

Inoltre, dato che le onde emesse sono in fase, allora $I = 4I_1$.

Sapendo che, per le onde elettromagnetiche, vale la relazione

$I = \frac{E_0^2}{2Z_0}$ dove Z_0 è l'impedenza dell'onda nel vuoto e vale circa 377 Ω

Allora, possiamo trovare l'ampiezza delle onde emesse in questo modo:

$I_1 = \frac{I}{4}$ ==> $E_{01}^2 = \frac{E_{0p_1}^2}{4}$

quindi

$$E_{01} = \frac{E_{0p_1}}{2} = 2.5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

2. Ricordando, inoltre, che

$$I = \frac{P}{\Sigma} = \frac{P}{4\pi d^2} \qquad \text{dove } \Sigma \text{ è l'a superficie attraversata dall'onda}$$

possiamo calcolare la potenza delle sorgenti:

$$P = I_1 4\pi\, r^2$$

Conoscendo l'ampiezza dell'onda, possiamo calcolarne l'intensità:

$$I_1 = \frac{E_{01}^2}{2Z_0} = \frac{(2.5\,\mathrm{V/m})^2}{2 \cdot 377\,\Omega} = 8.29 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

allora la potenza sarà

$$P = I_1 4\pi\, r^2 = 8.29 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\, 4\pi \cdot 25\,\mathrm{m}^2 = 2.60\,\mathrm{W}$$

3. Nel caso in cui P_2 si trovi sulla congiungente delle due sorgenti, $r_1 \neq r_2$, quindi ci sarà uno sfasamento tra le due onde dato da

$$\delta = k(r_2 - r_1)$$

Ridefiniamo le distanze in questo modo:

$$r_1 = r - \frac{d}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = r + \frac{d}{2}$$

quindi la differenza di fase diventa:

$$\delta = k(r_2 - r_1) = k(r + \frac{d}{2} - r + \frac{d}{2}) = kd$$

Inoltre $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi\,\nu}{c} = \dfrac{2\pi\, 8 \cdot 10^8\,\mathrm{Hz}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} = 5.33\,\pi\ \mathrm{m}^{-1}$

allora

$$I_2 = 4I_1 \cos^2\frac{kd}{2} = 4 \cdot 8.29 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\cos^2(\frac{5.33\,\pi\ \mathrm{m}^{-1} \cdot 5\,\mathrm{m}}{2}) =$$

$$= 33.16 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\cos^2(13.33\,\pi) = 33.16 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \cdot 0.273 = 9.05 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

4. Allora l’ampiezza dell’onda risultante E_{0P_2} sarà data da

$$E_{0P_2} = \sqrt{2\,Z_0\,I_2} = \sqrt{2 \cdot 377\,\Omega \cdot 9.05 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}} = 2.61\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$