Fisica Generale T2 - Prof. M. Villa

CdLT in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

8 Luglio 2019

Onde

Esercizi:

1) Una semicorda è disposta a riposo lungo la regione positiva di un asse x di un sistema di riferimento. L'inizio della corda è vincolata a rimanere lungo l'asse y ($x = 0$) ed inizialmente è nell'origine. Sapendo che l'inizio della corda è mosso in modo tale da seguire la funzione $y = At(t_1 - t)$ nell'intervallo $t \in [0, t_1]$, con $A = 3\,\mathrm{cm/s^2}$ e $t_1 = 0,3\,\mathrm{s}$, che i parametri della corda sono $T = 30\,\mathrm{N}$ e $Z = 0,8\,\mathrm{kg/s}$, determinare:
1) la massa lineare della corda e la velocità delle onde sulla corda;
2) la lunghezza dell'impulso generato;
3) l'espressione della potenza che viaggia nella corda e il suo valore massimo;
4) l'energia immagazzinata nell'impulso;

2) Una bolla di sapone è costituita da un sottile strato di acqua saponata, avente spessore d incognito e indice di rifrazione $n = 1,35$. Si osserva che quando si fa incidere sulla superficie di una bolla di sapone, con incidenza normale, un raggio laser di lunghezza d'onda $\lambda_1 = 630\,\mathrm{nm}$ ed intensità I_0, si osserva un raggio riflesso di intensità minima I_r. Nelle approssimazioni che lo studente intenderà introdurre, si determini:
a) lo spessore incognito minimo d;
b) il rapporto I_r/I_0, tenuto conto di tutti i contributi al raggio riflesso.
(per l'indice di rifrazione dell'aria si assuma $n_a = 1$)

Domande:

1) Spiegare la differenza tra velocità di fase e velocità di gruppo e fornirne qualche esempio.
2) Spiegare il fenomeno dei battimenti.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.
Nel caso servano, si usino i valori $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(Nm^2)}$ *e* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1 - semicorda

a) Le relazioni fondamentali tra i parametri della corda sono: $v = \sqrt{T/\mu}$, $Z = \sqrt{T\mu}$ da cui $T = Zv$. Si può quindi trovare:

$$v = \frac{T}{Z} = 37,5\,\mathrm{m/s}\,.$$

$$\mu = \frac{T}{v^2} = \frac{Z^2}{T} = 21,3\,\mathrm{kg/m}\,.$$

b) L'impulso ha una durata pari a t_1, sia nell'origine che in qualunque punto dell'asse x positivo. La lunghezza effettiva dipende dalla velocità dell'onda e vale:

$$L = vt_1 = 11,25\,\mathrm{m}\,.$$

c) In ogni punto dell'asse x si lo stesso comportamento di quello che avviene in $x = 0$, ovviamente ritardato del tempo di propagazione $t_p = x/v$. Possiamo quindi limitarci ad analizzare la potenza nell'origine. Sapendo che si lavora su una semicorda e quindi si hanno solo onde progressive per le quali vale $\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{\partial\psi}{\partial t}$, per la potenza si ha:

$$P(t, x = 0) = -T\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{T}{v}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = \frac{T}{v}A^2(t_1 - 2t)^2\,,$$

da valutare nell'intervallo tra 0 e t_1. Sviluppando la funzione ottenuta, si osserva che $P(t)$ è una parabola con la concavità in alto e vertice (unico punto estremale) in $t = t_1/2$ e $P(t_1/2) = 0$, che corrisponde ad un minimo della potenza. Il valore massimo si trova agli estremi dell'intervallo ed è lo stesso valore per entrambi:

$$P_{\max} = P(t = 0, x = 0) = P(t = t_1, x = 0) = \frac{T}{v}A^2t_1^2 = 64,8\,\mu\mathrm{W}\,.$$

d) L'energia nell'impulso è pari all'integrale della potenza lì dove c'è l'impulso:

$$E = \int_0^{t_1}\frac{T}{v}A^2(t_1 - 2t)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\frac{T}{v}A^2t_1^3 = 6,48\,\mu\mathrm{J}$$

Soluzione esercizio 2 - bolla di sapone

a) Consideriamo che l'onda incidente sia una onda armonica di ampiezza A_i. All'interfaccia aria-acqua l'onda si suddivide in onda trasmessa (di ampiezza A_t) e onda riflessa (di ampiezza A_{r1}). L'onda trasmessa viaggia nello spessore di acqua d fino ad arrivare all'interfaccia acqua-aria dove vi è una ulteriore trasmissione in aria (che non ci interessa qui) e una riflessione, di ampiezza A_{r2}. Quest'onda torna sulla prima interfaccia dove può essere trasmessa in aria, con ampiezza A_{t2}. La prima onda riflessa (di ampiezza A_{r1}) e la seconda onda trasmessa (di ampiezza A_{t2}) sono entrambe onde regressive, con identica pulsazione, che viaggiano nella stessa direzione e che possono subire il fenomeno dell'interferenza. Per avere un raggio riflesso di intensità minima occorrerà quindi che la differenza di fase tra queste due onde sia pari ad un multiplo dispari di π. La prima onda subisce nella riflessione uno sfasamento di π, in quanto $n > n_a$. La seconda onda ha uno sfasamento dovuto allo spazio percorso nello spessore della bolla. Non vi è uno sfasamento né nella riflessione ($n_a < n$), né nelle due trasmissioni. Si ha quindi:

$$\Delta\phi = \Delta\phi_2 - \Delta\phi_1 = 2k'd - \pi = 2frac2\pi n\lambda_1 d - \pi = (4nd/lambda_1 - 1)\pi$$

da cui si trova:

$$d = \frac{\lambda_1}{2n} = 233\,\mathrm{nm}\,.$$

b) Le due onde regressive hanno ampiezze diverse e quindi l'onda anche in condizioni di minimo di interferenza avrà una intensità non nulla. Indicato con $Z_1 = Z_0$ l'impedenza dell'aria e con $Z_2 = Z_0/n$ quella dell'acqua saponata, per le intensità delle due onde che interferiscono, si ha:

$$I_{r1} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 I_0 = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 I_0 \,.$$

Per l'altra onda, sapendo che si ha una prima trasmissione, una riflessione e una seconda trasmissione, l'intensità sarà data da:

$$I_{t2} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}\left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2} I_0 = \frac{16Z_1^2Z_2^2}{(Z_1+Z_2)^4}\left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 I_0 = \frac{16n^2(n-1)^2}{(n+1)^6} I_0 \,.$$

In condizioni di minimo di interferenza l'intesità risultante è la differenza tra le due intensità. Si ha quindi:

$$I_r/I_i = (I_{r1} - I_{t2})/I_0 = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \left(1 - \frac{16n^2}{(n+1)^2}\right) = 9,73 \times 10^{-4} \,.$$