Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

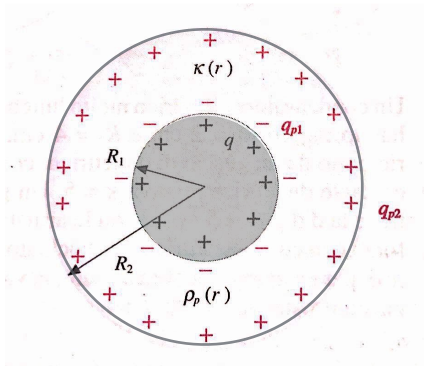
CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

10 Giugno 2019

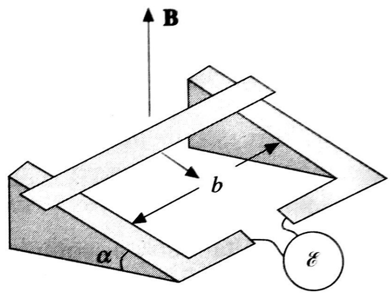
Scritto - Elettromagnetismo

Esercizi:

1) Una sfera conduttrice di raggio $R_1 = 1\,\text{cm}$ possiede una carica $q = 6 \cdot 10^{-8}\,\text{C}$ ed è circondata da un involucro sferico di dielettrico non omogeneo di raggio interno R_1 e raggio esterno $R_2 = 3\,\text{cm}$. La costante dielettrica relativa dell'involucro varia con la distanza dal centro della sfera secondo la legge $k = c/r^2$ con $c = 9 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$. Calcolare:
   a) il campo elettrostatico E(r) in tutto lo spazio;
   b) l'energia elettrostatica del sistema;
   c) la densità di carica di polarizzazione, verificando che la carica totale di polarizzazione è nulla.



2) Una sbarra orizzontale di lunghezza $b = 20\,\text{cm}$, sezione $\Sigma = 1\,\text{cm}^2$, densità $\delta = 3 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3$, resistività $\rho = 2 \cdot 10^{-5}\,\Omega\text{m}$, può scivolare senza attrito su due guide parallele, separate dalla distanza b e inclinate di un angolo $\alpha = 30°$ rispetto al piano orizzontale. Le due guide, di resistenza trascurabile, sono collegate ad un generatore di f.e.m. ε. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B = 0.3\,\text{T}$ diretto secondo la verticale. Calcolare:
   a) il valore della ε affinché la sbarra rimanga ferma;
   b) la velocità limite v_0 con cui la sbarra scende se il generatore viene sostituito da un corto circuito;
   c) la potenza dissipata nella sbarra quando essa scende con velocità v_0.



Domande:

1) Spiegare la differenza tra materiale diamagnetici e paramagnetici.
2) Spiegare la legge di continuità della carica.
3) Spiegare il principio di sovrapposizione per il potenziale elettrico.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.
Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{Nm}^2)$ *e* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Ns}^2/\text{C}^2$.

Svolgimenti e soluzioni:

1) a. Ricordando la definizione del vettore induzione dielettrica, il suo flusso attraverso una superficie sferica è dato da

$$\Phi(\overrightarrow{\mathbf{D}}) = \int \overrightarrow{\mathbf{D}} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = 4\pi r^2 D = q \qquad \text{dove q è la carica sulla superficie}$$

allora possiamo scrivere

$$D(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \qquad \text{per} \quad r \geq R_1$$

Per $R_1 \leq r \leq R_2$:
$$E(r) = \frac{D}{k} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 c}$$

Per $r \geq R_2$:
$$E(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

b. Per determinare l'energia elettrostatica, bisogna considerare separatamente i diversi contributi:

$$U_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 k E^2 \, d\tau + \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \, d\tau \qquad \text{con} \ \ d\tau = 4\pi r^2 dr$$

Il valore allora sarà

$$U_e = 3.6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J} + 5.4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J} = 9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J} \ .$$

c. Conoscendo il vettore $\overrightarrow{\mathbf{D}}$ e la costante dielettrica relativa del mezzo, il modulo del vettore polarizzazione è

$$P(r) = \frac{k-1}{k} D = \frac{c - r^2}{4\pi c r^2} q$$

Allora

$$q_{1p} = -4\pi R_1^2 P(R_1) = -\frac{c - R_1^2}{c} q = -5.33 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$$

$$q_{2p} = 4\pi R_2^2 P(R_2) = \frac{c - R_2^2}{c} q = 0$$

quindi: $q_{1p} + q_{2p} = -5.33 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$.

Essendo $q_p \neq 0$ (carica superficiale di polarizzazione), nel volume deve esserci una densità $\rho_p = -\nabla \cdot \overrightarrow{\mathbf{P}}$ che calcoliamo considerando la divergenza in coordinate polari:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{\mathbf{P}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(P_0 \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P_\phi}{\partial\phi}$$

Dato che il $\overrightarrow{\mathbf{P}}$ dipende solo da r:

$$\rho_P = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{c-r^2}{4\pi c r^2}q) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(\frac{c-r^2}{4\pi c}q) =$$

$$= -\frac{1}{r^2}(-\frac{2r}{4\pi c}q) = \frac{q}{2\pi c r}$$

Quindi la carica di polarizzazione contenuta nel volume è

$$q_P = \int_{R_1}^{R_2} \rho_P(r)\, 4\pi r^2 dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi c r}\, 4\pi r^2 dr = \frac{2q}{c}(R_2^2 - R_1^2) = +\,5.33 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}\,.$$

In totale, quindi, la carica di polarizzazione è nulla.

2) a. Bisogna, prima di tutto, eguagliare le forze che agiscono sulla sbarra:

$F_P = mg\sin\alpha$ forza peso

$F_M = \frac{\varepsilon}{R}Bb\cos\alpha$ forza magnetica

Allora avremo:

$$\frac{\varepsilon}{R}Bb\cos\alpha = mg\sin\alpha$$

$$\varepsilon = \frac{mgR}{Bb}\tan\alpha = \frac{\delta\Sigma b\, g\, \rho b/\Sigma}{Bb}\tan\alpha = \qquad \text{ricordando che } R = \frac{\rho b}{\Sigma}$$

$$= \frac{\delta g \rho b}{B}\tan\alpha = 0.226\,\mathrm{V}$$

b. La velocità limite si ha quando $F_P = F_M$:

ricordando che $\varepsilon = vBb\cos\alpha$ per la legge di Faraday e considerando l'inclinazione del piano possiamo scrivere:

$$F_M = \frac{vBb\cos\alpha}{R}Bb\cos\alpha = v_0\frac{B^2b^2\cos^2\alpha}{R} = mg\sin\alpha$$

Quindi:

$$v_0 = \frac{mgR}{B^2b^2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\delta\Sigma b\, g\, \rho b/\Sigma}{B^2b^2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\delta g \rho}{B^2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 4.36\,\mathrm{m/s}$$

c. La potenza dissipata è $P = mg\sin\alpha \cdot v_0 = \delta\Sigma bg\sin\alpha\, v_0 = 1.28\,\mathrm{W}$.