Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

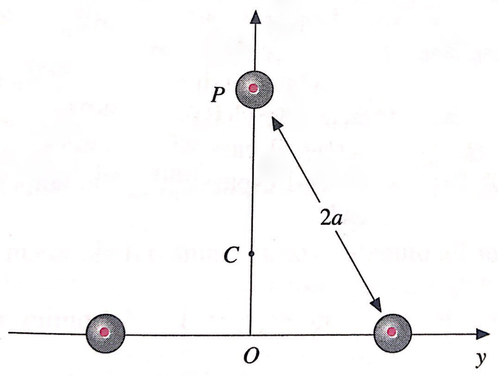
CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

07 Dicembre 2018

Secondo parziale - Compito A

Esercizi:

1) Tre lunghi fili conduttori sono tra loro paralleli, diretti come l'asse x e nel piano x = 0 sono disposti ai vertici di un triangolo equilatero di lato $2a = 15\,\text{cm}$, come mostrato in figura. Essi sono percorsi dalla stessa corrente $i = 10\,\text{A}$ concorde all'asse x. Calcolare:
   a. il campo magnetico $\overrightarrow{B}_C$ nel centro C del triangolo;
   b. il campo magnetico $\overrightarrow{B}_P$ nel punto P, al centro del filo;
   c. la forza $\overrightarrow{F}$ per unità di lunghezza sul filo disposto in P.



2) Una barretta conduttrice di massa m scivola sopra un conduttore metallico rettangolare mantenendosi parallela ai due lati più corti e formando in questo modo due maglie chiuse. Il sistema è posto in un piano verticale e la sbarretta si muove, sotto l'azione del proprio peso. Sia R la resistenza elettrica della sbarretta ed L la distanza tra i due punti di contatto. Il dispositivo è immerso in un campo magnetico uniforme e costante, di modulo B, ortogonale al foglio, con verso uscente. Nell'ipotesi che all'istante $t = 0$, la barretta sia ferma, si determini (al variare di t e trascurando l'attrito dell'aria):
   a. la corrente indotta nel circuito;
   b. la velocità della barretta;
   c. la velocità assunta quando il moto diventa uniforme.

3) Sia dato il campo $\overrightarrow{B}(x, y, z) = B_0\,(-x\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + (f(x, y, z) + y)\hat{k})$. Trovare la forma che può assumere la funzione $f(x, y, z)$ affinché il campo dato possa rappresentare un campo magnetico nel vuoto, considerando la condizione che $\overrightarrow{B}(0,0,0) = \overrightarrow{0}$.

Domande:

1) Definire l'induttanza e discuterne le sue proprietà.
2) Discutere, con qualche esempio pratico, il teorema di Ampere.
3) Dimostrare la formula della densità di energia del campo magnetico.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.
Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{Nm})^2$ *e* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Ns}^2/\text{C}^2$.

Svolgimenti e soluzioni:

1) a. Ricordando che il campo magnetico generato da un filo è dato da

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{u}_r$$

allora nel punto C, sarà che $\overrightarrow{B}_C = \overrightarrow{0}$ (evidente se si disegnano le componenti dei diversi contributi nel punto considerato.)

b. Nel punto P, invece, è nulla solo la componente lungo l'asse x, mentre lungo l'asse y avremo

$$\overrightarrow{B}_P = \overrightarrow{B}_{1y} + \overrightarrow{B}_{2y}$$

Se α è l'angolo tra $\overrightarrow{B}_1$ e l'asse x, allora possiamo scrivere:

$$\overrightarrow{B}_P = 2\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\cos\alpha\, \hat{u}_y = \frac{\mu_0 i\, z}{\pi(a^2 + z^2)}\hat{u}_y$$

dato che, geometricamente, viene che $z = \sqrt{3}\, a$, allora il campo diventa

$$\overrightarrow{B}_P = \frac{\mu_0 i \sqrt{3}\, a}{4\pi(a^2 + 3a^2)}\hat{u}_y = \frac{\mu_0 i \sqrt{3}}{4\pi a}\hat{u}_y$$

quindi $\qquad B_P = \dfrac{\mu_0 i \sqrt{3}}{4\pi a} = 23.1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}$

c. Sapendo che la forza è data da $\overrightarrow{F} = i\vec{l} \times \overrightarrow{B}$, nel nostro caso scriviamo:

$$\frac{\overrightarrow{F}}{l} = i\hat{u}_x \times \overrightarrow{B}_P = -\frac{\mu_0 i^2 \sqrt{3}}{4\pi a}\hat{u}_z \qquad \text{lungo l'asse z, verso il basso.}$$

$$\frac{F}{l} = 2.31 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N/m}\,.$$

2) a. Dalla legge di Faraday, ricaviamo la corrente, in funzione del tempo:

$$i(t) = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{BLv(t)}{R}\,.$$

b. La forza generata sulla barretta è

$\overrightarrow{F} = i\vec{l} \times \overrightarrow{B}$, ovvero in modulo $F = iLB$.

Considerando l'equazione del moto della barretta, possiamo scrivere

$$ma = mg - iLB$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{iLB}{m}$$

Sostituiamo la corrente con quella trovata nel punto a.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{L^2B^2v}{mR}$$

Quindi, la velocità risulta essere:

$$v(t) = \frac{mgR}{B^2L^2}(1 - e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}) .$$

c. Il moto diventa uniforme quando la forza dovuta al peso della barretta uguaglia la forza magnetica che agisce su di essa:

$$\frac{L^2B^2v}{R} = mg$$

Quindi, la velocità assunta sarà

$$v = \frac{mgR}{L^2B^2} .$$

3) Affinché sia un campo magnetico nel vuoto, deve essere che $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0$ e $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = 0$.

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = B_0(-1 + 0 + \frac{\partial f}{\partial z}) = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 1$, quindi la funzione sarà: $f(x, y, z) = z + g(x, y)$

con $g(x, z)$ una funzione arbitraria di x e z.

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \hat{i}(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}) - \hat{j}(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}) + \hat{k}(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}) =$$

$$= \hat{i}(\frac{\partial f}{\partial y} + 1 - 1) - \hat{j}(\frac{\partial f}{\partial x} - 0) + \hat{k}(0 - 0) = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e quindi $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ e quindi $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$

Quindi, abbiamo trovato che $g(x, z) = c$ con c costante arbitraria.
Dato che $B(0,0,0) = 0$, allora per soddisfare questa condizione deve essere che $c = 0$.

La forma della funzione f deve essere quindi:

$$f(x, y, z) = f(z) = z$$

Il campo magnetico nel vuoto avrà l'espressione

$$\overrightarrow{B}(x, y, z) = B_0(-x\hat{i}, z\hat{j}, (z + y)\hat{k}) \ .$$