Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

10 Giugno 2019

Scritto - Onde

Esercizi:

1) Due arpe, disposte vicine nello spazio, stanno suonando la stessa nota di frequenza nominale $\nu = 510\,\mathrm{Hz}$, ciascuna con una potenza media $P_m = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W}$. Ad una distanza di $d = 8\,\mathrm{m}$ dai due strumenti, un musicista sente una frequenza di battimento di $\Delta\nu = 5\,\mathrm{Hz}$, concludendo che almeno uno dei due strumenti non emette la nota desiderata. Nell'ipotesi che l'altro strumento emetta alla frequenza nominale, determinare:
   a) i possibili valori della frequenza dell'arpa non accordata;
   b) l'intensità e il livello sonoro del suono percepito dal musicista;
   c) l'ampiezza massima di oscillazione delle onde sonore.

2) Un sistema ottico è costituito da due polarizzatori lineari ideali aventi lo stesso asse ottico orizzontale disposti ad un metro di distanza tra loro e aventi il primo un asse di polarizzazione orizzontale e l'altro verticale. Il primo polarizzatore viene investito di luce non polarizzata di intensità $I_0 = 2\,\mathrm{W/m^2}$.
   a) Determinare l'intensità a valle del primo e del secondo polarizzatore.
   b) Tra i due polarizzatori ne viene inserito un terzo con lo stesso asse ottico e con un asse di polarizzazione ruotato di un angolo α rispetto al primo. Determinare per quale angolo α si ha la massima intensità di luce dopo i tre polarizzatori.
   c) Spiegare cosa cambia se il terzo polarizzatore viene messo all'esterno dei primi due anziché al loro interno.

3) Un'onda elettromagnetica incidente viaggia inizialmente nel vuoto ($y < 0$) con un campo elettrico dato da $\vec{\mathbf{E}}(y,t) = E_0 \cos(ky - \omega t)\hat{\mathbf{i}}$. Sapendo che per $y > 0$ è presente un mezzo di impedenza $Z = Z_0/2$ (con Z_0 l'impedenza del vuoto), determinare il campo elettrico e il campo magnetico sia per l'onda trasmessa che per l'onda riflessa in funzione dei parametri noti dell'onda incidente.

Domande:

1) Discutere il fenomeno della dispersione delle onde.
2) Spiegare il fenomeno dell'interferenza delle onde.

Costanti: $v_{\text{suono}} = 340\,\mathrm{m/s}$, $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$, $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$.

Svolgimenti e soluzioni:

1) a. Sapendo che la frequenza di battimento è $\Delta\nu = \dfrac{\nu_1 - \nu_2}{2}$.

Se prendiamo $\nu_1 = \nu = 510\,\mathrm{Hz}$, possiamo definire due casi:

se $\nu_1 > \nu_2$, allora $\nu_2 = \nu_1 - 2\Delta\nu = 500\,\mathrm{Hz}$

se $\nu_1 < \nu_2$, allora $\nu_2 = \nu_1 + 2\Delta\nu = 520\,\mathrm{Hz}$

b. Essendo $\nu_1 \neq \nu_2$ e non essendoci quindi interferenza, l'intensità del suono percepito dal musicista non è altro che la somma delle intensità delle due singole onde che arrivano:

$$I_1 = I_2 = \frac{P_m}{4\pi d^2} = \frac{2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W}}{4\pi \cdot 64\,\mathrm{m}^2} = 2.5 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

allora l'intensità totale sarà:

$$I = I_1 + I_2 = 5 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Ricordando che la soglia di udibilità è $I_0 = 10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$, il livello sonoro sarà:

$$B = 10\log_{10}\frac{I}{I_0} = 10\log_{10}\frac{5 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}{10^{-12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}} = 10\log_{10}(5 \cdot 10^{6}) = 67.0\,\mathrm{dB}$$

c. Ricordando che l'intensità di un'onda sonora è data da $I = \dfrac{1}{2}\rho_0\omega^2 A^2 v$, dove ρ_0 è la densità del mezzo (in questo caso l'aria), la pulsazione $\omega = 2\pi\nu$ e v è la velocità del suono, possiamo ricavare l'ampiezza per entrambe le onde:

$$A_1 = \frac{1}{\omega_1}\sqrt{\frac{2I}{\rho_0 v}} = \frac{1}{2\pi\,510\,1/\mathrm{s}}\sqrt{\frac{2 \cdot 2.5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}}{1.29\,\mathrm{kg/m^3}\,340\,\mathrm{m/s}}} = \frac{1.07 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m/s}}{2\pi\,510\,1/\mathrm{s}} = 3.3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}$$

$$A_2 = \frac{1}{\omega_2}\sqrt{\frac{2I}{\rho_0 v}} = \frac{1}{2\pi\,500\,1/\mathrm{s}}\sqrt{\frac{2 \cdot 2.5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}}{1.29\,\mathrm{kg/m^3}\,340\,\mathrm{m/s}}} = \frac{1.07 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m/s}}{2\pi\,500\,1/\mathrm{s}} = 3.3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}$$

Per la seconda onda è stata scelta arbitrariamente la frequenza di 500 Hz e si nota che, come ci si poteva aspettare, le due ampiezze sono praticamente identiche, essendo la frequenza di battimento molto piccola.
L'ampiezza massima dell'onda risultante sarà quindi:

$$A = A_1 + A_2 = 6.6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}\,.$$

2) a. Dato che l'onda incidente è una luce non polarizzata, avremo

$$E^2 = E_\perp^2 + E_{||}^2 \quad \text{e} \quad E_\perp^2 = E_{||}^2 \quad \text{(si intendono i valori mediati nel tempo).}$$

Quindi, dopo il primo polarizzatore (orizzontale), l'intensità risulta dimezzata:

$$I_1 = \frac{I_0}{2} = 1 \, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Dopo il secondo polarizzatore, l'intensità è nulla perché la nuova onda polarizzata ha solo una componente orizzontale.

b. Ricordando la legge di Malus possiamo ragionare sul terzo polarizzatore in questo modo: dopo il primo polarizzatore l'intensità è

$$I_1 = I_0 \cos^2 \alpha = I_0$$

dopo il secondo polarizzatore (quello appena aggiunto e ruotato di un angolo α rispetto al primo)

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha = I_0 \cos^2 \alpha$$

Dopo il terzo e ultimo polarizzatore, ruotato quindi di un angolo $90° - \alpha$ rispetto al secondo, l'intensità dell'onda sarà

$$I_3 = I_2 \cos^2(90° - \alpha) = I_0 \cos^2 \alpha \cos^2(90° - \alpha) = I_0 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \frac{I_0}{4} \sin^2 2\alpha$$

Affinché l'intensità sia massima, l'angolo dovrà essere di 45°.

3) Nel caso di onde riflesse e trasmesse, ricordiamo la definizione dei coefficienti di riflessione (r) e trasmissione (t):

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{e} \quad t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Ponendo $Z_1 = Z_0$ per y<0 e $Z_2 = Z = Z_0/2$ per y>0, possiamo scrivere che:

$$r = \frac{Z_0 - Z_0/2}{Z_0 + Z_0/2} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad t = \frac{2\,Z_0}{Z_0 + Z_0/2} = \frac{4}{3} \quad .$$

Quindi per l'onda riflessa avremo:

$$\vec{\mathbf{E}}_r = E_{0r} \cos(ky + \omega t)\hat{\mathbf{i}} = rE_0 \cos(ky + \omega t)\hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{3} E_0 \cos(ky + \omega t)\hat{\mathbf{i}}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_r = -\frac{E_{0r}}{c} \cos(ky + \omega t)\hat{\mathbf{k}} = -\frac{rE_0}{c} \cos(ky + \omega t)\hat{\mathbf{k}} = -\frac{E_0}{3c} \cos(ky + \omega t)\hat{\mathbf{k}}$$

Per l'onda trasmessa avremo:

$$\vec{\mathbf{E}}_t = E_{0t}\cos(ky - \omega t)\hat{\mathbf{i}} = tE_0\cos(ky - \omega t)\hat{\mathbf{i}} = \frac{4}{3}E_0\cos(ky - \omega t)\hat{\mathbf{i}}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_t = -\frac{E_{0t}}{c}\cos(ky - \omega t)\hat{\mathbf{k}} = -\frac{tE_0}{c}\cos(ky - \omega t)\hat{\mathbf{k}} = -\frac{4}{3c}E_0\cos(ky - \omega t)\hat{\mathbf{k}}$$