

Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

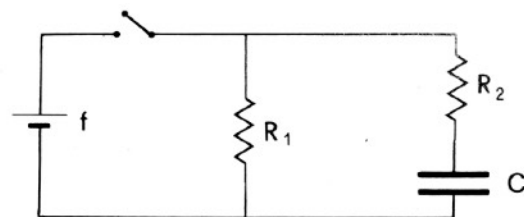
31 Ottobre 2017

Primo parziale - Compito A

Esercizi:

- 1) Una carica positiva è distribuita, con densità volumetrica ρ uniforme, nella regione di spazio limitata dai piani $x = -d$ e $x = d$. Si calcoli, assumendo che il potenziale sia nullo sul piano $x = 0$:
 - 1) il campo elettrostatico, per $-d < x < d$ e per $x < -d$ e $x > d$;
 - 2) il potenziale elettrostatico, per $-d < x < d$ e per $x < -d$ e $x > d$.
 - 3) Si determini, inoltre, la forza che agisce su una carica q posta a $x = 3d$ dalla regione.

- 2) Al tempo $t = 0$ viene chiuso l'interruttore del circuito mostrato in figura. Nell'ipotesi che si possa trascurare la resistenza interna del generatore, che il condensatore sia inizialmente scarico e che $f = 50$ V, $R_1 = 5$ Ω , $R_2 = 10$ Ω e $C = 5$ F, ricavare:



- 1) la differenza di potenziale $V(t)$ ai capi di C , al tempo $t = 10$ s;
 - 2) le correnti che circolano nelle resistenze R_1 e R_2 , al tempo $t = 10$ s;
 - 3) l'energia totale immagazzinata da C alla fine del processo.
- 3) Sia dato il campo $\vec{E} = \hat{i}Ax^2 + \hat{j}By^2$, dove A e B sono due costanti.
 - 1) Dimostrare che il campo è elettrostatico.
 - 2) Determinare la densità volumetrica ρ di carica prodotta dal campo.

Domande:

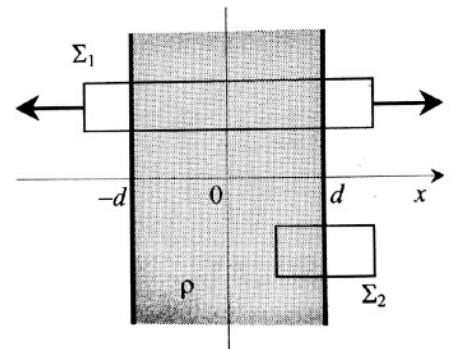
- 1) Discutere le proprietà dei conduttori.
- 2) Spiegare la legge di continuità della carica.
- 3) Descrivere il processo di scarica di un condensatore in un circuito RC.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.

Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C²/(Nm)² e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Ns²/C².

Svolgimenti e soluzioni:

- 1) 1. Introduciamo un asse x perpendicolare allo strato carico, con origine nel centro dello strato, come mostrato in figura. Per calcolare il campo elettrico è opportuno applicare il teorema di Gauss. Data la simmetria della configurazione il campo elettrico è parallelo all'asse x , ha lo stesso modulo ma verso opposto sulle coppie di piani perpendicolari all'asse x , posti in posizioni simmetriche rispetto al piano $x = 0$.



Prima di tutto, calcoliamo il campo esterno. Consideriamo una superficie cilindrica con basi di area A poste in posizioni simmetriche rispetto allo strato (superficie Σ_1 mostrata in figura). Si ottiene:

$$\Phi(\vec{E}) = 2EA = \frac{\rho}{\epsilon_0} A 2d.$$

Il campo elettrico esterno allo strato (quindi per $-d < x < d$) è uniforme ed è dato da:

$$\vec{E} = -\frac{\rho d}{\epsilon_0} \hat{u}_x \quad \text{per } x < -d$$
$$\vec{E} = \frac{\rho d}{\epsilon_0} \hat{u}_x \quad \text{per } x > d$$

Per calcolare il campo elettrico all'interno dello strato, consideriamo una superficie cilindrica Σ_2 posta a cavallo del piano $x = d$:

$$\Phi_{\Sigma_2}(\vec{E}) = -E(x)A + \frac{\rho d}{\epsilon_0} A = \frac{\rho A(d-x)}{\epsilon_0}$$

da cui si ottiene:

$$\vec{E} = \frac{\rho x}{\epsilon_0} \hat{u}_x.$$

2. Ricordando che $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$, nel nostro caso abbiamo $dV = -E dx$, e assumendo che il potenziale sia nullo per $x = 0$, si ottiene:

$$\int_0^{V(x)} dV = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^x x dx$$

Quindi:
$$V(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0}x^2.$$

Osservando che il potenziale è continuo in $x = -d$:

Per $x > d$:
$$\int_{V(d)}^{V(x)} dV = -\frac{\rho d}{\epsilon_0} \int_d^x dx$$

Quindi:
$$V(x) = V(d) - \frac{\rho d}{\epsilon_0}(x - d) = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0}(2x - d)$$

Per $x < -d$:
$$V(x) = V(-d) + \frac{\rho d}{\epsilon_0}(x + d) = -\frac{\rho d^2}{2\epsilon_0} + \frac{\rho d}{\epsilon_0}(x + d) = \frac{\rho d}{2\epsilon_0}(2x + d)$$

3. Per determinare la forza che agisce sulla carica q posta a $x = 3d$, bisogna considerare il campo elettrico per $x > d$. Notando che questo è costante, quindi non dipende da x , la forza che agisce sulla carica q è sempre la stessa a prescindere dalla posizione occupata sull'asse x .

$$\vec{F} = q\vec{E} = q\frac{\rho d}{\epsilon_0}\hat{u}_x.$$

- 2) 1. Fissato il verso orario come positivo per le correnti di maglia, si hanno le seguenti equazioni di maglia:

$$\begin{aligned} f &= (I_1 - I_2)R_1 \\ -V(t) &= I_2R_2 + (I_2 - I_1)R_1 \end{aligned}$$

Tenendo conto che $I_2 = dq_2/dt$, con $q_2(t)$ pari alla carica presente su C al tempo t , e che, dalla prima equazione della maglia,

$$I_1 = \frac{f}{R_1} + I_2 \quad (1)$$

sostituendo nella seconda equazione, si ha:

$$-V(t) = \frac{dq_2}{dt}R_2 + \left(I_2 - \frac{f}{R_1} + I_2\right)R_1 = \frac{dq_2}{dt}R_2 - f = C\frac{dV}{dt}R_2 - f,$$

da cui:

$$\frac{dV}{f - V(t)} = \frac{dt}{R_2C} = \frac{dt}{\tau}, \quad \text{con } \tau = R_2C.$$

Integrando si ha:

$$f - V(t) = A e^{-t/\tau} \quad \text{con } A \text{ costante arbitraria che, per la condizione iniziale } V(0) = 0, \text{ ha valore } A = f.$$

Dunque:

$$V(t) = f(1 - e^{-t/\tau}) \quad (2)$$

$$\text{Per } t = 10 \text{ s, si ha: } V = 50V \cdot (1 - e^{-\frac{10 \text{ s}}{10\Omega \cdot 5F}}) = 9.1 \text{ V} .$$

2. La corrente che passa in R_1 , ricordando la (1), è:

$$I_1 - I_2 = \frac{f}{R_1} = \frac{50V}{5\Omega} = 10 \text{ A} \quad \text{e non dipende dal tempo.}$$

Dalla (2) si ricava:

$$I_2 = C \frac{dv}{dt} = \frac{fC}{R_2 C} e^{-t/\tau} = \frac{f}{R_2} e^{-t/\tau} \quad \text{che è la corrente che passa in } R_2$$

Calcoliamola per $t = 10 \text{ s}$:

$$I_2 = \frac{f}{R_2} e^{-t/\tau} = \frac{50V}{10\Omega} e^{-\frac{10 \text{ s}}{10\Omega \cdot 5F}} = 4.1 \text{ A}$$

3. Alla fine del processo, quindi $t \rightarrow \infty$, la tensione ai capi del condensatore è

$$V(t) = f(1 - e^{-t/\tau}) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} f$$

Quindi: $V = 50V$

L'energia totale immagazzinata dal condensatore è:

$$U_C = \frac{1}{2} C f^2 = \frac{1}{2} \cdot 5F \cdot (50V)^2 = 6.25 \text{ kJ}$$

3) 1. Per dimostrare che il campo è elettrostatico devo dimostrare che $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

$$\vec{E} = (Ax^2, By^2, 0) , \text{ quindi:}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \hat{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = \\ &= \hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}By^2\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial z}Ax^2\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}By^2 - \frac{\partial}{\partial y}Ax^2\right) = 0\end{aligned}$$

2. Sapendo che $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, allora :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}Ax^2 + \frac{\partial}{\partial y}By^2 = 2Ax + 2By$$

$$\text{Allora: } \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 2\epsilon_0(Ax + By)$$

Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

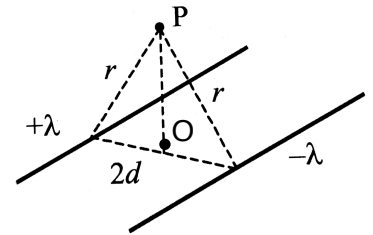
CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

31 Ottobre 2017

Primo parziale - Compito B

Esercizi:

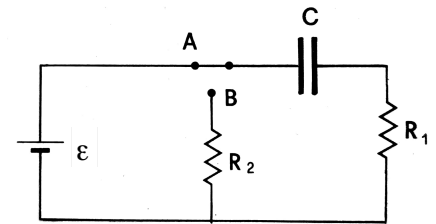
- 1) Si considerino due fili rettilinei paralleli di lunghezza infinita, uniformemente carichi con densità lineare di carica $+\lambda$ e $-\lambda$, posti a distanza $2d$ l'uno dall'altro, come mostrato in figura. Si determini:
 - 1) il campo elettrico e il potenziale (considerando $V(0) = 0$) generati nel punto P posto sul piano perpendicolare ai fili, alla stessa distanza r dai due fili.
 - 2) la forza che agisce su una carica q posta in P e nel punto O.



- 2) Nel circuito mostrato in figura, tenendo il contatto in posizione A, il condensatore C viene caricato al suo massimo valore. Al tempo $t = 0$ s il contatto viene spostato in posizione B e così lasciato fino alla scarica completa di C.

Si ha $C = 4 \text{ mF}$, $\varepsilon = 40 \text{ V}$, $R_1 = 2R_2 = 6 \text{ k}\Omega$. Calcolare:

- 1) l'energia immagazzinata in C, in $t = 0$;
- 2) la corrente che passa attraverso R_1 e R_2 , per $t = 8 \text{ s}$;
- 3) l'energia dissipata in R_1 durante il processo di scarica.



- 3) Sia dato il campo $\vec{E} = A[\hat{i}xy + \hat{j}(\frac{x^2}{2} + y^2)]$, dove A è una costante.
 - 1) Dimostrare che il campo è elettrostatico.
 - 2) Determinare la densità volumetrica ρ di carica che produce il campo elettrostatico.

Domande:

- 1) Dimostrare che la capacità di un condensatore non dipende dalla carica sulle armature.
- 2) Spiegare le leggi di Kirchhoff.
- 3) Discutere la legge di Gauss con alcuni esempi pratici.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni. Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N s}^2/\text{C}^2$.

Svolgimenti e soluzioni:

- 1) 1. Il problema si risolve applicando il principio di sovrapposizione. Il campo elettrico \vec{E} in P è dato dalla somma vettoriale dei campi \vec{E}_1 e \vec{E}_2 generati, separatamente dai due fili carichi.

Il campo elettrico generato da un filo rettilineo indefinito uniformemente carico si calcola utilizzando il teorema di Gauss. Data la simmetria del problema, il campo elettrostatico è dotato di simmetria cilindrica: è radiale ed ha lo stesso modulo in tutti i punti di superfici cilindriche coassiali col filo.

Utilizzando come superficie di Gauss una superficie cilindrica di raggio arbitrario r , di altezza arbitraria h , coassiale al filo, applicando il th di Gauss si ottiene:

$$\Phi(E) = 2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

Si ha quindi:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{u}_r \quad \text{avendo indicato con } \hat{u}_r \text{ il versore radiale uscente dal filo.}$$

Nel caso in esame il campo elettrostatico totale in P è dato da

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

dove:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Con riferimento alla figura si ha:

$$\vec{E} = 2|\vec{E}_1| \cos\theta \hat{u}_x$$

avendo introdotto un asse x perpendicolare ad entrambi i fili e l'angolo θ tale che

$$\cos\theta = d/r.$$

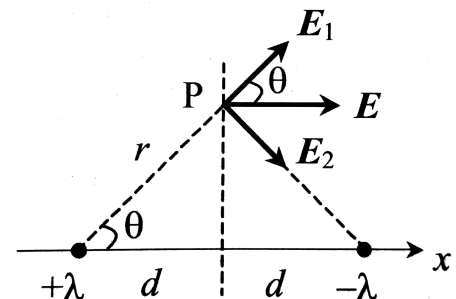
Si ha, quindi: $\vec{E} = \frac{\lambda d}{\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_x.$

Per calcolare il potenziale elettrostatico, ricordiamo che $V(r) = \int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{r}.$

Allora:

$$V_1(P) = \int_0^r \vec{E}_1(P) \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^r \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r - V(0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r$$

$$V_2(P) = \int_0^r \vec{E}_2(P) \cdot d\vec{r} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^r \frac{1}{r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r - V(0) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r$$



$$V(P) = V_1(P) + V_2(P) = 0$$

[Lo stesso risultato può essere ottenuto considerando il campo elettrico totale e la relazione $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$.]

2. La forza che agisce sulla carica q nel caso in cui sia posta in P:

$$\vec{F} = q\vec{E} = q \frac{\lambda d}{\pi \epsilon_0 r^2} \hat{u}_x$$

Mentre, nel caso in cui la carica q sia posta in O, il campo elettrico che agisce è diverso, in quanto in O i campi sono entrambi diretti lungo l'asse x e hanno lo stesso verso (verso $-\lambda$):

$$\vec{E} = 2|E_1|\hat{u}_x = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0 r} \hat{u}_x ;$$

quindi la forza sarà:

$$\vec{F} = q\vec{E} = q \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0 r} \hat{u}_x .$$

2) 1. Alla fine della carica, il condensatore, a tensione f , ha immagazzinato un'energia elettrostatica pari a:

$$U_C = \frac{1}{2} C f^2 = \frac{1}{2} 4 \text{ mF} \cdot (40V)^2 = 3.2 \text{ J}$$

2. Per $t > 0$, inizia il processo di scarica del condensatore, che avviene sulla serie delle resistenze R_1 e R_2 e quindi con la corrente che passa attraverso entrambe le resistenze pari a:

$$i(t) = \frac{f}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau} \quad \text{con} \quad \tau = (R_1 + R_2)C .$$

Quindi la corrente che passa attraverso R_1 e R_2 , al tempo $t = 8 \text{ s}$, sarà:

$$I = \frac{40V}{6k\Omega + 3k\Omega} e^{-\frac{8s}{(6k\Omega + 3k\Omega)4mF}} = \frac{40V}{9k\Omega} e^{-0.2} = 3.6 \text{ mA}$$

3. La potenza dissipata per effetto Joule nelle due resistenze ha l'espressione:

$$P_1 = i^2 R_1 \quad \text{e} \quad P_2 = i^2 R_2$$

in cui appare la diretta proporzionalità alle resistenze R_1 e R_2 , rispettivamente. Tale proporzionalità si estende, ovviamente, anche all'energia dissipata e quindi, essendo U l'energia totale disponibile, la frazione che si dissipa su R_1 sarà:

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} U_C = \frac{6k\Omega}{6k\Omega+3k\Omega} \cdot 3.2J = 2.1 J$$

Si può anche ricavare integrando l'espressione della potenza $P_1(t)$:

$$U_1 = \int_0^\infty P_1(t) dt = \int_0^\infty i^2(t) R_1 dt = R_1 \frac{f^2}{(R_1+R_2)^2} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt .$$

3) 1. Per dimostrare che il campo è elettrostatico devo dimostrare che $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

$\vec{E} = (Axy, A(\frac{x^2}{2} + y^2), 0)$, quindi:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \hat{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \\ &= \hat{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} A \left(\frac{x^2}{2} + y^2 \right) \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} 0 - \frac{\partial}{\partial z} Axy \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} A \left(\frac{x^2}{2} + y^2 \right) - \frac{\partial}{\partial y} Axy \right) = \\ &= \hat{k} \left(2A \frac{x}{2} - Ax \right) = 0 \end{aligned}$$

2. Sapendo che $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, allora :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} Axy + \frac{\partial}{\partial y} A \left(\frac{x^2}{2} + y^2 \right) = Ay + 2Ay = 3Ay$$

$$\text{Allora: } \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 3Ay$$

Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

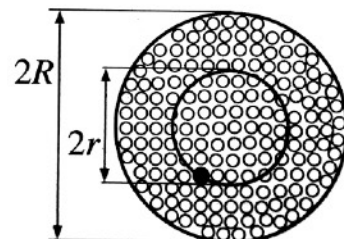
27 Novembre 2017

Secondo parziale - Compito A

Esercizi:

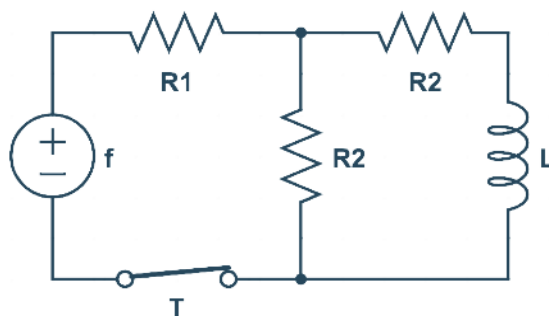
1) Si consideri un insieme di 100 fili rettilinei indefiniti che formano un cavo cilindrico di raggio $R = 0.5$ cm. Ciascun filo è attraversato da una corrente $i = 2$ A. Calcolare:

- 1) il campo magnetico B alla distanza $r = R/2$ dal centro dell'insieme;
- 2) la forza per unità di lunghezza che agisce su uno dei fili alla stessa distanza r .



2) Il circuito mostrato in figura è inizialmente chiuso tramite il contatto T ed è costituito dalle resistenze $R_1 = 2 \Omega$ e $R_2 = 5 \Omega$ e da un'induttanza $L = 10$ mH. L'energia magnetica immagazzinata nel solenoide è $U_m = 1.25 \cdot 10^{-3}$ J. Calcolare:

- 1) la corrente che scorre nell'induttanza;
- 2) la forza elettromotrice del generatore;
- 3) la corrente nelle tre resistenze al tempo $t_1 = 0.1$ ms, considerando che al tempo $t = 0$ il contatto T viene aperto.



3) Sia dato il campo $\vec{B}(x, y, z) = \alpha(x\hat{i} + f(x, y, z)\hat{j} + z\hat{k})$, con α costante. Trovare la forma che può assumere la funzione $f(x, y, z)$ affinché il campo dato possa rappresentare un campo magnetico nel vuoto, considerando la condizione che $B(0,0,0) = 0$.

Domande:

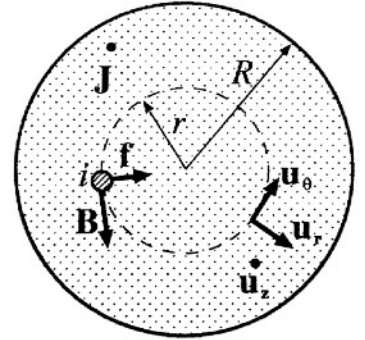
- 1) Definire e discutere le caratteristiche principali della corrente di spostamento.
- 2) Definire l'induttanza e discuterne le sue proprietà.
- 3) Discutere la legge di Ampere - Maxwell, illustrandola con qualche esempio.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.

Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C²/(Nm)² e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Ns²/C².

Svolgimenti e soluzioni:

- 1) 1. Dato l'elevato numero di fili che compongono il cavo, possiamo assumere, ai fini del calcolo del campo magnetico, che il cavo sia un conduttore cilindrico massiccio in cui la densità di corrente \vec{J} sia distribuita uniformemente. Poniamo, come mostrato in figura, che la corrente fluisca in direzione perpendicolare al piano del foglio, verso uscente. La densità di corrente efficace nel cavo sarà data da



$$J = \frac{100 i}{\pi R^2}, \quad \text{dove } J = |\vec{J}| \text{ e } R \text{ è il raggio del cavo.}$$

Ricordando che il campo magnetico generato da un filo conduttore infinito percorso da corrente I è

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\theta \quad \text{con } \hat{u}_\theta \text{ versore tangente alle linee di flusso circolare di } \vec{B} \text{ centrate sull'asse del cavo e diretto in verso antiorario,}$$

allora possiamo scrivere il campo del nostro caso:

$$\begin{aligned} \vec{B}(r) &= \frac{\mu_0 \pi r^2 J}{2\pi r} \hat{u}_\theta = \frac{\mu_0 100 i r}{2\pi R^2} \hat{u}_\theta \quad \text{per } r < R \\ \vec{B}(r) &= \frac{\mu_0 \pi R^2 J}{2\pi r} \hat{u}_\theta = \frac{\mu_0 100 i}{2\pi r} \hat{u}_\theta \quad \text{per } r \geq R \end{aligned}$$

essendo r la distanza dall'asse del cavo a cui valutiamo il campo.

Il campo magnetico alla distanza $r = R/2$ dall'asse sarà dunque pari a

$$\vec{B}(R/2) = \frac{25\mu_0 i}{\pi R} \hat{u}_\theta$$

Il modulo è

$$B(R/2) = \frac{25\mu_0 i}{\pi R} = \frac{25 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Ns^2}{C^2} \cdot 2 A}{\pi 5 \cdot 10^{-3} m} = 4 \cdot 10^{-3} T .$$

2. La forza per unità di lunghezza agente sul filo a distanza $r = R/2$ dall'asse, quindi, è pari a

$$\frac{\vec{F}}{L} = i \hat{u}_z \times \vec{B}(R/2) = \frac{25\mu_0 i^2}{\pi R} \hat{u}_z \times \hat{u}_\theta$$

dove \hat{u}_z è il versore perpendicolare al piano del foglio, diretto come la corrente.

Si noti che $\hat{u}_z \times \hat{u}_\theta = -\hat{u}_r$ dove \hat{u}_r è il versore giacente nel piano del foglio e diretto radialmente rispetto all'asse del cavo con verso uscente da questo. Quindi:

$$\frac{\vec{F}}{L} = -\frac{25\mu_0 i^2}{\pi R} \hat{u}_r .$$

Il modulo, per unità di lunghezza, è

$$\frac{|\vec{F}|}{L} = \frac{25 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Ns^2}{C^2} \cdot 4A^2}{\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3}m} = 8 \cdot 10^{-3} N/m .$$

2) 1. Conoscendo l'energia magnetica del solenoide:

$$U_m = \frac{1}{2} L i_L^2$$

possiamo ricavare la corrente che circola in esso

$$i_L = \sqrt{\frac{2U_m}{L}} = 0.5 A .$$

2. A regime, l'induttanza si comporta come un filo con R trascurabile, quindi, con questa considerazione, utilizzando la legge dei nodi, possiamo scrivere:

$$i_1 = i_2 + i_2$$

dove $i_2 = i_L = 0.5 A$ (per la considerazione sull'induttanza fatta poco fa)

quindi $i_1 = 2i_2 = 2i_L = 1 A$.

Prendendo in considerazione la maglia a sinistra del circuito:

$$f = R_1 i_1 + R_2 i_2 = 2 \Omega \cdot 1 A + 5 \Omega \cdot 0.5 A = 4.5 V .$$

3. Quando l'interruttore viene aperto, l'induttanza si scarica con una corrente che decresce esponenzialmente con costante di tempo:

$$\tau = \frac{L}{2R_2} = 1 \text{ ms}$$

dato che le due resistenze R_2 sono in serie nella maglia di destra (l'unica in cui circola corrente, dopo l'apertura del circuito).

L'andamento della corrente sarà quindi

$$i(t_1) = i_L e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0.5 \text{ A } e^{-\frac{0.1 \text{ ms}}{1 \text{ ms}}} = 0.45 \text{ A} .$$

- 3) Affinché \vec{B} sia un campo magnetico nel vuoto, deve essere che $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \alpha \left(1 + \frac{\partial f}{\partial y} + 1 \right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2 \quad , \quad \text{quindi la funzione sarà: } f(x, y, z) = -2y + g(x, z)$$

con $g(x, z)$ una funzione arbitraria di x e z .

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \hat{i} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \\ &= \hat{i} \left(-\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \hat{j}(0) + \hat{k} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{e quindi} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

Quindi, abbiamo trovato che $g(x, z) = c$ con c costante arbitraria.

Dato che $B(0,0,0) = 0$, allora per soddisfare questa condizione deve essere che $c = 0$.

La forma della funzione f deve essere quindi:

$$f(x, y, z) = f(y) = -2y$$

Il campo magnetico nel vuoto avrà l'espressione

$$\vec{B}(x, y, z) = \alpha(x\hat{i} - 2y\hat{j} + z\hat{k}) .$$

Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

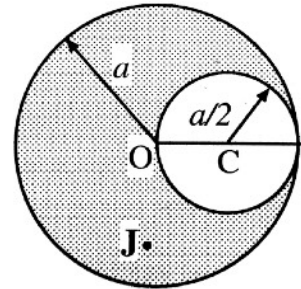
CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

27 Novembre 2017

Secondo parziale - Compito B

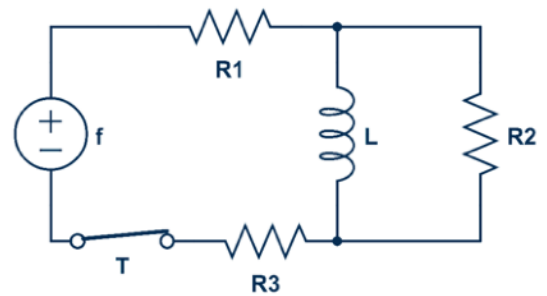
Esercizi:

- 1) Un conduttore cilindrico indefinito di raggio $a = 4 \text{ mm}$ è percorso da una corrente $I = 2 \text{ A}$ distribuita uniformemente sulla sua sezione. Successivamente viene praticata nel conduttore una cavità cilindrica di raggio $a/2$ per tutta la sua lunghezza, mantenendo la stessa densità di corrente iniziale; il centro C della cavità dista $a/2$ dal centro O del conduttore. Calcolare:



- 1) il campo magnetico B generato in O ;
- 2) il campo magnetico B generato in C .

- 2) Il circuito mostrato in figura è inizialmente chiuso tramite il contatto T ed è costituito dalle resistenze $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$ e $R_3 = 6 \Omega$ e da un'induttanza $L = 5 \text{ mH}$. L'energia magnetica immagazzinata nel solenoide è $U_m = 2 \cdot 10^{-3} \text{ J}$. Calcolare:



- 1) la corrente che scorre nell'induttanza;
- 2) la forza elettromotrice del generatore;
- 3) la corrente nelle tre resistenze al tempo $t_1 = 0.5 \text{ ms}$, considerando che al tempo $t = 0$ il contatto T viene aperto.

- 3) Sia dato il campo $\vec{B}(x, y, z) = (f(x, y, z)\hat{i} + y\hat{j} + x\hat{k})$. Trovare la forma che può assumere la funzione $f(x, y, z)$ affinché il campo dato possa rappresentare un campo magnetico nel vuoto, considerando la condizione che $B(0,0,0) = 0$.

Domande:

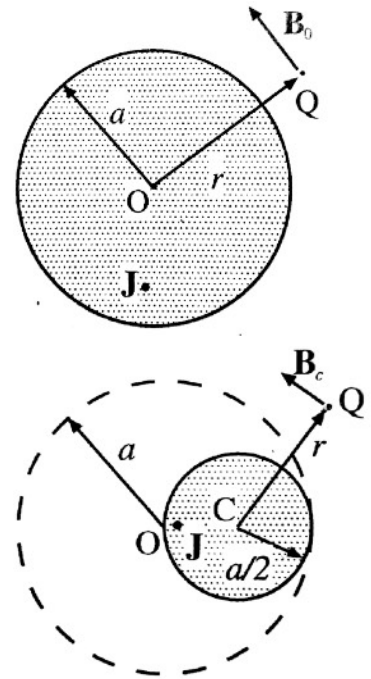
- 1) Spiegare tramite esempi la legge di Lenz.
- 2) Fornire una definizione di campo magnetico e discutere le sue proprietà principali.
- 3) Spiegare la legge di Faraday-Neumann.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.

Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm})^2$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N s}^2/\text{C}^2$.

Svolgimenti e soluzioni:

- 1) Si noti che la densità di corrente J circolante nel cilindro prima e dopo la creazione della cavità è la stessa, quindi possiamo risolvere il problema con il principio di sovrapposizione: il campo magnetico \vec{B} generato dalla struttura è pari al campo \vec{B}_0 generato dal cilindro pieno di raggio a , sottratto del campo \vec{B}_C generato dal cilindro di raggio $a/2$ che è stato enucleato dal conduttore per creare la cavità. Le figure illustrano l'andamento di questi due campi in un generico punto Q . Chiameremo r la distanza dal centro O del conduttore pieno ed r' la distanza dal centro C della cavità. In base ai dati del problema, la densità di corrente che fluisce nel conduttore è pari a:



$$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{u}_z \quad \text{con } \hat{u}_z \text{ versore perpendicolare al piano del foglio e uscente.}$$

Ricordando che il campo magnetico generato da un filo conduttore infinito percorso da corrente I è

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\theta \quad \text{con } \hat{u}_\theta \text{ versore tangente alle linee di flusso circolare di } \vec{B} \text{ centrate in } O \text{ e diretto in verso antiorario,}$$

allora possiamo ottenere il campo \vec{B}_0 e il suo andamento in funzione di r :

$$\vec{B}_0(r) = \frac{\mu_0 \pi r^2 J}{2\pi r} \hat{u}_\theta = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \hat{u}_\theta \quad \text{per } r < a$$

$$\vec{B}_0(r) = \frac{\mu_0 \pi a^2 J}{2\pi r} \hat{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\theta \quad \text{per } r \geq a$$

dove $J = |\vec{J}|$.

Applicando il teorema di Ampere al cilindro di raggio $a/2$ (cavità), otteniamo che il campo \vec{B}_C da questo generato è

$$\vec{B}_C(r) = \frac{\mu_0 \pi r'^2 J}{2\pi r'} \hat{u}'_\theta = \frac{\mu_0 I r'}{2\pi a^2} \hat{u}'_\theta \quad \text{per } r' < a/2$$

$$\vec{B}_C(r) = \frac{\mu_0 \pi (a/2)^2 J}{2\pi r'} \hat{u}'_\theta = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r'} \hat{u}'_\theta \quad \text{per } r' \geq a/2 \quad \text{e } I' = I/4 \text{ è la corrente complessiva che scorre in questo secondo conduttore}$$

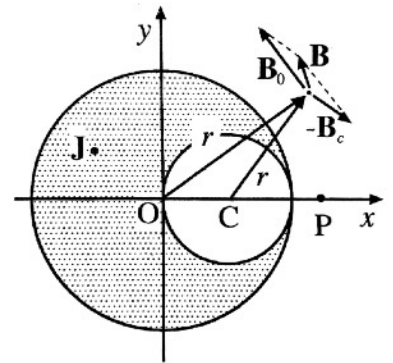
dove \hat{u}'_θ è il versore tangente alle linee di flusso circolari di \vec{B}_C centrate in C e diretto in verso antiorario.

1. Imponendo che $\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}_C$ e facendo uso dei versori degli assi x e y mostrati in figura, otteniamo per il campo in O:

$$\vec{B}(O) = \vec{B}_0(O) - \vec{B}_C(O) = 0 - \left[-\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \hat{u}_y\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \hat{u}_y$$

in modulo:

$$B(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Ns^2}{C^2} \cdot 2 A}{4\pi \cdot 4 \cdot 10^{-3} m} = 0.5 \cdot 10^{-4} T$$



2. Per il campo in C, otteniamo invece

$$\vec{B}(C) = \vec{B}_0(C) - \vec{B}_C(C) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \hat{u}_y - 0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \hat{u}_y$$

$$\text{in modulo: } B(C) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Ns^2}{C^2} \cdot 2 A}{4\pi \cdot 4 \cdot 10^{-3} m} = 0.5 \cdot 10^{-4} T$$

2) 1. Conoscendo l'energia magnetica del solenoide:

$$U_m = \frac{1}{2} L i_L^2$$

possiamo ricavare la corrente che circola in esso

$$i_L = \sqrt{\frac{2U_m}{L}} = 0.89 A .$$

2. A regime, l'induttanza si comporta come un filo con R trascurabile, quindi, con questa considerazione, notiamo che nella maglia di sinistra le resistenze sono attraversate dalla stessa corrente:

$$i_2 = i_L = 0.89 A \quad (\text{per la considerazione sull'induttanza fatta poco fa})$$

quindi $R_{eq} = R_1 + R_3 = 8 \Omega$ (le resistenze, infatti, risultano in serie).

Quindi nella maglia:

$$f = R_{eq}i = 8 \Omega \cdot 0.89 A = 7.12 V .$$

3. Quando l'interruttore viene aperto, l'induttanza si scarica con una corrente che decresce esponenzialmente con costante di tempo:

$$\tau = \frac{L}{R_2} = 1.25 \text{ ms}$$

dato che l'unica resistenza nella maglia percorsa da corrente (dopo l'apertura del circuito) è R_2 .

La corrente sarà quindi

$$i(t_1) = i_L e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0.89 A e^{-\frac{0.5 \text{ ms}}{1.25 \text{ ms}}} = 0.60 A .$$

3) Affinché \vec{B} sia un campo magnetico nel vuoto, deve essere che $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + 1 \right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1 \quad , \quad \text{quindi la funzione sarà: } f(x, y, z) = -x + g(y, z)$$

con $g(y, z)$ una funzione arbitraria di y e z .

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \hat{i} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) =$$

$$= \hat{i}(0) - \hat{j} \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{quindi} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad , \quad \text{quindi } g(y, z) = h(z) .$$

$$1 - \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \text{quindi} \quad \frac{\partial g(y, z)}{\partial z} = \frac{\partial h(z)}{\partial z} = 1$$

Quindi, abbiamo trovato che $g(y, z) = h(z) = z + c$, dove c è una costante arbitraria che è definita dalle condizioni iniziali.

Sapendo che $B(0,0,0) = 0$:

$$B(-x + z + c, y, x) = 0 \quad \text{cioè} \quad -x + z + c = 0, \quad \text{quindi} \quad c = 0.$$

La forma della funzione f deve essere quindi:

$$f(x, y, z) = f(x, z) = -x + z.$$

Il campo magnetico nel vuoto avrà l'espressione

$$\vec{B}(x, y, z) = ((-x + z)\hat{i} + y\hat{j} + x\hat{k}) .$$

Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

11 Gennaio 2018

Scritto - Onde

Esercizi:

- 1) Un'onda armonica viaggia lungo una corda, lunga $L = 3.7$ m e di massa $m = 750$ g, tenuta tesa da una forza di modulo $F = 120$ N. L'onda ha ampiezza $A = 2.8$ cm e frequenza $\nu = 32.9$ Hz. Ignorando ogni effetto della forza peso, calcolare:
 - 1) la velocità v di propagazione dell'onda lungo la corda;
 - 2) la lunghezza d'onda λ ;
 - 3) l'energia media per unità di lunghezza della corda (densità lineare di energia u);
 - 4) la potenza media \bar{P} trasmessa dalla corda.
- 2) In una regione di spazio vuoto sono simultaneamente presenti due onde elettromagnetiche, le cui equazioni sono:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= E_0 \cos(ky + \omega t)(\hat{i} + \hat{k})/\sqrt{2} \\ \vec{E}_2 &= E_0 \cos(ky + \omega t + \pi/4)\hat{i}\end{aligned}$$

con $E_0 = 100$ V/m e $\omega = 10^{11}$ s⁻¹. Determinare:

- 1) la lunghezza d'onda λ delle due onde e la direzione di propagazione;
- 2) l'espressione del campo magnetico \vec{B} dell'onda risultante;
- 3) l'intensità I dell'onda risultante;
- 4) a quale regione dello spettro elettromagnetico appartengono tali onde.

Domande:

- 1) Spiegare il significato di impedenza meccanica o di impedenza per le onde elettromagnetiche.
- 2) Spiegare con qualche esempio l'effetto doppler.
- 3) In quali casi un mezzo su cui viaggiano le onde è detto dispersivo? Cosa significa? Fare qualche esempio.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.

Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C²/(Nm²) e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Ns²/C².

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. La velocità di propagazione di un'onda è data da:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{dove } T \text{ è la tensione a cui è sottoposta la corda, ovvero la forza } F.$$

La densità lineare che appare nella relazione è

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0.75 \text{ kg}}{3.7 \text{ m}} = 0.2 \text{ kg/m}$$

Quindi la velocità di propagazione è

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{120 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{0.2 \text{ kg/m}}} = 24.49 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2. La lunghezza d'onda di un'onda è data da:

$$\lambda = vT \quad \text{dove} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} \quad \text{è il periodo di oscillazione dell'onda.}$$

$$\text{Allora } \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{24.49 \text{ m/s}}{32.9 \text{ 1/s}} = 0.744 \text{ m} = 744 \text{ mm}.$$

3. L'energia media della corda è data da

$$E = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \lambda \quad \text{dove} \quad \omega = 2\pi\nu = 206.7 \frac{1}{\text{s}}.$$

Quindi la densità di energia u sarà:

$$\begin{aligned} u &= \frac{E}{\lambda} = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot (2.8 \cdot 10^{-2})^2 \text{ m}^2 \cdot (206.7)^2 \frac{1}{\text{s}^2} = \\ &= 7.84 \cdot 10^{-5} \cdot 42724.89 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3.35 \frac{\text{J}}{\text{m}} \end{aligned}$$

4. La potenza media trasmessa dalla corda è data da

$$\bar{P} = \frac{E}{T} = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 v =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot (2,8 \cdot 10^{-2})^2 \text{ m}^2 \cdot (206.7)^2 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot 24.49 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 82.03 \text{ W}$$

2) 1. Sappiamo che la lunghezza d'onda si esprime come

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \quad \text{dove } v \text{ è la velocità di propagazione dell'onda, che nel caso di onda elettromagnetica è } c \text{ e } \nu \text{ è la frequenza.}$$

Sapendo che $\omega = 2\pi\nu$, allora possiamo riscrivere la lunghezza d'onda come

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{10^{11} \text{ 1/s}} = 18.85 \text{ mm}.$$

La direzione di propagazione delle due onde è quella dell'asse y e sono entrambe onde regressive, quindi il verso di propagazione è quello negativo ($-\hat{j}$).

2. Ricordiamo che il modulo del campo magnetico è legato a quello del campo elettrico dalla relazione:

$$\vec{\mathbf{E}} = c\vec{\mathbf{B}}, \quad \text{quindi possiamo scrivere le due ampiezze così:}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_1 = \frac{E_0}{c\sqrt{2}} \cos(ky + \omega t)(\hat{k} - \hat{i})$$

$$\vec{\mathbf{B}}_2 = \frac{E_0}{c} \cos(ky + \omega t + \frac{\pi}{4})\hat{k}$$

avendo ragionato sulle componenti di \mathbf{B} considerando che esso deve essere perpendicolare sia alla direzione di oscillazione di \mathbf{E} che a quella di propagazione delle onde.

Allora, il campo magnetico dell'onda risultante è

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2 = -\frac{E_0}{c\sqrt{2}} \cos(ky + \omega t)\hat{i} + \frac{E_0}{c\sqrt{2}} \cos(ky + \omega t)\hat{k} + \frac{E_0}{c} \cos(ky + \omega t + \frac{\pi}{4})\hat{k}$$

sviluppiamola ricordando anche la regola trigonometrica

$$(\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \text{ da applicare su } \vec{\mathbf{B}}_2, \text{ dove } \alpha = ky + \omega t \text{ e } \beta = \frac{\pi}{4} :$$

$$\vec{\mathbf{B}} = -\frac{\sqrt{2}E_0}{c} \cos(ky + \omega t)\hat{i} + \frac{\sqrt{2}E_0}{c} \sin(ky + \omega t)\hat{i} + \frac{E_0}{c\sqrt{2}} \cos(ky + \omega t)\hat{k}$$

3. L'onda risultante risulta avere l'espressione del campo elettrico data da

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{TOT}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 = E_0 \cos(ky + \omega t)(\hat{i} + \hat{k})/\sqrt{2} + E_0 \cos(ky + \omega t + \pi/4)\hat{i}$$

sviluppiamola ricordando anche la regola trigonometrica

$(\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$ da applicare su $\vec{\mathbf{E}}_2$, dove $\alpha = ky - \omega t$ e $\beta = \frac{\pi}{4}$:

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{TOT}} = \sqrt{2}E_0 \cos(ky + \omega t)\hat{i} - \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(ky + \omega t)\hat{i} + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(ky + \omega t)\hat{k}$$

Sappiamo che l'intensità è data da: $I = \epsilon c (E_0^2)_m$

dove $(E_0^2)_m$ è il valor medio del quadrato dell'ampiezza dell'onda, allora andiamo a calcolare quest'ultimo termine per tutte le componenti dell'onda risultante:

$$\begin{aligned} E_{0i}^2 &= (\sqrt{2}E_0 \cos(ky + \omega t)\hat{i} - \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(ky + \omega t)\hat{i})^2 = \\ &= 2E_0^2 \cos^2(ky + \omega t) + \frac{E_0^2}{2} \sin^2(ky + \omega t) - 2E_0^2 \cos(ky + \omega t)\sin(ky + \omega t) \end{aligned}$$

Il valor medio di questo termine, tenendo conto che il valor medio del seno e coseno è 1/2 e quello del loro prodotto è 0, è

$$(E_{0i}^2)_m = \frac{2E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{4} - 0 = \frac{5}{4}E_0^2$$

Mentre, con le stesse considerazioni, per l'altra componente abbiamo

$$(E_{0k}^2)_m = \frac{E_0^2}{4}$$

Quindi, in termini di intensità, avremo:

$$I_i = \epsilon c \frac{5}{4}E_0^2 \quad \text{e} \quad I_k = \epsilon c \frac{E_0^2}{4}$$

Allora l'intensità totale dell'onda risultante è

$$I = I_{\hat{i}} + I_{\hat{k}} = \epsilon c \frac{3}{2} E_0^2 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{3}{2} \cdot 10^4 \frac{\text{V}^2}{\text{m}^2} = 39.82 \text{ W} .$$

Allo stesso risultato si arriva considerando il fenomeno dell'interferenza nella componente lungo l'asse x e, quindi, la relazione:

$$I_{\hat{i}} = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 + I_2} \cos \Delta$$

dove I_1 e I_2 sono le due intensità relative al coseno e al seno, mentre Δ è la differenza di fase tra le due onde (nel nostro caso $\Delta = \frac{\pi}{4}$).

4. Dato che la lunghezza d'onda trovata per entrambi le onde è $\lambda = 18.85 \text{ mm}$, possiamo dire che esse appartengono alla regione dello spettro elettromagnetico delle microonde.

Inoltre, conoscendo la pulsazione dell'onda, possiamo ricavarci la frequenza:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \simeq 8 \text{ GHz}$$

che rientra nel range di frequenze delle microonde: $[1 - 300] \text{ GHz}$.

Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

11 Gennaio 2018

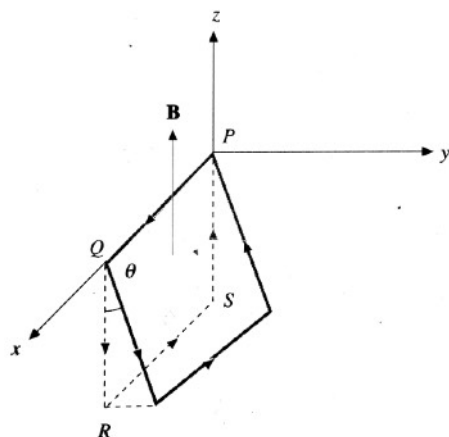
Scritto - Elettromagnetismo

Esercizi:

- 1) Una carica $q = 1.39 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ è distribuita con densità superficiale uniforme σ su una corona circolare piana di raggio interno $R_1 = 20 \text{ cm}$ e raggio esterno $R_2 = 30 \text{ cm}$.
 - 1) Determinare le espressioni del campo elettrostatico $\vec{E}(x)$ e del potenziale $V(x)$ sull'asse x della corona.
 - 2) Calcolare la forza che agisce su una carica $q = 10^{-8} \text{ C}$ libera di muoversi in un punto P di coordinata $x = 20 \text{ cm}$, sull'asse della corona.

- 2) Una spira rettangolare rigida, di lati $PQ = RS = a = 20 \text{ cm}$ e $QR = SP = b = 10 \text{ cm}$, ha una massa per unità di lunghezza $\mu = 5 \cdot 10^{-2} \text{ g/cm}$ ed è percorsa da una corrente i . Essa può ruotare senza attrito intorno a PQ che è parallelo all'asse x orizzontale. Quando sulla spira agisce un campo magnetico uniforme e verticale $\vec{B} = B\hat{u}_z$, con $B = 2 \cdot 10^{-2} \text{ T}$, essa è percorsa da una corrente $i = 2 \text{ A}$.
Calcolare

- 1) il momento torcente magnetico iniziale ($\theta = 0$);
- 2) l'angolo θ di equilibrio stabile della spira;
- 3) il lavoro L fatto dalle forze magnetiche durante la rotazione.



Domande:

- 1) Discutere l'effetto Hall.
- 2) Illustrare le caratteristiche di un campo elettrico prodotto da un dipolo.
- 3) Definire ed illustrare con qualche esempio l'induzione elettromagnetica.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.

Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N s}^2/\text{C}^2$.

Svolgimenti e soluzioni:

- 1) 1. Consideriamo un anello concentrico alla corona, di raggio r ($R_1 < r < R_2$) e area $d\Sigma = 2\pi r dr$ sul quale c'è una carica $dq = \sigma d\Sigma = \sigma 2\pi r dr$. Allora il potenziale generato da questo anello è dato da

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r'} = \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

dove abbiamo scritto il vettore posizione del punto P come $r' = \sqrt{x^2 + r^2}$.
Integrando su tutta la corona, abbiamo

$$\begin{aligned} V &= \int_{\Sigma} dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{x^2 + r^2}]_{R_1}^{R_2} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R_2^2} - \sqrt{x^2 + R_1^2}) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il campo elettrico, conoscendo il potenziale possiamo scrivere

$$\begin{aligned} E(x) &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{x^2 + R_2^2} - \sqrt{x^2 + R_1^2}) = \\ &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + R_2^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R_1^2}} \right) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_2^2}} \right). \end{aligned}$$

2. Per calcolare la forza che agisce sulla carica q , basta ricordare che $\vec{F} = q\vec{E}$, quindi

$$\begin{aligned} F &= qE(x) = q \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_2^2}} \right) = \\ &= 10^{-8} \text{ C} \frac{8.86 \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \cdot 0.2 \text{ m}}{2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)} \left(\frac{1}{\sqrt{0.08 \text{ m}^2}} - \frac{1}{\sqrt{0.13 \text{ m}^2}} \right) = 7.6 \cdot 10^{-6} \text{ N} \end{aligned}$$

avendo calcolato precedentemente la densità superficiale di carica:

$$\sigma = \frac{q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = 8.86 \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

2) 1. Il momento torcente magnetico che agisce sulla spira è dato da

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{B}} = i \Sigma \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{B}} = iabB \sin \phi \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} = iabB \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}}$$

dove $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}$ è il versore normale e uscente dalla superficie della spira e Σ è l'area racchiusa dalla spira, ovvero $\Sigma = ab$.

L'angolo ϕ è l'angolo compreso tra il versore $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}$ e $\vec{\mathbf{B}}$, ossia
 $\phi = 180^\circ - 90^\circ - \theta = 90^\circ - \theta$

ecco perché $\sin \phi = \cos \theta$.

Quindi, il momento torcente iniziale, ovvero quando la spira si trova a $\theta = 0^\circ$:

$$M = iabB = 2 \text{ A} \cdot 0.2 \text{ m} \cdot 0.1 \text{ m} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ T} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$$

2. Nel caso di equilibrio stabile, sulla spira agiscono la forza magnetica (verticale verso l'alto) e la forza peso (verticale verso il basso). Allora avremo:

$$\vec{\mathbf{M}} + \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}} = 0$$

dove

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{b}}_{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{F}} \quad \text{dove } \vec{\mathbf{b}}_{\mathbf{P}} \text{ è il braccio della forza peso } \vec{\mathbf{F}}, \text{ che sappiamo agire sul}$$

centro di massa della spira che è a coordinate
 $x_{CM} = (a/2, b/2)$.

Quindi

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{b}}_{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{F}} = -\frac{b}{2} F_P \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} = -\frac{b}{2} mg \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}}$$

Conoscendo la densità di massa, possiamo scrivere

$$m = \mu \cdot l_{\text{TOT}} = \mu \cdot 2(a + b)$$

quindi

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}} = -\frac{b}{2} mg \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} = -\frac{b}{2} 2\mu(a + b)g \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} = -\mu b(a + b)g \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}}$$

Sostituendo nella relazione che definisce l'equilibrio stabile:

$$iabB \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} - \mu b(a + b)g \sin \theta \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} = 0$$

$$\sin \theta = \frac{iabB}{\mu b(a+b)g} \cos \theta = \frac{iaB}{\mu(a+b)g} \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{iaB}{\mu(a+b)g} = \frac{2 \text{ A} \cdot 0.2 \text{ m} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ T}}{5 \cdot 10^{-1} \text{ kg/m} \cdot 0.3 \text{ m} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} = 0.54$$

Allora

$$\theta = \arctan(0.54) = 28.4^\circ .$$

3. Per calcolare il lavoro fatto dalle forza magnetiche nella rotazione da 0 a 30°, consideriamo solo il momento torcente magnetico:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\theta M d\theta = iabB \int_0^\theta \cos \theta d\theta = iabB \sin(28.4^\circ) = \\ &= 2 \text{ A} \cdot 0.2 \text{ m} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ T} \cdot 0.476 = 3.81 \cdot 10^{-4} \text{ J} \end{aligned}$$

Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

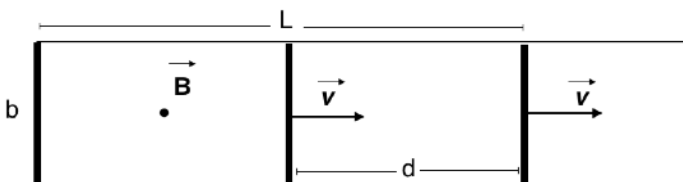
25 Gennaio 2018

Scritto - Elettromagnetismo

Esercizi:

- 1) Quattro cariche sono poste ai vertici di un quadrato nel piano cartesiano (x,y) con coordinate, in mm: $Q_1(0,0) = 1 \mu\text{C}$, $Q_2(2,0) = -2 \mu\text{C}$, $Q_3(2,2) = 4 \mu\text{C}$ e $Q_4(0,2) = -3 \mu\text{C}$. Calcolare:
 - 1) il valore del campo elettrico $\vec{E}(1,1) = (E_x, E_y)$;
 - 2) il valore del potenziale $V(1,1)$;
 - 3) il momento di dipolo elettrico del sistema.

- 2) Un circuito è formato da due fili lunghi, paralleli e di resistenza elettrica trascurabile, connessi da un filo metallico, più breve di lunghezza $b = 0,5 \text{ m}$, disposto perpendicolarmente in modo da formare tre lati di un rettangolo. Un cingolo di materiale isolante, che si muove con velocità $v = 8 \text{ m/s}$, trasporta fili metallici disposti perpendicolarmente alla direzione di moto e a distanza $d = 50 \text{ cm}$ l'uno dall'altro. Il cingolo è disposto in maniera tale da mettere in contatto i fili con i due lati lunghi del rettangolo in una regione lunga $L = 1 \text{ m}$. Sapendo che in ogni istante vi sono due fili del cingolo in contatto con i lati lunghi, che l'intero sistema è immerso in un campo magnetico diretto verso l'alto di modulo $B = 0,5 \text{ T}$ e che tutti i lati corti, sia quello fisso che quelli in moto hanno una sezione $S = 1 \text{ mm}^2$ e una resistività $\rho = 10^{-4} \Omega\text{m}$ e determinare:
 - 1) la forza elettromotrice indotta nel circuito;
 - 2) la corrente che passa nel filo corto fisso;
 - 3) la forza magnetica agente sul cingolo.



Domande:

- 1) Ricavare l'espressione dell'energia elettrostatica di due sfere piene cariche molto distanti tra loro.
- 2) Descrivere come si distribuisce l'energia in funzione del tempo in un circuito RL.
- 3) Spiegare il principio di sovrapposizione per il potenziale elettrico.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.

Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{C}^2$.

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. Ricordando che il campo elettrico ha la seguente espressione:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

e considerando che $r = \sqrt{2} \cdot 1 \text{ mm} = \sqrt{2} \text{ mm}$, possiamo scrivere le espressioni dei campi elettrici per tutte e quattro le cariche, nelle loro componenti cartesiane:

$$\vec{E}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \right)$$

$$\vec{E}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|Q_2|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|Q_2|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \right)$$

$$\vec{E}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|Q_3|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|Q_3|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \right)$$

$$\vec{E}_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|Q_4|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|Q_4|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \right)$$

Allora il campo elettrico risultante nel punto (1, 1) sarà:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|Q_1| + |Q_2| - |Q_3| - |Q_4|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|Q_1| - |Q_2| - |Q_3| + |Q_4|}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \right) = \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4 \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2 \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \right) = \\ &= \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0}, -\frac{1}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \right) \end{aligned}$$

2. Il potenziale elettrico nel punto (1,1) è dato da:

$$V(1,1) = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 0 \quad \text{dato che la somma delle cariche è nulla.}$$

3. Ricordiamo che la definizione di momento di dipolo per un sistema di cariche è

$$\vec{p} = \sum_i q_i \cdot \vec{r}_i \quad \text{rispetto ad un polo.}$$

Allora dividendo per le due coordinate, troviamo

$$p_x = \sum_i (q_i x_i) = Q_1(-1) + Q_2 + Q_3 + Q_4(-1) = (-1 - 2 + 4 + 3) \cdot 10^{-9} \text{ Cm} = 4 \cdot 10^{-9} \text{ Cm}$$

$$p_y = \sum_i (q_i y_i) = Q_1(-1) + Q_2(-1) + Q_3 + Q_4 = (-1 + 2 + 4 - 3) \cdot 10^{-9} \text{ Cm} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Cm}$$

Quindi, il modulo del momento di dipolo sarà

$$|\vec{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = 2\sqrt{5} \cdot 10^{-9} \text{ Cm}$$

- 2) 1. La forza elettromotrice è determinata dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz. In questo caso la variazione di flusso è data solo dall'aumento lineare della superficie contenuta nel circuito, ossia:

$$A_0 + bvt = b(l_0 + vt) \quad \text{avendo chiamato con } A_0 \text{ l'area iniziale e } l_0 \text{ il lato (orizzontale) iniziale del circuito.}$$

Quindi la variazione del flusso rispetto al tempo sarà data da

$$\frac{\partial \Phi(\vec{B})}{\partial t} = B \frac{\partial}{\partial t} [b(l_0 + vt)] = Bbv$$

Quindi la forza elettromotrice indotta non è altro che

$$f_i = Bbv = 0.5 \text{ T} \cdot 0.5 \text{ m} \cdot 8 \text{ m/s} = 2 \text{ V}$$

Tale fem è applicata in maniera eguale su entrambi i fili in movimento del cingolo.

2. La corrente che passa nel filo corto fisso si può determinare considerando il circuito costituito dai fili e il suo equivalente. Infatti, non è altro che un circuito con due resistenze in parallelo (fili corti del cingolo) alla stessa differenza di potenziale (fem indotta), in serie con una resistenza uguale alle altre due.

Avendo sia la sezione dei fili che la resistività, possiamo trovare il valore delle resistenze

$$R = \frac{\rho l}{S} = 50 \Omega$$

Allora la resistenza equivalente del parallelo sarà $R' = \frac{R}{2}$ e, di conseguenza, la resistenza equivalente totale del circuito sarà la serie tra R e R' :

$$R_{\text{eq}} = R + R' = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

La corrente che passa nel filo corto sarà allora

$$i_i = \frac{f_i}{R_{\text{eq}}} = \frac{2f_i}{3R} = 27 \text{ mA}$$

3. Sapendo che la forza magnetica agente su un filo di lunghezza l è definita come

$$\vec{\mathbf{F}} = i \vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

allora la forza totale agente sul cingolo sarà il doppio della forza che agisce su ciascun filo (che è uguale):

$$|\vec{\mathbf{F}}| = 2\left(\frac{i_i}{2} b B\right) = 75 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

avendo considerato che su ogni filo del cingolo scorre la metà della corrente indotta che passa nel filo corto fisso.

Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

25 Gennaio 2018

Scritto - Onde

Esercizi:

- 1) Da un filo metallico di densità lineare $\mu = 0.3 \text{ g/m}$ si tagliano tre fili di lunghezze rispettivamente $L_1 = 1\text{m}$, $L_2 = 1.25 \text{ m}$ e $L_3 = L_1 + L_2$. Vengono vincolati agli estremi e tesi in modo tale da avere la stessa frequenza fondamentale di $\nu = 50 \text{ Hz}$. Tutti i fili sono sollecitati a produrre oscillazioni di ampiezza $A = 1.5 \text{ mm}$. Calcolare:
 - 1) le tensioni T_1 , T_2 e T_3 a cui devono essere sottoposti i fili;
 - 2) le energie di oscillazione E_1 , E_2 e E_3 dei fili.Se i due fili più corti fossero tesi alla tensione T_3 , calcolare:
 - 3) le due frequenze fondamentali ν'_1 e ν'_2 ;
 - 4) le due energie di oscillazione E'_1 e E'_2 .

- 2) Una sorgente S_1 emette isotropicamente un'onda elettromagnetica monocromatica con una potenza $P = 100 \text{ W}$. Calcolare:
 - 1) l'ampiezza del campo elettrico alla distanza $d = 1 \text{ km}$;
 - 2) la densità di energia u ;
 - 3) successivamente, viene posta una sorgente S_2 a una distanza $a = 5 \lambda$ da S_1 , coerente con quest'ultima ma sfasata di $\pi/2$: calcolare le posizioni dei massimi e i minimi di interferenza su uno schermo posto a una distanza $D = 100 \lambda$ dalle sorgenti.

Domande:

- 1) Spiegare il fenomeno dei battimenti.
- 2) Illustrare le differenze principali tra onde piane e onde sferiche.
- 3) Scrivere esplicitamente l'espressione di un'onda elettromagnetica a scelta del candidato e spiegarne le proprietà. Per tale onda, com'è definito il vettore di Poynting?

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.

Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Ns}^2/\text{C}^2$.

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. Sappiamo che le frequenze naturali della corda vincolata agli estremi sono

$$\nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

e quella fondamentale avviene nel caso in cui $n = 1$.

Quindi la frequenza fondamentale è data da $\nu = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ e possiamo trovare la tensione da quest'ultima relazione:

$$T = 4\mu\nu^2 L^2$$

Allora:

$$T_1 = 4\mu\nu^2 L_1^2 = 4 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 25 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ m}^2 = 3 \text{ N}$$

$$T_2 = 4\mu\nu^2 L_2^2 = 4 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 25 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot 1.56 \text{ m}^2 = 4.69 \text{ N}$$

$$T_3 = 4\mu\nu^2 L_3^2 = 4 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 25 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot 5.06 \text{ m}^2 = 15.19 \text{ N}$$

2. L'energia di oscillazione di una corda percorsa da un'onda stazionaria è data da

$$E = \frac{1}{4} \mu L A^2 \omega_n^2 \quad \text{dove } \omega_n = 2\pi\nu_n \longrightarrow \omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

La relazione diventa:

$$E = \frac{1}{4} \mu L A^2 \frac{\pi^2 T}{L^2 \mu} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 A^2 T}{L}$$

e possiamo calcolare le energie per tutti i fili:

$$E_1 = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 A^2 T_1}{L_1} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 \cdot 225 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot 3 \text{ N}}{1 \text{ m}} = 1.66 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

$$E_2 = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 A^2 T_2}{L_2} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 \cdot 225 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot 4.69 \text{ N}}{1.25 \text{ m}} = 2.08 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

$$E_3 = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 A^2 T_3}{L_3} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 \cdot 225 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot 15.19 \text{ N}}{2.25 \text{ m}} = 3.75 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

3. Calcoliamo le frequenze fondamentali dei fili più corti nell'ipotesi in cui la tensione a cui sono sottoposti sia T_3 , trovata nel punto 1.

$$\nu'_1 = \frac{1}{2L_1} \sqrt{\frac{T_3}{\mu}} = \frac{1}{2 \cdot 1 \text{ m}} \sqrt{\frac{15.19 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{3 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}}} = 112.5 \text{ Hz}$$

$$\nu'_2 = \frac{1}{2L_2} \sqrt{\frac{T_3}{\mu}} = \frac{1}{2 \cdot 1.25 \text{ m}} \sqrt{\frac{15.19 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{3 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}}} = 90 \text{ Hz}$$

4. Calcoliamo, ora, nella stessa ipotesi, le energie di oscillazione dei fili più corti.

$$E'_1 = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 A^2 T_3}{L_1} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 \cdot 225 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot 15.19 \text{ N}}{1 \text{ m}} = 8.43 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

$$E'_2 = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 A^2 T_3}{L_2} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 \cdot 225 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot 15.19 \text{ N}}{1.25 \text{ m}} = 6.74 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

2) 1. Sapendo che la relazione tra l'intensità e la potenza media di un'onda è

$$I = \frac{P}{\Sigma} = \frac{P}{4\pi d^2} \quad \text{dove } \Sigma \text{ è l'area superficie attraversata dall'onda}$$

possiamo calcolare l'intensità:

$$I = \frac{P}{4\pi d^2} = \frac{10^2 \text{ W}}{4\pi \cdot 10^6 \text{ m}^2} = 7.96 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Inoltre sappiamo che

$$I = \frac{E_0^2}{2Z_0} \quad \text{dove } Z_0 \text{ è l'impedenza dell'onda nel vuoto e vale circa } 377 \Omega$$

allora

$$E_0 = \sqrt{2Z_0 I} = \sqrt{2 \cdot 377 \Omega \cdot 7.96 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2} = 7.75 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$$

2. L'intensità media di un'onda si può anche scrivere come

$$I = cu \quad \text{dove } c \text{ è la velocità della luce e } u \text{ è la densità di energia.}$$

Allora troviamo che

$$u = \frac{I}{c} = \frac{7.96 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 2.6 \cdot 10^{-14} \text{ J/m}^3.$$

3. Nell'ipotesi in cui l'equazione delle onde è la seguente:

$$E_1 = E_{01} \cos(kr_1 - \omega t) = E_{01} \cos(\omega t - kr_1) = E_{01} \cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$E_2 = E_{02} \cos(kr_2 - \omega t + \frac{\pi}{2}) = E_{02} \cos(\omega t - kr_2 - \frac{\pi}{2}) = E_{02} \cos(\omega t + \alpha_2)$$

dove abbiamo chiamato

$$\alpha_1 = -kr_1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = -kr_2 - \frac{\pi}{2}$$

Allora lo sfasamento tra le due onde sarà

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = -kr_1 + kr_2 + \frac{\pi}{2} = k(r_2 - r_1) + \frac{\pi}{2}$$

dato che $r_2 - r_1 = a \sin \theta$ (dove θ è l'angolo tra la normale della distanza tra le due sorgenti e la direzione di propagazione delle onde)

allora la differenza di fase si può riscrivere come:

$$\delta = k(r_2 - r_1) + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} 5\lambda \sin \theta + \frac{\pi}{2} = 10\pi \sin \theta + \frac{\pi}{2}$$

Sapendo che l'intensità totale è

$$I = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2} = 4I_1 \cos^2(5\pi \sin \theta + \frac{\pi}{4})$$

Nel caso in cui vogliamo trovare i massimi e i minimi su uno schermo a distanza $D \gg a$, quindi nel caso descritto dall'esercizio, possiamo applicare le seguenti

approssimazioni:

$$\sin \theta \simeq \tan \theta \simeq \theta = \frac{x}{D} \quad \text{dove } x \text{ è la distanza sullo schermo dal centro tra le } S_1 \text{ e } S_2$$

Allora l'intensità diventa:

$$I(x) = 4I_1 \cos^2\left(\frac{5\pi x}{D} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Per avere i massimi di interferenza dovrà essere:

$$\frac{5\pi x}{D} + \frac{\pi}{4} = n\pi \quad \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x_{\max} = \frac{4n-1}{4} \frac{D}{5} = \frac{4n-1}{4} \frac{100\lambda}{5} = 20 \frac{(4n-1)}{4} \lambda = 5(4n-1)\lambda$$

Per avere i minimi di interferenza, invece:

$$\frac{5\pi x}{D} + \frac{\pi}{4} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x_{\min} = \frac{4n+1}{4} \frac{D}{5} = \frac{4n+1}{4} \frac{100\lambda}{5} = 20 \frac{(4n+1)}{4} \lambda = 5(4n+1)\lambda$$

Fisica Generale T2 - Prof. M. Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

7 Febbraio 2018

Elettromagnetismo

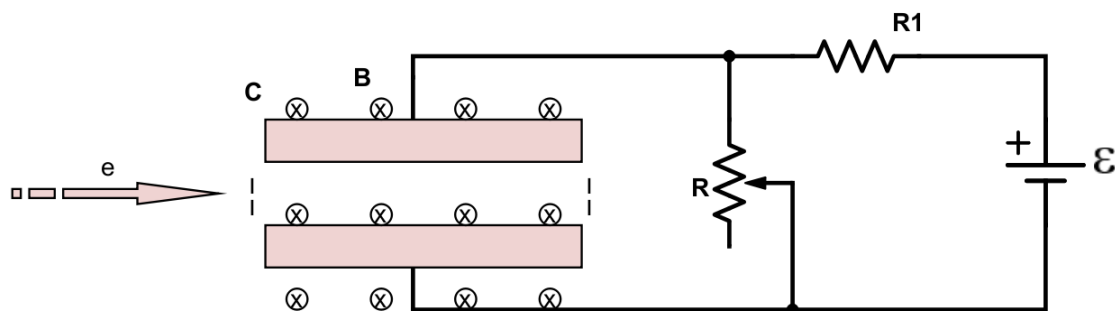
Esercizi:

1) Una spira circolare con carica totale $Q = 1 \text{ C}$ e raggio $R = 1 \text{ m}$, ruota attorno al suo asse (retta perpendicolare al piano su cui posa e passante per il centro) con una frequenza $f = 10 \text{ Hz}$. Definito un punto P sull'asse a distanza R dal centro della spira, determinare:

- il potenziale elettrico lungo l'asse della spira e il suo valore in P, assumendo nullo il potenziale al centro della spira;
- il campo elettrico lungo l'asse della spira e il suo valore in P;
- il campo magnetico lungo l'asse della spira e il suo valore in P.

2) Un selettore di velocità per un fascio di elettroni è realizzato immergendo il circuito mostrato in figura in un campo magnetico, entrante nel piano del foglio, di intensità $|\vec{B}| = 0,1 \text{ T}$. Il campo elettrico creato dal condensatore è perpendicolare al campo magnetico. Il condensatore è costituito da un capacitore piano di area $S = 1 \text{ m}^2$ e distanza tra le piastre $d = 10 \text{ cm}$, mentre la resistenza R_1 vale $R_1 = 100 \Omega$ e la tensione erogata dal generatore vale $\varepsilon = 200 \text{ V}$. Sapendo che la massa dell'elettrone vale $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, calcolare:

- quale resistenza deve essere selezionata nella resistenza variabile R in modo che vengano selezionati elettroni con energia $E_m = 4 \times 10^{-24} \text{ J}$;
- modulo, direzione e verso del vettore di Poynting al centro del condensatore.



Domande:

- Spiegare il potere di ionizzazione delle punte.
- Cosa si intende per "resistenza interna" di un generatore di corrente? Come la si può misurare?
- Definire il concetto di autoinduttanza e illustrarne qualche applicazione.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.

Nel caso servano, si usino i valori $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$

Soluzione Esercizio 1

a) Per il calcolo del potenziale (e del campo elettrico) non ha importanza che la spira sia in rotazione. Scelta l'origine al centro della spira, e indicata con z la coordinata del punto generico lungo l'asse, il contributo infinitesimo al potenziale di un arco di circonferenza su cui è depositata una carica dq è $dq/(4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2})$. Pertanto il potenziale totale vale:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}} + k,$$

dove k è una costante da determinare sulla base della condizione di normalizzazione. Imponendo che $V(0) = 0$ si ha $k = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$ e quindi

$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{1}{R} \right),$$

e quindi $V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) = -2,63 \times 10^9 \text{ V}$.

b) Il campo elettrico è diretto lungo l'asse z e vale:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}},$$

da cui $\vec{E}(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{1}{2\sqrt{2}} \hat{\mathbf{k}} = 3,18 \times 10^9 \text{ (V/m)} \hat{\mathbf{k}}$ Si noti che, quando si è molto distanti dalla spira, l'andamento del campo elettrico è $\sim 1/z^2$, ovvero quello prodotto da una carica puntiforme.

c) La spira carica in rotazione si comporta, a tutti gli effetti, come una spira percorsa da una corrente stazionaria $i = Qf$. Il campo magnetico è diretto lungo l'asse e può essere ricavato dalla prima legge di Laplace, caso notevole affrontato a lezione nella parte di teoria. Il risultato vale:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{iR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{QfR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}},$$

dove abbiamo sostituito alla corrente il prodotto Qf . Si ha quindi $\vec{B}(R) = \frac{\mu_0}{2} \frac{Qf}{2R\sqrt{2}} = 2,22 \mu\text{T}$. Si noti che, quando si è molto distanti dalla spira, l'andamento del campo magnetico è $\sim 1/z^3$, ovvero quello prodotto da un dipolo magnetico.

Soluzione Esercizio 2

Gli elettroni, in approssimazione non relativistica, avranno velocità di modulo $v = \sqrt{2E_m/m} = 2965 \text{ m/s}$. La forza di Lorentz corrispondente a questa velocità è $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Visto che la direzione della traiettoria è perpendicolare al campo magnetico, il modulo della forza è $F = qvB$, con verso opposto a quella generata dal campo elettrico sugli elettroni.

Si richiede, quindi, $F(E) = F(B)$ per selezionare gli elettroni. Con $F(E) = qE$ e $E = V_R/d$, con V_R la tensione ai capi delle armature, che coincide con la tensione ai capi della resistenza variabile. Nel circuito, raggiunto l'equilibrio, $V_R = i * R = \frac{\epsilon}{R_1 + R} R$. Risolvendo questa equazione per R , si trova $R = V_R R_1 / (\epsilon - V_R)$. Sostituendo quindi a V_R la sua espressione, si ha

$$R = EdR_1 / (\epsilon - Ed) = vBdR_1 / (\epsilon - vBd) = \sqrt{2E_m/m} BdR_1 / (\epsilon - Bd\sqrt{2E_m/m}) = 17.4 \Omega.$$

Con $|E| = |vB|$ e B noto, sapendo che il campo elettrico è perpendicolare al campo magnetico, il vettore di Poynting nel centro del condensatore ha modulo

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{vB^2}{\mu_0} = 23.6 \text{ MW/m}^2,$$

con la stessa direzione e verso del fascio di elettroni.

Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

07 Febbraio 2018

Scritto - Onde

Esercizi:

- 1) Un'onda armonica viaggia, con velocità $v = 20$ m/s, lungo una corda di massa $m = 500$ g. La corda è tesa e fissata ai suoi estremi a due pareti poste a una distanza $L = 4$ m. Si consideri che l'onda ha frequenza $\nu = 25$ Hz e ampiezza $A = 2.5$ cm. Determinare:
- 1) la tensione a cui è sottoposta la corda;
 - 2) la lunghezza d'onda;
 - 3) l'energia immagazzinata nella corda;
 - 4) ad un certo punto la corda viene vincolata anche nel punto a distanza $L_1 = 3/4 L$ dalla parete sinistra, mantenendo la corda tesa alla stessa tensione. Determinare le frequenze fondamentali delle onde nei due tratti di corda.

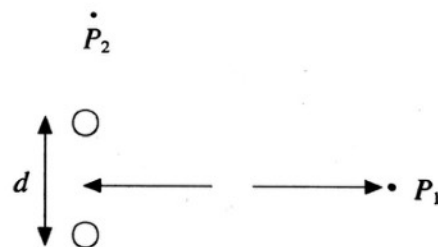
- 2) Due sorgenti di onde elettromagnetiche, di uguale frequenza $\nu = 800$ MHz ed uguale potenza P , poste a distanza $d = 12.5$ cm, emettono in fase onde sferiche che si propagano con velocità c . In un punto P_1 dell'asse di simmetria, distante $r = 5$ m dal punto di mezzo tra le sorgenti, l'onda risultante ha ampiezza pari a $E_{0P_1} = 5$ V/m.

Calcolare, nelle approssimazioni che si riterrà utile introdurre:

- 1) l'ampiezza E_0 dell'onda di ciascuna sorgente in P_1 ;
- 2) la potenza di ciascuna sorgente.

Considerato il punto P_2 che sta sulla retta congiungente le due sorgenti alla stessa distanza r dal centro, calcolare in P_2 :

- 3) l'intensità dell'onda risultante I_2 ;
- 4) l'ampiezza dell'onda risultante E_{0P_2} .



Domande:

- 1) Spiegare il principio fisico alla base del fenomeno della diffrazione.
- 2) Illustrare con qualche esempio la legge di Snell.
- 3) Descrivere il fenomeno della polarizzazione ed illustrarne le caratteristiche principali.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.

Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C²/(Nm²) e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Ns²/C².

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. La velocità di propagazione di un'onda è data da:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{dove } T \text{ è la tensione a cui è sottoposta la corda.}$$

La densità lineare che appare nella relazione è

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0.5 \text{ kg}}{4 \text{ m}} = 0.125 \text{ kg/m}$$

Quindi la tensione è

$$T = v^2 \mu = 400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot 0.125 \frac{\text{kg}}{\text{m}} = 50 \text{ N}.$$

2. La lunghezza d'onda di un'onda è data da:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{20 \text{ m/s}}{25 \text{ 1/s}} = 0.8 \text{ m}.$$

3. Ricordando che la densità di energia è data da

$$u = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \quad \text{dove } \omega = 2\pi \nu = 157.08 \text{ s}^{-1}$$

allora l'energia totale immagazzinata nella corda considerata è

$$E = \frac{1}{4} \mu L A^2 \omega^2 = \frac{1}{4} \frac{m}{L} L A^2 \omega^2 = \frac{1}{4} m A^2 \omega^2 =$$

$$\frac{1}{4} \cdot 0.5 \text{ kg} \cdot (2.5 \cdot 10^{-2})^2 \text{ m}^2 \cdot (157.08)^2 \frac{1}{\text{s}^2} = 1.93 \text{ J}$$

4. Ricordiamo che le frequenze delle armoniche sono date da

$$\nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{e quella fondamentale avviene nel caso di } n = 1.$$

Inoltre, nei due tratti della corda, notiamo che la massa rimane la stessa, così come la densità lineare, infatti:

$$\mu_1 = \frac{\frac{3}{4}m}{\frac{3}{4}L} = \frac{m}{L} = \mu = \mu_2 = \frac{\frac{1}{4}m}{\frac{1}{4}L} = \frac{m}{L}$$

Allora, le frequenze fondamentali dei due tratti sono rispettivamente:

$$\nu_{01} = \frac{1}{2\frac{3}{4}L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{2}{3L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{6\text{ m}} \sqrt{\frac{50\text{ N}}{0.125\text{ kg/m}}} = 3.33\text{ Hz}$$

$$\nu_{02} = \frac{1}{2\frac{1}{4}L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{2\text{ m}} \sqrt{\frac{50\text{ N}}{0.125\text{ kg/m}}} = 10\text{ Hz}$$

2) 1. Prima di tutto possiamo metterci nell'approssimazione in cui

$$r_1 = r_2 \simeq r \quad \text{dato che } d \ll r.$$

Sappiamo che per il fenomeno di interferenza vale

$$I = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad \text{dato che le due sorgenti hanno la stessa potenza e, quindi, la stessa intensità } I_1 .$$

Inoltre, dato che le onde emesse sono in fase, allora $I = 4I_1$.

Sapendo che, per le onde elettromagnetiche, vale la relazione

$$I = \frac{E_0^2}{2Z_0} \quad \text{dove } Z_0 \text{ è l'impedenza dell'onda nel vuoto e vale circa } 377\ \Omega$$

Allora, possiamo trovare l'ampiezza delle onde emesse in questo modo:

$$I_1 = \frac{I}{4} \implies E_{0p1}^2 = \frac{E_0^2}{4}$$

quindi

$$E_{01} = \frac{E_{0p1}}{2} = 2.5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

2. Ricordando, inoltre, che

$$I = \frac{P}{\Sigma} = \frac{P}{4\pi d^2} \quad \text{dove } \Sigma \text{ è l'area superficie attraversata dall'onda}$$

possiamo calcolare la potenza delle sorgenti:

$$P = I_1 4\pi r^2$$

Conoscendo l'ampiezza dell'onda, possiamo calcolarne l'intensità:

$$I_1 = \frac{E_{01}^2}{2Z_0} = \frac{(2.5 \text{ V/m})^2}{2 \cdot 377 \Omega} = 8.29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

allora la potenza sarà

$$P = I_1 4\pi r^2 = 8.29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} 4\pi \cdot 25 \text{ m}^2 = 2.60 \text{ W}$$

3. Nel caso in cui P_2 si trovi sulla congiungente delle due sorgenti, $r_1 \neq r_2$, quindi ci sarà uno sfasamento tra le due onde dato da

$$\delta = k(r_2 - r_1)$$

Ridefiniamo le distanze in questo modo:

$$r_1 = r - \frac{d}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = r + \frac{d}{2}$$

quindi la differenza di fase diventa:

$$\delta = k(r_2 - r_1) = k\left(r + \frac{d}{2} - r + \frac{d}{2}\right) = kd$$

$$\text{Inoltre } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \nu}{c} = \frac{2\pi \cdot 8 \cdot 10^8 \text{ Hz}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 5.33 \pi \text{ m}^{-1}$$

allora

$$\begin{aligned} I_2 &= 4I_1 \cos^2 \frac{kd}{2} = 4 \cdot 8.29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cos^2\left(\frac{5.33 \pi \text{ m}^{-1} \cdot 5 \text{ m}}{2}\right) = \\ &= 33.16 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cos^2(13.33 \pi) = 33.16 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 0.273 = 9.05 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

4. Allora l'ampiezza dell'onda risultante E_{0P_2} sarà data da

$$E_{0P_2} = \sqrt{2 Z_0 I_2} = \sqrt{2 \cdot 377 \Omega \cdot 9.05 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}} = 2.61 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

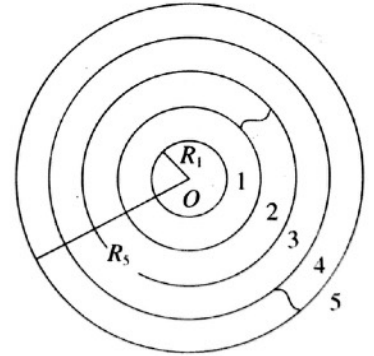
13 Giugno 2018

Scritto - Elettromagnetismo

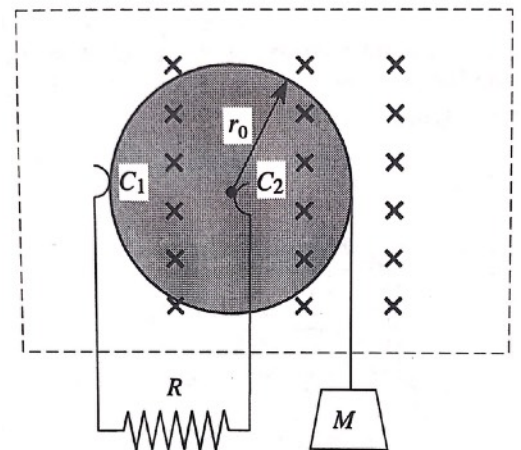
Esercizi:

1) Cinque fogli metallici di spessore trascurabile, sagomati a forma di sfera e tutti concentrici, aventi raggi pari rispettivamente a 1, 2, 3, 4, 5 cm, sono collegati con sottili fili conduttori come in figura. Il sistema è inizialmente scarico. Una carica $q = 10^{-10}$ C è depositata sulla superficie più interna. Calcolare:

- 1) la carica presente su ciascuna superficie sferica,
- 2) l'energia elettrostatica U_e dell'intero sistema.
- 3) Determinare inoltre come variano il campo elettrostatico e l'energia elettrostatica per ognuna di queste modifiche (quando si aggiungono i seguenti contatti): la sfera 1 è posta in contatto con la sfera 2, la sfera 3 con la sfera 4, la sfera 5 è collegata a terra.



2) Si consideri un disco conduttore di raggio $r_0 = 0,5$ m, posto in un piano verticale e libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare passante per il suo centro. Nello spazio è presente un campo magnetico costante B perpendicolare al piano del disco, di intensità $B_0 = 4$ T. Dei contatti striscianti sono posti all'estremità del disco (C_1) e nel suo asse (C_2), come mostrato in figura. Quando ruota a velocità angolare costante, produce una corrente I attraverso una resistenza $R = 10 \Omega$ che chiude il circuito. Un momento torcente viene prodotto da una massa $M = 0,1$ kg appesa a un filo molto lungo inestensibile avvolto attorno al perimetro del disco. Sapendo che nelle condizioni del presente esercizio il momento d'inerzia del disco è trascurabile ($I_d \ll MR^2$) e che



dato un filo abbastanza lungo il sistema raggiunge una velocità angolare costante, si fornisca:

- 1) la spiegazione di come e perché la corrente circola e fornire un'espressione quantitativa della corrente in funzione della velocità angolare;
- 2) la velocità angolare in condizioni stazionarie e la corrente associata.

Domande:

- 1) Discutere l'effetto Hall.
- 2) Definire l'induttanza e descriverne le sue proprietà.
- 3) Spiegare il principio di sovrapposizione per il potenziale elettrico.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.

Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C²/N·m² e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N·s²/C².

Svolgimenti e soluzioni:

$$1) \quad 1. \quad q_1 = q_3 = q_5 = q = 10^{-10} \text{ C}$$

$$q_2 = q_4 = -q = -10^{-10} \text{ C}$$

2. Il campo elettrico è

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \neq 0 \quad \text{nelle zone A (tra il guscio 1 e 2), B (tra il guscio 3 e 4) e C (fuori dal guscio 5)}$$

Ricordando che l'energia elettrostatica è definita come

$$U_e = \int dU_e = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

allora

$$U_e = U_A + U_B + U_C = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_5} = 3,51 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

3. Se si mettono in contatto le superfici 1 e 2, il campo si annulla nella zona A, quindi $U_A = 0$. Allora

$$U_e = U_B + U_C \quad \text{e} \quad \Delta U_e = U_A = 2,25 \cdot 10^{-9} \text{ J.}$$

Nelle zone esterne non succede nulla, per le proprietà di schermo.

Se si mettono in contatto le superfici 3 e 4, il campo si annulla nella zona B, quindi $U_B = 0$. Allora

$$U_e = U_A + U_C \quad \text{e} \quad \Delta U_e = -0,36 \cdot 10^{-9} \text{ J.}$$

All'interno e all'esterno non succede nulla.

Se si mettono la superficie 5 a terra, il campo esterno è nullo, quindi $U_C = 0$. Allora

$$U_e = U_A + U_B \quad \text{e} \quad \Delta U_e = -0,90 \cdot 10^{-9} \text{ J.}$$

All'interno non cambia nulla.

- 2) 1. Si consideri un elettrone a distanza r dall'asse. Questo è soggetto a una forza di Lorentz

$$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{dove } \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

quindi si ha una forza \vec{F}_r che agisce sull'elettrone:

$$\vec{F}_r = e[(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B}] = e\omega B \vec{r} \quad \text{dove } e \text{ è la carica dell'elettrone.}$$

Quindi il campo elettrico equivalente è

$$E = -\omega B r$$

e la differenza di potenziale tra C_2 e C_1 è

$$V = - \int_0^{r_0} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \omega B \int_0^{r_0} r dr = \frac{\omega B r_0^2}{2} .$$

La corrente I attraverso la resistenza R è, quindi, data da

$$I = \frac{V}{R} = \frac{\omega B r_0^2}{2R} = \omega \frac{2 \text{ T} \cdot (0.5 \text{ m})^2}{2 \cdot 10 \Omega} = (5 \cdot 10^{-2}) \text{ A s}$$

2. La potenza dissipata P nella resistenza può essere scritta come

$$P = I^2 R = \frac{\omega^2 B^2 r_0^4}{4R}$$

Per condizioni stazionarie, assumiamo che $\omega = \omega_f = \text{cost}$, e avendo assunto che $I_d \ll MR^2$ (quindi trascurabile), possiamo dire che, per la conservazione dell'energia:

$$\frac{\omega^2 B^2 r_0^4}{4R} = M g r_0 \omega_f$$

quindi

$$\omega_f = \frac{4MgR}{B^2 r_0^3} = 19.6 \text{ 1/s}$$

La corrente I associata è

$$I_f = \frac{\omega_f B r_0^2}{2R} = 0.98 \text{ A} .$$

Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

13 Giugno 2018

Scritto - Onde

Esercizi:

- 1) Su una corda di densità lineare $\mu = 10 \text{ g/m}$ si propaga un'onda con velocità $v = 20 \text{ m/s}$ e ampiezza $A = 5 \text{ mm}$. Calcolare:
 - 1) nel caso in cui la frequenza dell'onda sia $\nu = 200 \text{ Hz}$, la tensione della corda e la potenza media dell'onda.
 - 2) Nel caso in cui la corda sia fissata in due punti a distanza di un metro l'uno dall'altro, calcolare la serie delle frequenze delle onde stazionarie.

- 2) Un fascio di luce, di lunghezza d'onda $\lambda = 600 \text{ nm}$, incide perpendicolarmente su un pannello in cui sono praticate due fenditure distanti $d = 0.4 \text{ mm}$. Su uno schermo posto a distanza $L = 2 \text{ m}$ si forma una figura di interferenza. Se una delle due fenditure viene chiusa, l'intensità al centro dello schermo è $I_0 = 4 \text{ W/m}^2$. Determinare (nella situazione in cui entrambe le fenditure sono aperte):
 - 1) la distanza tra due massimi d'interferenza consecutivi;
 - 2) l'intensità I_y risultante sullo schermo a distanza $y = 5.4 \text{ mm}$ dall'asse del sistema.

Domande:

- 1) Definire l'impedenza in generale e discutere almeno una relazione in cui compare l'impedenza.
- 2) Discutere l'effetto Doppler.
- 3) Discutere la polarizzazione delle onde elettromagnetiche.

Costanti: $v_{\text{suono}} = 340 \text{ m/s}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. La tensione della corda deriva dalla relazione conosciuta

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \longrightarrow T = \mu v^2 = 4 \cdot 10^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{m}} = 4 \text{ N}$$

La potenza media è definita come

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{2} \mu v A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \mu v A^2 4\pi^2 \nu^2 = \\ &= 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 25 \cdot 10^{-6} \text{m}^2 \pi^2 4 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{s}^2} = 394.78 \text{ W} \end{aligned}$$

2. Abbiamo $L = 1 \text{ m}$, allora le frequenze armoniche dell'onda stazionaria in questione sono

$$\nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Quella fondamentale, con $n = 1$, sarà quindi

$$\nu_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 10^2 \text{ Hz}$$

Mentre la seconda armonica è

$$\nu_2 = \frac{2}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 2 \cdot \nu_1 = 200 \text{ Hz} \quad \text{ovvero proprio quella indicataci dal testo.}$$

2) 1. Per il fenomeno di interferenza sappiamo che

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad \text{dove } \delta \text{ è lo sfasamento tra le due sorgenti.}$$

Nel nostro caso, $L \gg d$, quindi possiamo usare la seguente approssimazione dello sfasamento:

$$\delta \simeq \frac{2\pi d}{\lambda L} x$$

Per i massimi di interferenza è $\delta = n2\pi$.

Quindi:

$$\frac{2\pi d}{\lambda} x = n2\pi$$

Allora le posizioni dei massimi sono

$$x = \frac{n\lambda L}{d}$$

Per $n = 1$, abbiamo

$$x_1 = \frac{\lambda L}{d} = \frac{6 \cdot 10^2 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 2 \text{ m}}{4 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 3 \text{ mm}$$

Quindi la distanza tra due massimi consecutivi è 3 mm.

2. Come abbiamo già detto precedentemente:

$$I_y = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta_y}{2} \quad \text{dove, in questo caso, lo sfasamento è da calcolare nel punto } y \text{ sullo schermo dato dal testo.}$$

$$\delta_y = \frac{2\pi d}{\lambda} y = \frac{2\pi}{6 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \frac{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}}{2 \text{ m}} 5.4 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 11.31$$

$$I_y = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta_y}{2} = 4 \cdot 4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cos^2 \left(\frac{11.31}{2} \right) = 16 \cdot 0.99 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Fisica Generale T2 - Prof. M. Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

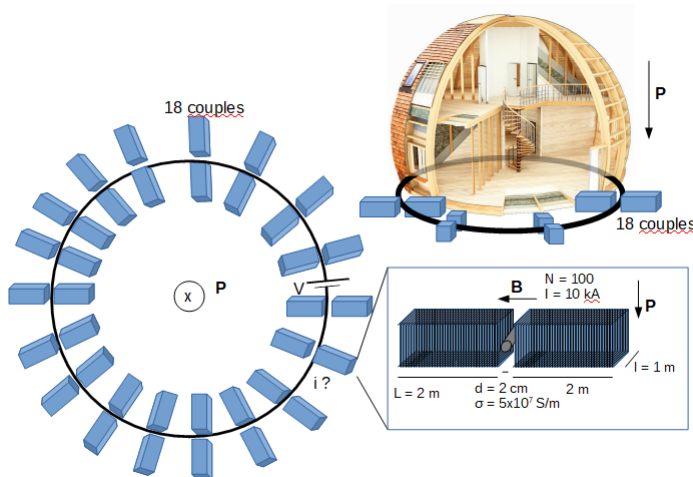
10 Luglio 2018

Elettromagnetismo

Esercizi:

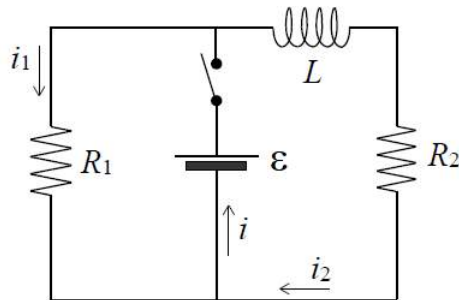
1) Una casa a pianta circolare di massa $M = 100\text{ t}$ e raggio $R = 15\text{ m}$ è tenuta sospesa da $n = 18$ coppie di magneti solenoidali e da un robusto anello di acciaio che corre sotto la casa e in mezzo ai magneti come in figura. Ogni coppia di magneti è da considerare ideale. I due magneti sono abbastanza vicini da evitare dispersioni significative del campo. Ciascun magnete, lungo $L = 2\text{ m}$, è composto $N = 100$ spire quadrate di lato $l = 1\text{ m}$ in cui scorre una corrente $I = 10\text{ kA}$.

- Calcolare il campo magnetico B prodotto dai magneti.
- Calcolare la corrente i che deve passare nell'anello affinché la casa resti in equilibrio.
- Calcolare la f.e.m che deve essere fornita all'anello per ottenere questa corrente, sapendo che l'anello ha una sezione di diametro $d = 2\text{ cm}$ e una resistività $\rho = 2 \times 10^{-8}\ \Omega\text{ m}$.
- Calcolare la potenza dissipata nell'anello.
- Calcolare il campo magnetico prodotto al centro dell'anello, nella condizione di equilibrio.



2) Nel circuito mostrato in figura si ha: $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 2R_1$, $L = 3\ \text{H}$, $\epsilon = 9\ \text{V}$.
Si ricavi il valore, sia immediatamente dopo la chiusura del circuito sia durante la fase di regime, delle seguenti quantità:

- 1) le tre intensità di corrente i , i_1 e i_2 ;
- 2) la tensione ai capi della resistenza R_2 ;
- 3) la tensione ai capi dell'induttanza L ;
- 4) la derivata temporale della corrente i_2 .



Domande:

- 1) Descrivere il principio di funzionamento di una dinamo (spira rotante in un campo magnetico costante).
- 2) Definire la pressione magnetostatica e fare qualche esempio.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Negli esercizi occorre spiegare i passi principali che conducono alle soluzioni.

Nel caso servano, si usino i valori $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{Nm}^2)$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{N/A}^2$

Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

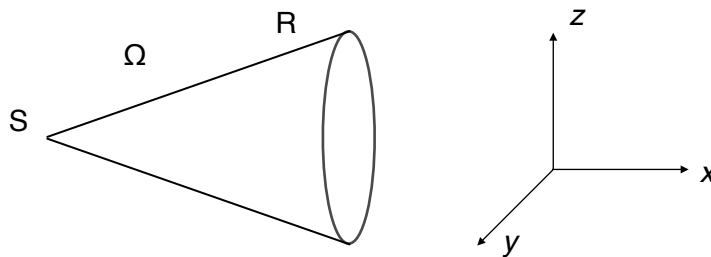
10 Luglio 2018

Scritto - Onde

Esercizi:

- 1) Un'onda armonica viaggia lungo una corda lunga $L = 30$ m e di massa m . Questa è tenuta tesa da una forza di modulo $F = 150$ N. L'ampiezza dell'onda è $A = 4$ cm, la velocità di propagazione è $v = 60$ m/s e il periodo di oscillazione è $T = 0,2$ s.
Calcolare:
 - 1) la massa della corda;
 - 2) la lunghezza d'onda e la frequenza dell'onda lungo la corda;
 - 3) la potenza media \bar{P} trasmessa dalla corda.

- 2) Un laser He-Ne emette luce rossa, polarizzata linearmente nella direzione verticale, con $\lambda = 632,8$ nm, potenza media $\bar{P} = 10$ W. Supponendo la sorgente puntiforme e che il fascio attraversi uniformemente una calotta sferica di angolo solido $\Omega = 5 \cdot 10^{-2}$,
 - 1) scrivere l'espressione del campo \vec{E} e del campo \vec{B} a $R = 20$ m dalla sorgente lungo l'asse del fascio (asse x, vedi figura).
 - 2) Determinare la potenza di una sorgente che irradia isotropicamente tutto lo spazio affinché abbia alla distanza di $R = 20$ m la stessa intensità del laser.



Domande:

- 1) Descrivere brevemente il fenomeno dell'interferenza.
- 2) Spiegare il fenomeno dei battimenti.
- 3) Definire il vettore di Poynting e il suo significato.

Costanti: $v_{\text{suono}} = 340$ m/s , $g = 9.8$ m/s² .

Svolgimenti e soluzioni:

1) 1. La relazione tra la velocità di propagazione e la tensione della corda è

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{dove} \quad \mu = \frac{m}{L}$$

$$\text{allora} \quad m = \frac{F}{v^2} L = \frac{150 \text{ N}}{3600 \text{ m}^2/\text{s}^2} \cdot 30 \text{ m} = 1,25 \text{ kg}$$

2. La lunghezza d'onda è data da

$$\lambda = v T = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,2 \text{ s} = 12 \text{ m}$$

3. Conoscendo il periodo di oscillazione, possiamo ricavare immediatamente la frequenza dell'onda

$$\nu = \frac{1}{T} = 5 \text{ Hz}$$

4. La potenza media è definita come

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{E}{F} = \frac{1}{2} \mu v A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{L} v A^2 4\pi^2 \nu^2 = \\ &= \frac{1,25 \text{ kg}}{30 \text{ m}} \cdot 60 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 2\pi^2 \cdot 25 \frac{1}{\text{s}^2} = 1,97 \text{ W} \end{aligned}$$

2) 1. La superficie della calotta sferica attraversata è data da

$$\Sigma = \Omega R^2 = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^2 \text{ m}^2 = 20 \text{ m}^2$$

Allora, l'intensità, conoscendo la potenza media e la superficie attraversata, è data da

$$I = \frac{\bar{P}}{\Sigma} = \frac{10 \text{ W}}{20 \text{ m}^2} = 0,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Inoltre, sappiamo che $I = \frac{E_0^2}{2Z_0}$, quindi

$$E_0 = \sqrt{2 I Z_0} = \sqrt{2 \cdot 0,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 377 \Omega} = 19,42 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Sapendo che

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{19.42 \text{ V/m}}{3 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}} = 6.47 \cdot 10^{-8} \text{ T}$$

Per scrivere le espressioni del campo elettrico e magnetico, ci servono anche:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 9.8 \cdot 10^9 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}}{6328 \cdot 10^{-10} \text{ m}} = 4.74 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2.98 \cdot 10^{15} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ora che abbiamo trovato tutte le caratteristiche, possiamo scrivere le espressioni dei campi:

$$\vec{E} = 19.4 \cos(2.98 \cdot 10^{15}t - 9.9 \cdot 10^{15} \cdot 20)\hat{u}_y \simeq 19.4 \cos(2.98 \cdot 10^{15}t - 2 \cdot 10^{11})\hat{u}_y$$

$$\vec{B} = 6.5 \cdot 10^{-5} \cos(2.98 \cdot 10^{15}t - 2 \cdot 10^{11})\hat{u}_z$$

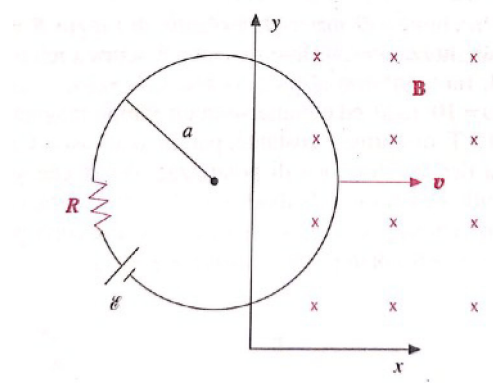
2. Se la sorgente è isotropica, allora $\Sigma = 4\pi R^2$.

$$I_L = \frac{\bar{P}_L}{\Sigma} = \frac{\bar{P}_{\text{iso}}}{\Sigma_{\text{iso}}}$$

$$\bar{P}_{\text{iso}} = \frac{\Sigma_{\text{iso}}}{\Sigma} \bar{P}_L = \frac{4\pi R^2}{\Omega R^2} \bar{P}_L = 2.51 \cdot 10^3 \text{ W}$$

$+ \delta = 2.5 \text{ protoni cm}^{-3}$
 $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
 $\Phi = 10^8 \text{ protoni cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

$R = 20 \Omega$,
 $f = 2 \text{ V}$
 $a = 20 \text{ cm}$,
 $v = 20 \text{ m/s}$
 $B = 0.25 \text{ T}$
 $x \geq 0$ $x < 0$



4
 4
 4
 5
 6 78
 9

$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N s}^2/\text{C}^2$

Fisica Generale T2 - Prof. Mauro Villa

CdL in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

06 Settembre 2018

Scritto - Onde

Esercizi:

- 1) Si consideri una corda con densità di massa $\mu = 5 \cdot 10^{-2}$ kg/m, sotto una tensione $T = 80$ N, percorsa da onde sinusoidali con frequenza di 60 Hz e ampiezza di 6 cm. Determinare:
 - 1) la velocità di propagazione delle onde;
 - 2) quanta potenza viene generata;
 - 3) la nuova ampiezza dell'onda, se la nuova potenza è 1000 W e tutti gli altri parametri rimangono invariati.

- 2) Il campo magnetico di un'onda elettromagnetica piana polarizzata linearmente lungo l'asse y si propaga lungo x in un mezzo con $\epsilon_r = 80$ secondo l'equazione:

$$\vec{B} = 1.8 \cdot 10^{-6} \cos(8 \cdot 10^7 t - 4x + \phi) \vec{k}$$

Il modulo di \vec{B} è misurato in tesla. Determinare:

- 1) ϕ sapendo che per $t = 0$ e $x = 0$, $B = 0.8 \cdot 10^{-6}$ T;
- 2) la frequenza, la lunghezza d'onda e l'ampiezza di \vec{E} ;
- 3) l'impedenza d'onda Z .

Domande:

- 1) Descrivere brevemente l'effetto Doppler.
- 2) Spiegare il fenomeno dell'interferenza e l'esperimento di Young.
- 3) Illustrare le differenze principali tra onde piane e onde sferiche.

Costanti: $v_{\text{suono}} = 340$ m/s , $g = 9.8$ m/s² .