Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

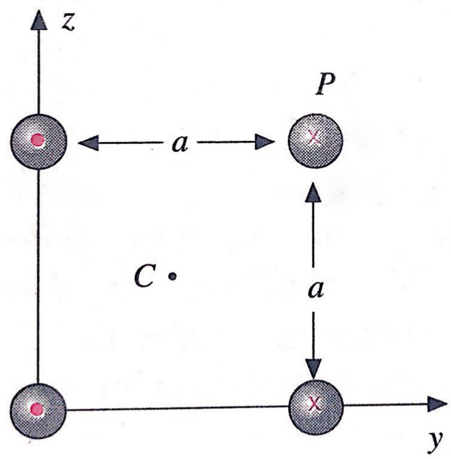
CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

07 Dicembre 2018

Secondo parziale - Compito B

Esercizi:

1) Quattro lunghi fili conduttori sono tra loro paralleli, diretti come l'asse x e nel piano x = 0 sono disposti ai vertici di un quadrato di lato $a = 20\,\text{cm}$; in ogni filo circola la corrente $i = 30\,\text{A}$, con i versi mostrati in figura. Calcolare:
   a. il campo magnetico $\vec{B}_C$ nel centro C del quadrato;
   b. il campo magnetico $\vec{B}_P$ nel vertice P(*a, a*) del quadrato;
   c. la forza $\vec{F}$ per unità di lunghezza sul filo disposto in P.



2) Un circuito di forma rettangolare, avente i lati di 40 cm e 20 cm, è immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme. La direzione di $\vec{B}$ è perpendicolare al piano del circuito e uscente dal foglio e la sua intensità cresce uniformemente nel tempo con velocità $\dfrac{d\vec{B}}{dt} = 0.5\,\dfrac{\text{T}}{\text{s}}$.
   a. Determinare la fem indotta nel circuito;
   b. determinare la corrente indotta, sapendo che la resistenza del circuito è $R = 2\,\Omega$;
   c. il campo B è generato da un solenoide ideale, con n=1000 spire/m, sufficientemente grande da ospitare al suo interno il circuito rettangolare; si calcoli il coefficiente M di mutua induzione tra solenoide e circuito.

3) Sia dato il campo $\vec{B}(x,y,z) = B_0\left((2x+z)\hat{\imath} + f(x,y,z)\hat{\jmath} + (x+2z)\hat{k}\right)$. Trovare la forma che può assumere la funzione $f(x,y,z)$ affinché il campo dato possa rappresentare un campo magnetico nel vuoto, considerando la condizione che $\vec{B}(0,0,0) = \vec{0}$.

Domande:

1) Fornire una definizione di campo magnetico e discutere le sue proprietà principali.
2) Dimostrare le leggi di composizione delle induttanze in serie e in parallelo.
3) Descrivere brevemente l'effetto Hall.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.
Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{Nm})^2$ *e* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Ns}^2/\text{C}^2$

Svolgimenti e soluzioni:

1) a. Ricordando la formula del campo magnetico generato da un filo:

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{u}_r = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\cos\theta\,\hat{u}_z \qquad \text{dove } \theta \text{ (45°) è l'angolo tra un contributo e l'asse } z$$

e disegnando graficamente i vettori dei quattro diversi contributi al campo totale nel punto C del quadrato, possiamo scrivere che il campo generato in tale punto è

$$\overrightarrow{B}_C = 4\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\cos\theta\hat{u}_z = 2\frac{\mu_0 i}{\pi a}\hat{u}_z \qquad \text{avendo considerato che } r = \frac{\sqrt{2}}{2}a\,.$$

Sostituendo, nella formula, i valori, otteniamo $B_C = 1.2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$.

b. Sempre ragionando graficamente e indicando con α l'angolo tra il contributo $\overrightarrow{B}_1$ e l'asse y, possiamo scrivere

$$\overrightarrow{B}_P = (\overrightarrow{B}_2 - \overrightarrow{B}_1\cos\alpha)\hat{u}_y + (\overrightarrow{B}_4 + \overrightarrow{B}_1\sin\alpha)\hat{u}_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi a}\hat{u}_y + \frac{3\mu_0 i}{4\pi a}\hat{u}_z =$$

$$= (1.5 \cdot 10^{-5}\hat{u}_y + 4.5 \cdot 10^{-5}\hat{u}_z)\,\mathrm{T}$$

$$B_P = 4.74 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$$

c. $\overrightarrow{F} = -i\hat{u}_x \times \overrightarrow{B}_P = -i\hat{u}_x \times (1.5 \cdot 10^{-5}\,\hat{u}_y + 4.5 \cdot 10^{-5}\,\hat{u}_z)\,\mathrm{T} =$
$= (1.35 \cdot 10^{-3}\,\hat{u}_y - 4.5 \cdot 10^{-4}\,\hat{u}_z)\,\mathrm{N/m}$

$$F = 1.42 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N/m}$$

2) a. Il flusso di $\overrightarrow{B}$ concatenato con il circuito è

$$\Phi(\overrightarrow{B}) = BS \qquad \text{dove S è l'area dl circuito}$$

Allora la fem indotta è

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -S\frac{dB}{dt}$$

Il modulo della fem sarà quindi: $\varepsilon_i = 0.04\,\mathrm{V}$.

b. La corrente è data da

$$i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{0.04\,\mathrm{V}}{2\,\Omega} = 0.02\,\mathrm{A} \ .$$

c. Il campo magnetico generato da una bobina con n spire è dato da:

$B = \mu_0\, i\, n$ dove i è la stessa corrente che circola nel circuito rettangolare, per il teorema della circuitazione.

Quindi $i = \dfrac{B}{\mu_0\, n}$, da usare nella relazione del coefficiente di mutua induzione:

$$M = \frac{\Phi(\overrightarrow{B})}{i} = \frac{B\,S}{B/\mu_0 n} =$$ dove il flusso è quello concatenato al circuito

$$= \mu_0 n S = 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{\mathrm{Ns}^2}{\mathrm{C}^2} \cdot 1000\,\frac{\mathrm{spire}}{\mathrm{m}} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2 \simeq 10^{-4}\,\mathrm{H}\ .$$

3) Affinché $\overrightarrow{B}$ sia un campo magnetico nel vuoto, deve essere che $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0$ e $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = 0$.

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = B_0(2 + \frac{\partial f}{\partial y} + 2) = 0$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -4$, quindi la funzione sarà: $f(x, y, z) = -4y + g(x, z)$

con $g(y, z)$ una funzione arbitraria di y e z.

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \hat{\imath}(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}) - \hat{\jmath}(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}) + \hat{k}(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}) =$$

$$= \hat{\imath}(0 - \frac{\partial f}{\partial z}) - \hat{\jmath}(1 - 1) + \hat{k}(\frac{\partial f}{\partial x} - 0) = 0$$

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ quindi $\dfrac{\partial g}{\partial z} = \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$, quindi $g(x, z) = c$

dove c è una costante arbitraria che è definita dalle condizioni iniziali.

Sapendo che $B(0,0,0) = 0$, $c = 0$.

La forma della funzione f deve essere quindi:

$f(x, y, z) = f(y) = -4y$.

Il campo magnetico nel vuoto avrà l'espressione

$$\overrightarrow{B}(x, y, z) = B_0((2x + z)\hat{i} - 4y\hat{j} + (x + 2z)\hat{k}) \ .$$