Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

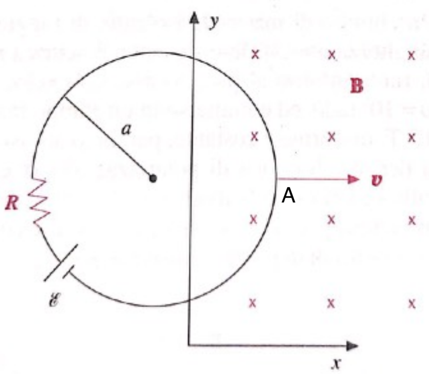
06 Settembre 2018

Scritto - Elettromagnetismo

Esercizi:

1) Un'astronave è formata da un guscio sferico conduttore di raggio R = 3 m e contiene un singolo astronauta. Il razzo vettore la rilascia nello spazio profondo in una condizione iniziale scarica e può considerarsi praticamente ferma. Questa viene quindi immersa in un vento solare costante formato principalmente da protoni p con un flusso $\Phi = 10^8$ protoni $\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$ e una densità $\delta = 2.5$ protoni cm^{-3}. Quando un protone colpisce la superficie del metallo può portare via un elettrone, caricando positivamente la superficie della sfera. Inoltre, dato che i protoni vengono da molto lontano, si può considerare nulla la loro energia potenziale. Sapendo che la massa del protone è $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg e assumendo che tutti i protoni abbiano la stessa velocità, calcolare
   1) la densità superficiale di carica che si può accumulare sull'astronave;
   2) il valore del campo elettrico percepito dall'astronauta;
   3) l'energia elettrostatica accumulata sulla superficie dell'astronave.

2) Una spira circolare di raggio $a = 20\,\mathrm{cm}$, resistenza $R = 20\,\Omega$, alimentata da un generatore di forza elettromotrice $\varepsilon = 2\,\mathrm{V}$ collegato come in figura, si muove su un piano orizzontale con velocità costante $v = 20\,\mathrm{m/s}$ nella direzione x. Ortogonale al piano ed entrante in esso, esiste un campo magnetico, uniforme e costante con valore $B = 0.25\,\mathrm{T}$ per $x \geq 0$ e nullo per $x < 0$. Indicato con A il primo punto della spira che entra nel campo magnetico, calcolare:



   1) il valore della corrente i(x_A) che percorre la spira;
   2) la forza $\overrightarrow{F}(x_A)$ che agisce sulla spira e la distanza x_A alla quale $\overrightarrow{F}(x_A) = 0$, nell'ipotesi che la velocità sia sempre mantenuta costante;
   3) la carica q che percorre la spira, dall'istante in cui il punto A entra nel campo fino all'istante in cui tutta la spira è immersa.

Domande:

1) Discutere sinteticamente il teorema di Gauss.
2) Discutere l'equazione di continuità per la carica elettrica e mostrare come essa sia contenuta nelle equazioni di Maxwell.
3) Descrivere brevemente l'effetto Hall.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.
Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(Nm^2)}$ *e* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Ns^2/C^2}$.

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. La carica si "accumula" sulla superficie dell'astronave finché l'energia potenziale elettrostatica sulla sua superficie uguaglia, in modulo, l'energia cinetica dei protoni in arrivo. La velocità dei protoni è

$$v = \frac{\Phi}{\delta} = 4 \cdot 10^7\,\mathrm{cm/s} = 4 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$$

da cui si ricava l'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} m_p v^2 = 1.34 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{J}.$$

Essendo la carica distribuita con simmetria sferica, il modulo dell'energia potenziale sulla superficie è $U = e\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$. Ponendo U = K si ottiene

$$Q = \frac{K 4\pi\epsilon_0 R}{e} = 2.77 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$$

da cui si ricava la densità superficiale di carica

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = 2.45 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C/m^2}.$$

2. Il campo elettrico all'interno del conduttore è ovviamente nullo.
3. L'energia elettrostatica sulla superficie dell'astronave è

$$E = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = 1.15 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}.$$

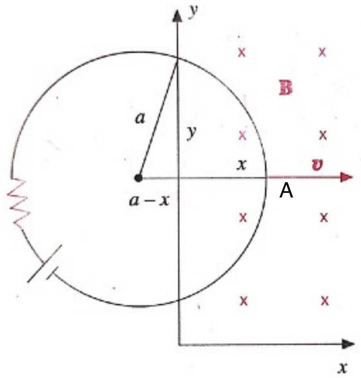
2) 1. Sappiamo che la forza elettromotrice indotta è

$$\varepsilon_i = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

dove $d\vec{l}$ viene preso con lo stesso verso e la stessa direzione della corrente generata da ε (verso orario).

Ragionando sui vettori, avendo preso il verso della corrente come orario, il prodotto

$\vec{v} \times \vec{B}$ avrà verso opposto a $d\vec{l}$. Inoltre, dato che $\vec{v} \times \vec{B}$ è sempre perpendicolare all'asse x, si integra il percorso del circuito solo lungo l'asse y. Come mostrato in figura, abbiamo che



$$y^2 = a^2 - (a - x)^2 = x(2a - x)$$

quindi

$$y = \sqrt{x(2a - x)} \, .$$

L'integrale, quindi, diventa

$$\varepsilon_i = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\, vB2y = -\, 2vB\sqrt{x(2a - x)} \, .$$

La corrente, dipendente da x, sarà

$$i(x) = \frac{\varepsilon_{TOT}}{R} = \frac{\varepsilon + \varepsilon_i}{R} = \frac{1}{R}(\varepsilon - 2vB\sqrt{x(2a - x)}) \, .$$

2. La forza che agisce sulla spira è data da

$$\vec{F}(x) = i(x) \int d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$F(x) = i(x)\, 2yB = \frac{2B}{R}(\varepsilon - 2vB\sqrt{x(2a - x)})\sqrt{x(2a - x)}$$

dove $2y$ è il risultato dell'integrale sugli elementi infinitesimi di linea $d\vec{l}$.

Considerando la velocità costante nel tempo, troviamo la distanza a cui la forza si annulla:

$$\frac{2B}{R}(\varepsilon - 2vB\sqrt{x(2a - x)})\sqrt{x(2a - x)} = 0$$

Risolviamo l'equazione attraverso i seguenti passaggi:

$$\varepsilon - 2vB\sqrt{x(2a - x)} = 0$$
$$\sqrt{x(2a - x)} = \frac{\varepsilon}{2vB}$$
$$2ax - x^2 = \frac{\varepsilon^2}{(2vB)^2}$$
$$x^2 - 2ax + \frac{\varepsilon^2}{(2vB)^2} = 0$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado, otteniamo

$$x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - \frac{\varepsilon^2}{(2vB)^2}}}{2}$$

Inserendo i valori dati dal testo, vediamo che il termine sotto radice è pari a 0, quindi l'unico valore di x sarà

$$x = \frac{2a}{2} = 0.2\,\mathrm{m}$$

3. Per calcolare la carica che percorre la spira, ragioniamo in termini di flusso che attraversa la spira e otteniamo un integrale di questo tipo:

$$q = \int i\,dt = \int_0^t \frac{\varepsilon}{R}dt - \int_{\Phi_0}^{\Phi_1} \frac{d\Phi}{R} = \frac{\varepsilon}{R}t - \frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_0)$$

dove $\Phi_0 = 0$, quando la spira è fuori dal campo magnetico, e
$\Phi_1 = B \cdot A_{\mathrm{TOT}} = B\pi a^2$, quando la spira è tutta immersa nel campo. Allora l'integrale diventa:

$$q = \frac{\varepsilon}{R}t - \frac{B\pi a^2}{R}$$

Inoltre il tempo è $t = \dfrac{2a}{v}$, allora la carica è valore

$$q = 4.3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}\,.$$