Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

28 Gennaio 2019

Scritto - Onde

Esercizi:

1) Tre fili metallici con la stessa lunghezza $L = 1.25\,\mathrm{m}$ sono vincolati agli estremi e tesi in modo da avere la stessa frequenza fondamentale $\nu = 50\,\mathrm{Hz}$. Le densità lineari dei fili sono le seguenti: $\mu_1 = 0.3\,\mathrm{g/m}$, $\mu_2 = 0.7\,\mathrm{g/m}$ e $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$. Calcolare:
   a) le tensioni T_1, T_2 e T_3;
   b) le energie di oscillazione E_1, E_2 e E_3, affinché l'ampiezza dell'onda sia $A = 1.5\,\mathrm{mm}$;
   c) di quanto si discosta dal valore dato la densità lineare μ_3, nel caso in cui l'impedenza Z_3 sia uguale a Z_2, lasciando costante la tensione del filo.

2) Il vettore di Poynting di un'onda elettromagnetica piana nel vuoto è dato da $\vec{\mathbf{S}}(x,t) = S_0\,\cos^2(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{x}$ ed è orientato, quindi, lungo il semiasse positivo delle ascisse in un sistema di riferimento cartesiano *(x,y,z)*. Il valore dell'ampiezza S_0 è $40\,\mathrm{W/m^2}$ e il numero d'onda *k* vale $20\,\mathrm{m^{-1}}$. Calcolare:
   a) la lunghezza d'onda λ e la frequenza ν dell'onda;
   b) l'ampiezza massima del campo elettrico $\vec{\mathbf{E}}$ e del campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$.

Domande:

1) Che cosa rappresentano velocità di fase e velocità di gruppo di un pacchetto di onde?
2) Enunciare le proprietà di un'onda elettromagnetica monocromatica.
3) Descrivere il fenomeno della risonanza spiegando in quali circostanze avviene e che cosa comporta.

Costanti: $v_{\mathrm{suono}} = 340\,\mathrm{m/s}$, $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$, $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$.

Svolgimenti e soluzioni:

1) a. Le frequenze per onde stazionarie si esprimono come segue

$$\nu_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad \text{con n = 1, 2, 3, …}$$

La frequenza fondamentale quindi è $\nu = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ con n = 1.

Quindi, la tensione sarà

$$T = 4\,\mu\,\nu^2\,L^2$$

$$T_1 = 4\,\mu_1\,\nu^2\,L^2 = 4\cdot 3\cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}\cdot(50\,\mathrm{Hz})^2\cdot(1.25\,\mathrm{m})^2 = 4.69\,\mathrm{N}$$
$$T_2 = 4\,\mu_2\,\nu^2\,L^2 = 4\cdot 7\cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}\cdot(50\,\mathrm{Hz})^2\cdot(1.25\,\mathrm{m})^2 = 10.9\,\mathrm{N}$$
$$T_3 = 4\,\mu_3\,\nu^2\,L^2 = 4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/m}\cdot(50\,\mathrm{Hz})^2\cdot(1.25\,\mathrm{m})^2 = 15.6\,\mathrm{N}$$

b. L'energia di oscillazione di un'onda si esprime come

$$E = \frac{1}{4}\mu\,L\,A^2\,\omega_n^2 \qquad \text{dove } \omega_n = 2\pi\,\nu_n\text{ , quindi } \omega = 2\pi\,\nu = 2\pi\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Allora possiamo riscrivere l'energia come

$$E = \frac{1}{4}\mu\,L\,A^2\,\frac{\pi^2}{L^2}\frac{T}{\mu} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2\,A^2}{L}T$$

$$E_1 = \frac{1}{4}\frac{\pi^2\,A^2}{L}T_1 = \frac{1}{4}\frac{\pi^2\,(1.5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{1.25\,\mathrm{m}}\,4.69\,\mathrm{N} = 2.1\cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}$$
$$E_2 = \frac{1}{4}\frac{\pi^2\,A^2}{L}T_2 = \frac{1}{4}\frac{\pi^2\,(1.5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{1.25\,\mathrm{m}}\,10.9\,\mathrm{N} = 4.8\cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}$$
$$E_3 = \frac{1}{4}\frac{\pi^2\,A^2}{L}T_3 = \frac{1}{4}\frac{\pi^2\,(1.5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{1.25\,\mathrm{m}}\,15.6\,\mathrm{N} = 6.9\cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}$$

c. Sappiamo che l'impedenza di un'onda meccanica è definita come $Z = \frac{T}{v} = \frac{T}{\sqrt{\frac{T}{\mu}}} = \sqrt{\mu\,T}$.

Quindi, affinché sia $Z_3 = Z_2$, deve essere $\bar{\mu}_3\,T_3 = \mu_2\,T_2$, ovvero

$$\bar{\mu}_3 = \mu_2\frac{T_2}{T_3} = 7\cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}\cdot\frac{10.9\,\mathrm{N}}{15.6\,\mathrm{N}} = 4.9\cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}$$

Quindi $\quad \delta\mu = \mu_3 - \bar{\mu}_3 = 5.1\cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}$.

2) a. Ricordando che $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{c}$ e che $\omega = 2\pi\, \nu$, allora troviamo facilmente che

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{20\,1/\text{m}} = 0.314\,\text{m}$$

$$\nu = \frac{c\,k}{2\pi} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s} \cdot 20\,1/\text{m}}{2\pi} = 9.55 \cdot 10^8\,\text{Hz}$$

b. Sapendo che $\vec{\mathbf{S}} = \dfrac{1}{\mu_0} \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ e che $B = \dfrac{E}{c}$,
allora le ampiezze massime (cos = 1) saranno

$$|\,\vec{\mathbf{S}}\,| = \frac{1}{\mu_0} |\,\vec{\mathbf{E}}\,| \cdot |\,\vec{\mathbf{B}}\,| = \frac{1}{c\,\mu_0} |\,\vec{\mathbf{E}}\,| \cdot |\,\vec{\mathbf{E}}\,|$$

Quindi:

$$|\,\vec{\mathbf{E}}\,| = \sqrt{c\,\mu_0\,|\,\vec{\mathbf{S}}\,|} = \sqrt{c\,\mu_0\,S_0} = \sqrt{3 \cdot 10^8\,\text{m/s} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Ns}^2}{\text{C}^2} \cdot 40\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}} = 122.8\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$|\,\vec{\mathbf{B}}\,| = \frac{|\,\vec{\mathbf{E}}\,|}{c} = \frac{122.8\,\text{V/m}}{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}} = 40.9 \cdot 10^{-8}\,\text{T}$$