Primo parziale di Fisica Generale TA (LA)

INGEGNERIA CIVILE (A-K)

(prof. M. Villa)

14/04/2010

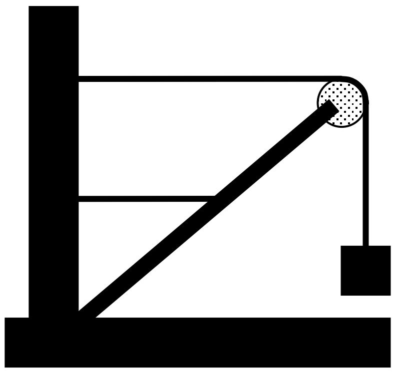
Compito A

Esercizi:

1. La posizione di un punto materiale è individuata dal vettore posizione $\vec{r}(t) = 3t^3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2t^2\hat{k} \quad (m)$ con $t > 0$ espresso in secondi. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante di tempo ed il raggio di curvatura della traiettoria per *t=0,5 s.*

2. Un corpo che si muove lungo una traiettoria rettilinea ha una accelerazione esprimibile come: $a_x(t) = bt^2$ con b=2m/s^4. Sapendo che al tempo pari a t=1s, il corpo si trova in x=30 m con velocità pari a 5 m/s, trovare la posizione e la velocità al tempo t=3 s.

3. Un sistema di sollevamento pesi è costituito da una sbarra inclinabile lunga L che termina in una carrucola (ideale, libera di ruotare senza attrito), un filo che sostiene il peso che passando per la carrucola arriva su una superficie verticale ed un secondo filo che collega direttamente il centro della sbarra con la superficie verticale. Sapendo che in un certo istante, il sistema solleva una massa M=20 kg, che L=3m, che i due fili collegati alla parete verticale sono perfettamente orizzontali e che la sbarra (ideale e senza massa) è inclinata di 30° rispetto ad una direzione orizzontale, trovare le due reazioni vincolari sulla parete verticale e la reazione vincolare sul piano di appoggio, quando il sistema è in condizioni statiche.



Domande:

1. Spiegare la legge d'inerzia.
2. Illustrare le caratteristiche principali del moto armonico.
3. Un grave di massa M in caduta libera in un liquido viscoso ha una forma così particolare che si esercita una forza d'attrito di modulo $\left|\vec{F}\right| = \alpha v^2$ e direzione opposta alla velocità, con $\vec{v}$ velocità del punto e α una costante. Sapendo che la velocità di caduta raggiunge un valore limite costante v_L, determinare quali, tra le seguenti formule, è fisicamente accettabile per v_L: $a)\ v_L = Mg/\alpha$ $\quad b)\ v_L = M\alpha/g$ $\quad c)\ v_L = \alpha g/M$ $\quad d)\ v_L = \sqrt{Mg/\alpha}$

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\, m/s^2$

Primo parziale di Fisica Generale TA (LA)

INGEGNERIA CIVILE (A-K)

(prof. M. Villa)

14/04/2010

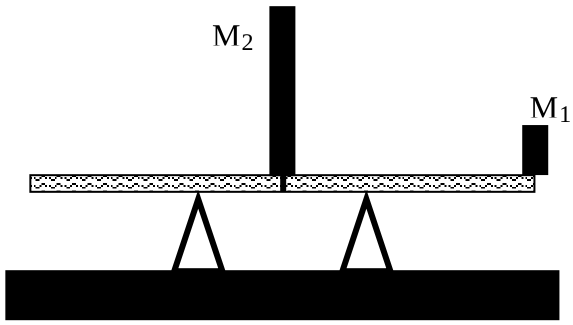
Compito B

Esercizi:

1. La posizione di un punto materiale è individuata dal vettore posizione $\vec{r}(t) = \hat{\imath} + (1 - \cos\omega t)\,\hat{\jmath} + \sin\omega t\hat{k}\quad (m)$ con t espresso in secondi e $\omega = 3s^{-1}$. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante di tempo. Verificare che il raggio di curvatura della traiettoria è costante e trovarne il valore.

2. Un autobus parte da una fermata con una accelerazione costante pari a a=0,5 m/s^2 fino a raggiungere una velocità pari a 36 km/h. In prossimità della fermata successiva rallenta con un'accelerazione costante pari ad a=-0.5m/s^2 fino a fermarsi completamente. Sapendo che le due fermate distano D=1 km, quanto tempo ha impiegato l'autobus a raggiungere la fermata successiva? Qual'e' stata la velocità media?

3. Due pesi, di massa M_1=10 kg e M_2= $3M_1$ sono appoggiati su una sbarra ideale senza massa di lunghezza L=3m. Sapendo che la massa maggiore è appoggiata nel centro della sbarra, quella minore su un estremo, e che la sbarra è appoggiata su due sostegni posti ad 1m dalle due estremità, determinare se il sistema può essere in condizioni di equilibrio stabile ed in tal caso le reazioni vincolari dovute ai sostegni.



Domande:

1. Spiegare le condizioni in cui un corpo esteso è in condizioni statiche
2. Cos'è un vincolo? Cos'è una reazione vincolare?
3. La rotazione terrestre rende il sistema di riferimento terrestre solo approssimativamente inerziale. A causa dell'accelerazione di trascinamento la forza sentita dai corpi sulla superficie terrestre non è esattamente verticale. Questo porta un filo a piombo a non puntare esattamente verso il centro della terra. Rispetto ad una direzione verticale il filo a piombo si discosta di una quantità δ che può essere espressa in termini dell'accelerazione di gravità $\vec{g}$, della velocità angolare terrestre $\vec{\omega}$ e del raggio R della Terra. Tra le possibili forme, indicare quella *presumibilmente* corretta dal punto di vista dimensionale per un corpo a 45° di latitudine:

   $a)\ \delta = \sqrt{2}\omega R / g \qquad b)\ \delta = \omega^2 R/(g\sqrt{2}) \quad c)\ \delta = \omega^2 g/(R\sqrt{2}) \qquad d)\ \delta = \sqrt{2}g^2 R/\omega$

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\,m/s^2$

Primo parziale di Fisica Generale TA (LA)

INGEGNERIA CIVILE (A-K)

(prof. M. Villa)

14/04/2010

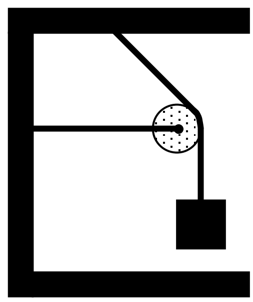
Compito C

Esercizi:

1. La posizione di un punto materiale è individuata dal vettore posizione $\vec{r}(t) = R\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\hat{\imath} + Re^{-t/\tau}\hat{\jmath} + R\hat{k}$ (m) con t espresso in secondi, τ=5s e R=3m. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante di tempo. Dimostrare che la traiettoria è rettilinea e trovare la legge oraria s(t).

2. Un corpo che si muove lungo una traiettoria curva ha una accelerazione tangenziale esprimibile come: $\ddot{s}(t) = a_o \sin(\omega t)$ con $a_o = 2m/s^2, \omega = 0,5s^{-1}$. Sapendo che all'istante iniziale la posizione del corpo è nell'origine del sistema di coordinate curvilinee con velocità nulla, trovare la sua posizione e la sua velocità dopo un tempo pari a 5 s.

3. Un peso di massa M_1=50 kg è sostenuto da un filo ideale che, passando per una carrucola ideale senza massa è collegato al soffitto. Sapendo che il filo arriva al soffitto facendo un angolo di 45° rispetto alla verticale, determinare le reazioni vincolari sul soffitto e sulla carrucola.



Domande:

1. Spiegare le caratteristiche principali del modello del filo in estensibile. In quali condizioni è utile tale modello?
2. Cos'è una forza? Da quali caratteristiche può essere definita?
3. Un pendolo balistico è un sistema in grado di misurare la velocità di un proiettile di massa m, fermandolo in un oggetto di massa M appeso ad un filo lungo L (pendolo). L'altezza h raggiunta dal pendolo fornisce una misura della velocità del proiettile. Sulla base dell'analisi dimensionale, trovare quale relazione può valere in questo sistema:

$a)\ v = M\sqrt{3gh/m}$ $\quad b)\ v = Mg\sqrt{h/m}$ $\quad c)\ v = \frac{M}{m}\sqrt{2gh}$ $\quad d)\ v = \frac{2g}{h}\sqrt{Mm}$

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9,8\,m/s^2$

Primo parziale di Fisica Generale TA (LA)

INGEGNERIA CIVILE (A-K)

(prof. M. Villa)

14/04/2010

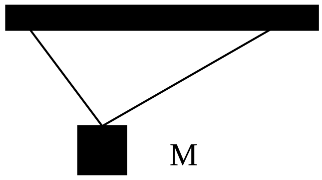
Compito D

Esercizi:

1. La posizione di un punto materiale è individuata dal vettore posizione $\vec{r}(t) = t^3\hat{\imath} + t\hat{\jmath} + \frac{1}{\lambda + t^2}\hat{k}$ (m) con t espresso in secondi e λ parametro noto e positivo. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante di tempo. Trovare il raggio di curvatura per t=0 s.

2. Un corpo che si muove lungo una traiettoria rettilinea ha una accelerazione esprimibile come: $a_x(t) = bt$ con b=2m/s^3 . Sapendo che all'istante iniziale la posizione del corpo è nell'origine del sistema di coordinate con velocità nulla, trovare la sua posizione e la sua velocità dopo un tempo pari a 10 s.

3. Un peso di massa M=10 kg è sostenuto da due funi (ideali) di lunghezza L_1=3 m e L_2=4 m agganciate al soffitto in due punti distanti D=5 m. Trovare le tensioni delle funi e le reazioni vincolari del soffitto.



Domande:

1. Cos'è una grandezza fisica? Quali sono le grandezze fondamentali in meccanica?
2. Spiegare il secondo principio della meccanica.
3. Lo spazio L che è necessario ad un auto per fermarsi dipende dalla sua velocità (v), dall'accelerazione di gravità g e da un numero adimensionale che misura quanto è scivolosa la strada (μ). Determinare quale formula è accettabile:

$$a) L = \mu g v \qquad b)\ L = \sqrt{2\mu g / v} \qquad c)\ L = \sqrt{v/(\mu g)} \qquad d)\ L = \frac{v^2}{2\mu g}$$

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\, m/s^2$

Primo parziale di Fisica Generale TA (LA)

INGEGNERIA CIVILE (A-K)

(prof. M. Villa)

14/04/2010

Soluzioni Compito A

Es 1. $a)\ \vec{v}(t) = 9t^2\hat{\imath} + 4t\hat{k} \quad (m/s) \qquad b)\ \vec{a}(t) = 18t\hat{\imath} + 4\hat{k} \quad (m/s^2) \qquad c)\ R = 3m$

Es 2. $a)\ x(3s) = 52\ m \qquad b)\ v(3s) = 22,3\ m/s$

Es 3.
$a)\ \vec{R}_1 = -Mg\hat{\imath}$ (reazione vincolare superiore) $\quad b)\ \vec{R}_2 = -2Mg(\sqrt{3}-1)\hat{\imath}$ (reazione vincolare centrale)
$c)\vec{R}_3 = Mg(2\sqrt{3}-1)\hat{\imath} + Mg\hat{\jmath}$ (reazione piano appoggio)

D3: Risposta esatta d

Soluzioni Compito B

Es 1. $a)\ \vec{v}(t) = \omega\sin\omega t\hat{\jmath} + \omega\cos\omega t\hat{k} \quad (m/s) \quad b)\ \vec{a}(t) = \omega^2\cos\omega t\hat{\jmath} - \omega^2\sin\omega t\hat{k} \quad (m/s^2) \quad c)\ R = 1m$

Es 2. $a)\ T = 120\ s \qquad b)\ \bar{v} = 8,33\ m/s$

Es 3. $a)\ \vec{R}_{SX} = \frac{1}{2}M_1 g\hat{\jmath} = 49N\hat{\jmath}$ (reaz. vinc. sinistra) $\quad b)\ \vec{R}_{DX} = \frac{7}{2}M_1 g\hat{\jmath} = 343N\hat{\jmath}$ (reaz. vinc. destra)

D3: Risposta esatta b

Soluzioni Compito C

Es 1. $a)\ \vec{v}(t) = \frac{R}{\tau}e^{-t/\tau}\hat{\imath} - \frac{R}{\tau}e^{-t/\tau}\hat{\jmath} \quad (m/s) \quad b)\ \vec{a}(t) = -\frac{R}{\tau^2}e^{-t/\tau}\hat{\imath} + \frac{R}{\tau^2}e^{-t/\tau}\hat{\jmath} \quad (m/s^2)$
$c)\ \vec{v}(t)$ è un vettore di direzione costante ; s(t)=$\sqrt{2}R(1-e^{-t/\tau})$

Es 2. $a)\ v(T) = \frac{a_o}{\omega}(1-\cos\omega T) = 7,2m/s \qquad b)\ s(T) = \frac{a_o}{\omega}(T - \frac{1}{\omega}\sin\omega T) = 15,2m$

Es 3. $a)\ \vec{R}_{Soff} = M_1 g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\jmath}\right) \quad b)\ \vec{R}_{Carr} = M_1 g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\imath} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\hat{\jmath}\right)$

D3: Risposta esatta c

Soluzioni Compito D

Es 1. $a)\ \vec{v}(t) = 3t^2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \frac{2t}{\left(\lambda+t^2\right)^2}\hat{k} \quad (m/s) \quad b)\ \vec{a}(t) = 6t\hat{\imath} - \frac{2\lambda-6t^2}{\left(\lambda+t^2\right)^3}\hat{k} \quad (m/s^2)$
$c)R = \frac{1}{2}\lambda^2$

Es 2. $a)\ v(10s) = 100\ m/s \qquad b)\ x(10s) = 333m$

Es 3. $a)\ T_{SX} = 78,6N$ (tensione sinistra) $\quad b)\ T_{DX} = 58,8N$ (tensione destra)

D3: Risposta esatta d

Esame scritto di Fisica Generale LA, TA
SECONDO PARZIALE

INGEGNERIA CIVILE (A-K)

prof M. Villa

14/06/2010

(1)

Esercizio 1: Un'asta, di massa M e lunghezza L, ha una densità variabile come $\lambda(x) = \lambda_0 (3L + x)/L$, con 0<x<L. Calcolare: 1) la posizione del centro di massa e 2) il momento d'inerzia rispetto ad un'asse di rotazione coincidente con l'asse z che passa per l'estremo della sbarra meno denso. Se la sbarra ruota con una velocità angolare ω costante (in un piano orizzontale), trovare il modulo della reazione vincolare.

Esercizio 2: Sia dato un punto materiale di massa M su cui agisce una forza conservativa di energia potenziale: $V(x, y, z) = \alpha x^4 + \beta y^2 z^2$. Sapendo che le costanti α e β sono positive, che il punto è inizialmente in P(0,L,L) con velocità nulla, determinare: 1) l'espressione della forza; 2) le dimensioni e le unità di misura delle costanti α e β; 3) la velocità del corpo quando passa per l'origine delle coordinate.

Esercizio 3: Un carrello di massa M , libero di muoversi su un binario rettilineo (diretto lungo l'asse x), ma inizialmente fermo, è colpito da un proiettile di massa m=M/20 che viaggia con velocità v diretto lungo l'asse x. Nell'ipotesi di un urto totalmente anelastico, determinare: 1) la velocità del centro di massa dopo l'urto e 2) l'energia persa.

Domande:

1) Enunciare e spiegare il significato della seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi.
2) Definire il momento di inerzia e discuterlo.

Esame scritto di Fisica Generale LA, TA
SECONDO PARZIALE

INGEGNERIA CIVILE (A-K)

prof M. Villa

14/06/2010

(2)

Esercizio 1: Un'asta, di massa M=4 kg e lunghezza L=1m, è incernierata ad un estremo e giace in quiete su un piano orizzontale liscio. Ad un certo punto, per un periodo di tempo di 1s agisce un momento delle forze di 3 Nm in direzione perpendicolare al piano. Determinare: 1) momento d'inerzia della sbarra; 2) velocità angolare al termine dell'azione del momento delle forze, 3) modulo della reazione vincolare dopo l'azione del momento delle forze.

Esercizio 2: Sia dato un punto materiale di massa M su cui agisce una forza di espressione: $\vec{F}(x,y,z) = \alpha x\hat{\imath} - \beta z\hat{\jmath} + \alpha y\hat{k}$. Sapendo che la costante α è positiva, che il punto è inizialmente in P(L,L,0) con velocità v, determinare: 1) le condizioni per le quali la forza è conservativa, 2) l'espressione dell'energia potenziale; 3) le dimensioni e le unità di misura della costante α.

Esercizio 3: Un carrello di massa M , libero di muoversi su un binario rettilineo (diretto lungo l'asse x), ma inizialmente fermo, è colpito da un proiettile di massa m=M/30 che viaggia con velocità v diretto lungo l'asse x. Nell'ipotesi di un urto totalmente elastico, determinare le velocità del carrello e del punto dopo l'urto.

Domande:

1) Descrivere il moto di un pendolo semplice in regime di piccole oscillazioni.

2) Enunciare e spiegare il secondo teorema del centro di massa.

Esame scritto di Fisica Generale LA, TA

INGEGNERIA CIVILE (A-K)

prof M. Villa

14/06/2010

(1)

Esercizio 1: Un'asta, di massa M e lunghezza L, ha una densità variabile come $\lambda(x) = \lambda_0 (3L + x)/L$, con 0<x<L. Calcolare: 1) la posizione del centro di massa ed 2) il momento d'inerzia rispetto ad un'asse di rotazione coincidente con l'asse z che passa per l'estremo della sbarra meno denso. Se la sbarra ruota con una velocità angolare ω costante (in un piano orizzontale), trovare il modulo della reazione vincolare.

Esercizio 2: Sia dato un punto materiale di massa M su cui agisce una forza conservativa di energia potenziale: $V(x, y, z) = \alpha x^4 + \beta y^2 z^2$. Sapendo che le costanti α e β sono positive, che il punto è inizialmente in P(0,L,L) con velocità nulla, determinare: 1) l'espressione della forza; 2) le dimensioni e le unità di misura delle costanti α e β; 3) la velocità del corpo quando passa per l'origine delle coordinate.

Esercizio 3: Un carrello di massa M , libero di muoversi su un binario rettilineo (diretto lungo l'asse x), ma inizialmente fermo, è colpito da un proiettile di massa m=M/20 che, partendo da fermo si è mosso lungo l'asse x sottoposto ad una forza F costante per un periodo di T secondi prima dell'urto. Trovare la velocità del proiettile prima dell'urto. Nell'ipotesi di un urto totalmente anelastico, determinare la velocità del centro di massa dopo l'urto e l'energia persa.

Domande:

1) Enunciare e spiegare il significato della seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi.
2) Definire il momento di inerzia e discuterlo.
3) Spiegare le leggi della statica.

Esame scritto di Fisica Generale LA, TA

INGEGNERIA CIVILE (A-K)

prof M. Villa

14/06/2010

(2)

Esercizio 1: Un'asta, di massa M=4 kg e lunghezza L=1m, è incernierata ad un estremo e giace in quiete su un piano orizzontale liscio. Ad un certo punto, per un periodo di tempo di T=1s agisce un momento delle forze di modulo $\left|\vec{M}^{EST}\right| = 3Nm$ in direzione perpendicolare al piano. Determinare: 1) momento d'inerzia della sbarra; 2) velocità angolare al termine dell'azione del momento delle forze, 3) modulo della reazione vincolare dopo l'azione del momento delle forze.

Esercizio 2: Sia dato un punto materiale di massa M su cui agisce una forza conservativa di espressione: $\vec{F}(x,y,z) = \alpha x\hat{\imath} - \beta z\hat{\jmath} + \alpha y\hat{k}$. Sapendo che la costante α è positiva, che il punto è inizialmente in P(L,L,0) con velocità v, determinare: 1) le condizioni per le quali la forza è conservativa, 2) l'espressione dell'energia potenziale; 3) le dimensioni e le unità di misura della costante α; 4) la velocità del corpo deve avere inizialmente per poter raggiungere l'origine delle coordinate.

Esercizio 3: Un carrello di massa M, libero di muoversi su un binario rettilineo ruvido (diretto lungo l'asse x), ma inizialmente fermo, è colpito da un proiettile di massa m=M/30 che viaggia con velocità v diretto lungo l'asse x. Nell'ipotesi di un urto totalmente elastico, determinare le velocità del carrello e del punto dopo l'urto. Sapendo che il coefficiente di attrito cinetico tra carrello e binario è μ_D, trovare lo spazio percorso dal carrello.

Domande:

1) Descrivere il moto di un pendolo semplice in regime di piccole oscillazioni.

2) Enunciare e spiegare il secondo teorema del centro di massa.

3) Discutere l'espressione dell'accelerazione in coordinate intrinseche

Traccia delle soluzioni al compito (1)

Es 1: Occorre esprimere la massa in termini di densità lineare, quindi calcolare massa, centro di massa e momento d'inerzia. La sbarra può essere considerata un sistema rigido soggetto solo alla forza vincolare. La reazione vincolare si trova calcolando l'accelerazione del centro di massa.

$$M = \int_0^L \lambda(x)dx = \frac{7}{2}\lambda_0 L \qquad x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda(x)dx = \frac{11}{21}L$$

$$I = \int_0^L x^2\lambda(x)dx = \frac{5}{4}\lambda_0 L^3 = \frac{10}{28}ML^2$$

$$\left|\vec{R}_v\right| = M\left|\vec{a}_{CM}\right| = M\omega^2 x_{CM} = \frac{11}{21}M\omega^2 L$$

Es 2: Una forza è conservativa solo se è irrotazionale. Imponendo che il rotore sia nullo si trova una condizione sulle costanti α e β. In queste condizioni è possibile calcolare il potenziale. La velocità all'origine è calcolabile facilmente richiedendo la conservazione dell'energia meccanica. Non serve risolvere completamente l'equazione del moto.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \beta = -\alpha$$

$$V(x,y,z) = -\alpha\frac{x^2}{2} - \alpha yz$$

$$[\alpha] = [\beta] = \left[MT^{-2}\right], \quad unità \quad kg/s^2$$

$$E_{in} = E_{fin} \Rightarrow -\alpha L^2/2 + \frac{1}{2}Mv^2 = 0 \Rightarrow v = L\sqrt{\frac{\alpha}{M}}$$

Es. 3. L'accelerazione media si trova come forza diviso massa ed è costante. La velocità alla fine dell'accelerazione e' pari a tempo per accelerazione. Nell'urto si conserva la quantità di moto, che per il primo teorema del centro di massa può essere espressa come massa del sistema per velocità del centro di massa. Visto che l'urto è anelastico la velocità del centro di massa è comune ai due punti e quindi è possibile calcolare l'energia finale. L'energia persa e' pari all'energia finale meno quella iniziale.

$$a = \frac{F}{m} \quad v = \frac{F}{m}T$$

$$Q_{in} = mv = FT = Q_{fin} = (m+M)v_{CM} = \frac{21}{20}Mv_{CM} \quad \Rightarrow v_{CM} = \frac{20FT}{21M}$$

$$E_{in} = \frac{1}{2}mv^2 \quad E_{fin} = \frac{1}{2}(m+M)v_{CM}^2 \Rightarrow \Delta E = E_{fin} - E_{in} = -\frac{200}{21}\frac{F^2T^2}{M}$$

Traccia delle soluzioni al compito (2)

Es 1: Occorre calcolare il momento d'inerzia per un asse che si trova ad una distanza L/2 dal centro di massa. Possiamo usare il teorema di Huygens-Steiner. L'azione del momento di forza costante imprime un'accelerazione angolare costante per un tempo fissato. Visto che la sbarra parte da ferma la velocità angolare al termine è calcolabile come accelerazione angolare per tempo. Dopo l'azione del momento delle forze non vi sono più momenti esterni e la sbarra si muove di moto rotatorio uniforme. Il centro di massa si muove di moto circolare. Il vincolo fornisce l'unica forza esterna che (secondo teorema del centro di massa) è collegabile all'accelerazione del CM.

$$I = I_{CM} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 = 3.33kgm^2$$

$$I\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}^{EST} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \frac{\vec{M}^{EST}}{I} \Rightarrow \vec{\omega}(t) = \vec{\omega}(0) + \frac{\vec{M}^{EST}}{I}t \Rightarrow \omega(T) = \frac{M^{EST}}{I}T = 2,25s^{-1}$$

$$\left|\vec{R}_v\right| = M\left|\vec{a}_{CM}\right| = M\omega^2 L/2 = \frac{81}{8}N = 10,1N$$

Es 2: Data l'energia potenziale possiamo calcolare la forza come meno gradiente dell'energia potenziale. La velocità all'origine è calcolabile facilmente richiedendo la conservazione dell'energia meccanica. Non serve risolvere completamente l'equazione del moto.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -4\alpha x^3\hat{\imath} - 2\beta yz^2\hat{\jmath} - 2\beta y^2 z\hat{k}$$

$$[\alpha] = [\beta] = \left[ML^{-2}T^{-2}\right], \quad unità \quad kg/m^2/s^2$$

$$E_{in} = E_{fin} \Rightarrow \beta L^4 = \frac{1}{2}Mv^2 \Rightarrow v = L^2\sqrt{\frac{2\beta}{M}}$$

Es. 3. L'urto è collineare ed elastico. Imponendo la conservazione della quantità di moto e l'energia si trovano due equazioni nelle due incognite velocità del punto e del carrello dopo l'urto. Nell'urto il carrello acquista una energia cinetica che disperde a causa dell'attrito. Tutta l'energia cinetica è persa in lavoro della forza d'attrito. Poiche' questa forza è costante, è possibile determinare la lunghezza del percorso fatto dal carrello senza passare per l'equazione del moto.

$$v_p = -\frac{29}{31}v \quad v_c = \frac{2}{31}v$$

$$Q_{in} = mv = FT = Q_{fin} = (m+M)v_{CM} = \frac{21}{20}Mv_{CM} \quad \Rightarrow v_{CM} = \frac{20FT}{21M}$$

$$E_{in} = \frac{1}{2}Mv_c^2 \quad E_{fin} = 0 \Rightarrow \Delta E = E_{fin} - E_{in} = L(F_{att}) = -\mu_D Mgl \Rightarrow l = \frac{v_c^2}{2\mu_D g}$$

:

Esame scritto di Fisica Generale TA

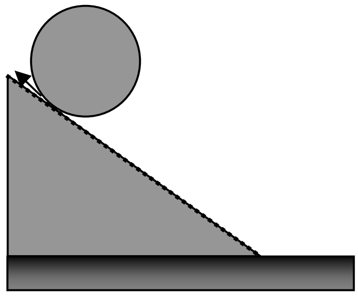
INGEGNERIA CIVILE (A-K) – Prof. M. Villa

05/07/2010

(1)

Esercizio 1: Un disco omogeneo di massa M=4 kg e raggio R=20 cm è collocato in verticale e fermo su un piano ruvido ed inclinato di 45° rispetto ad una direzione orizzontale. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra piano e disco è pari μ_D=0.2 e che all'istante t=0 s il disco è lasciato libero di muoversi ed inizia a scivolare, determinare:

1) la velocità del centro di massa al tempo t=T=1 s;
2) la velocità angolare di rotazione del disco al tempo T;
3) Il lavoro della forza d'attrito dinamico fatto tra l'inizio ed il tempo T.

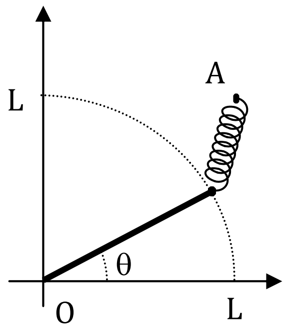


Esercizio 2: Sia dato un campo di forza la cui espressione cartesiana è data dalla relazione

$$\vec{F}(x, y, z) = -2\alpha xz\hat{\imath} - \alpha x^2\hat{k}$$

Verificare se il campo è conservativo, e in caso affermativo determinarne l'espressione della energia potenziale *V*, imponendo che essa si azzeri nel punto ***P(x, y, z)*** di coordinate (2,2,2). Determinare inoltre dimensioni ed unità di misura della costante α.

Esercizio 3: Una sbarra di massa M=3 kg e lunghezza L=0,5 m è in grado di muoversi solo in un piano verticale ed ha un estremo incernierato in O. L'altro estremo è collegato ad una molla, di costante elastica pari a k = 50 N/m e lunghezza a riposo nulla, che è fissata in un punto A del piano verticale che si trova spostato di +L a destra ed ad una quota +L più in alto del punto O. Determinare, all'equilibrio statico, l'angolo θ e la reazione vincolare in A.



Domande:

1) Illustrare il terzo principio della dinamica con alcuni esempi.

2) Definire il momento d'inerzia di un sistema di punti materiali rispetto ad un determinato asse, e discuterne le principali proprietà.

3) Formulare e discutere l'espressione della velocità di un generico punto materiale ***P*** appartenente ad un sistema rigido in moto roto-traslatorio rispetto al sistema di riferimento del laboratorio.

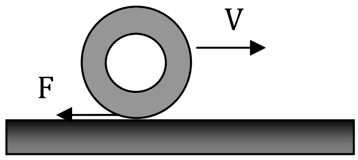
Esame scritto di Fisica Generale TA

INGEGNERIA CIVILE (A-K) - Prof. M. Villa

05/07/2010

(2)

Esercizio 1: Un cilindro cavo di massa M=3 kg, schematizzabile come un disco di raggio R=4 cm a cui è stato praticato un foro concentrico di raggio r=2 cm, è lanciato in orizzontale su un piano ruvido di coefficiente d'attrito dinamico μ_D=0.4. Nel momento del lancio, il cilindro non ruota ed inizia a strisciare sul piano, ma dopo un certo tempo, il cilindro rotola senza strisciare. Studiare il moto del cilindro durante la fase di rotolamento in presenza della forza di attrito *dinamico*, e, sapendo che la velocità iniziale è di 10 m/s, determinare in particolare:



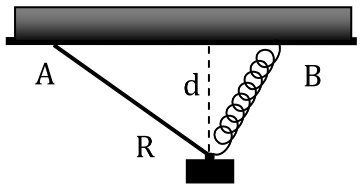
1) il momento d'inerzia del cilindro;
2) la velocità di traslazione ed angolare del cilindro quando rotola senza strisciare;
3) l'energia cinetica finale.

Esercizio 2: Sia dato un campo di forza, la cui espressione cartesiana è data dalla relazione:

$$\vec{F}(x, y, z) = -2\alpha yz\hat{j} - \alpha y^2\hat{k}$$

Verificare se il campo è conservativo, e, in caso affermativo, determinarne l'espressione dell'energia potenziale *V*, imponendo che essa si azzeri nel punto ***P(x, y, z)*** di coordinate (3,3,3). Determinare inoltre dimensioni ed unità di misura della costante α.

Esercizio 3: Un punto materiale di peso $|\vec{P}| = 6N$ è fissato al soffitto in un punto A tramite un cavo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza R = 1 m e tramite una molla di lunghezza a riposo trascurabile (l_0 = 0 m) e costante elastica k = 40 N/m collegata nel punto B. Cavo e molla sono entrambi fissati in un'estremità al soffitto (punti A e B, rispettivamente, posti a distanza R l'uno dall'altro) e nell'altra al punto materiale. Calcolare, all'equilibrio statico, la distanza *d* del punto dal soffitto e la tensione nel filo.



Domande:

1) Definire il centro di massa di un sistema di punti materiali rispetto a un determinato riferimento cartesiano, e discuterne le principali proprietà.

2) Formulare e discutere l'espressione dell'accelerazione di un generico punto materiale ***P*** appartenente ad un sistema rigido in moto roto-traslatorio rispetto al sistema di riferimento del laboratorio.

3) Illustrare il principio di funzionamento di un dinamometro come strumento per la misura delle caratteristiche vettoriali delle forze.

Esame scritto di Fisica Generale TA

INGEGNERIA CIVILE (A-K) – Prof. M. Villa

22/07/2010

(1)

Esercizio 1: Un sistema meccanico, in quiete su un piano orizzontale liscio, è composto da un disco omogeneo di spessore trascurabile, massa ***2M*** e raggio ***R***, e da un punto materiale di massa ***M***, posto a distanza ***2R*** dal centro del disco.

Calcolare le espressioni:

a) della distanza ***D*** del centro di massa del sistema dal centro del disco.

b) del momento d'inerzia $\boldsymbol{I_{CM}}$ del sistema rispetto ad un asse baricentrico perpendicolare al piano orizzontale.

Esercizio 2: Un punto materiale ***P*** di massa ***2M*** si trova nell'origine d'un sistema di riferimento cartesiano con velocità $\overline{v} = v_0\hat{\imath} + v_0\hat{\jmath}$ ed è soggetto a un campo di forza conservativo la cui energia potenziale è data dall'espressione $\boldsymbol{V}$ ***(****x,y,z****)***$= Ay^2z + Bx - C$, dove A, B e C sono costanti aventi opportune dimensioni.

Determinare le espressioni

1. del modulo dell'accelerazione tangenziale del punto ***P.***
2. del raggio di curvatura $\boldsymbol{\rho}$ della traiettoria.

Esercizio 3: Un punto materiale P di massa m è appoggiato su una piattaforma orizzontale priva d'attrito, ruotante con velocità angolare ω attorno ad un asse verticale. Sotto l'effetto della forza centrifuga, il punto P si sposta dal centro verso la periferia del disco. Calcolare il lavoro della forza centrifuga quando P passa dalla distanza r_1 alla distanza r_2 dall'asse di rotazione.

Domande:

1) Enunciare e dimostrare il teorema di König.
2) Enunciare e dimostrare il teorema delle forze vive.

Esame scritto di Fisica Generale TA

INGEGNERIA CIVILE (A-K) - Prof. M. Villa

22/07/2010

(2)

Esercizio 1: Un sistema meccanico, in quiete su un piano orizzontale liscio, è composto da una sbarra omogenea di dimensioni trasversali trascurabili, massa ***2M*** e lunghezza ***L/2***, e da due punti materiali, ciascuno di massa ***2M***, allineati con la sbarra e situati da una stessa parte rispetto a questa. Il centro ***C*** della sbarra e ciascuno dei due punti materiali sono posti a distanza ***2L*** l'uno dall'altro.

Calcolare le espressioni:

a) della distanza ***D*** del centro di massa del sistema dal centro della sbarra.

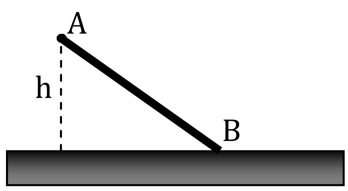
b) del momento d'inerzia I_{CM} del sistema rispetto ad un asse baricentrico perpendicolare al piano orizzontale.

Esercizio 2: Un punto materiale ***P*** di massa ***M*** si trova nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano con velocità $\bar{\vec{v}} = 2v_0\hat{\imath} + 2v_0\hat{k}$ ed è soggetto a un campo di forza conservativo la cui energia potenziale è data dall'espressione $V(x,y,z) = Ax^2y + Bz - C$, dove *A*, *B* e *C* sono costanti aventi opportune dimensioni.

Determinare le espressioni

1. del modulo dell' accelerazione tangenziale del punto ***P.***
2. del raggio di curvatura ρ della traiettoria.

Esercizio 3: Una sbarra AB di massa M=8 kg e lunghezza L=80 cm ha l'estremo A incernierato in un punto posto ad una quota h=30 cm dal pavimento ed appoggia in B sul pavimento. Determinare le reazioni vincolari in A ed in B.



Domande:

1) Enunciare e dimostrare il teorema di conservazione dell'energia meccanica.
2) Illustrare alcune conseguenze del terzo principio della dinamica.

Esame scritto di Fisica Generale TA e T1

INGEGNERIA GESTIONALE e DEI PROCESSI GESTIONALI (A-K), CIVILE, CHIMICA, MECCANICA, AMBIENTE E TERRITORIO

(proff. A. Bertin, N. Semprini-Cesari, M. Villa, A. Zoccoli e S. Zucchelli)

9/09/2010

1) Una sbarra omogenea di massa M, lunghezza R e dimensioni lineari trascurabili è appesa nel punto A che ne costituisce un estremo, ed è inizialmente in quiete e disposta verticalmente. Un punto materiale di massa m_P incognita, velocità iniziale di modulo v_P e direzione orizzontale urta istantaneamente ed elasticamente la sbarra nell'estremo inferiore B di questa. Sapendo che dopo l'urto il punto materiale procede nella stessa direzione e nello stesso verso con velocità di modulo $v = (5/7)\ v_P$, e trascurando ogni tipo di attrito determinare le espressioni:

a) della massa m_P del punto materiale in funzione di quella della sbarra M;

b) del modulo dell'accelerazione a_{CM} assunta dal centro di massa della sbarra nell'istante immediatamente successivo all'urto;

c) del modulo della reazione vincolare T immediatamente dopo l'urto.

2) Due punti materiali P_1 e P_2 aventi la stessa massa inerziale $m = 1\ g$ sono lanciati verso l'alto, in assenza di attrito, con velocità avente lo stesso modulo $v = 100\ m\ s^{-1}$, ma rispettivamente lungo la verticale (P_1) e lungo una direzione che forma un angolo di $\pi/3$ con l'orizzontale (P_2). Determinare i valori delle massime quote h_1 e h_2 raggiunte dai due punti materiali.

3) Un campo di forza è definito in tutto lo spazio dall'espressione

$$\vec{F} = (2k_1 y^2 z^3 + k_2)\hat{\imath} + 4k_1 x y z^3\,\hat{\jmath} + 6k_1 x y^2 z^2\,\hat{k},$$

con k_1 e k_2 costanti note aventi le opportune dimensioni. Verificare se il campo è conservativo, e in tal caso determinarne l'energia potenziale V.

Domande:

1) Definire e discutere le differenze tra forza centrifuga e forza centripeta.

2) Enunciare le leggi di Keplero sul moto dei pianeti del sistema solare e illustrarne il significato.

Soluzioni compito 1
Esercizio 1
a)
$\vec{R}^{(e)} \neq 0 \Rightarrow \dot{\vec{Q}} \neq 0$

$\vec{M}^{(e)} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{K}} = 0 \Rightarrow m_p v_p R = m_p v'_p R + I\omega$

inoltre l'urto perfettamente elastico conserva l'energia cinetica: $\frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_p v_p'^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$

$$I = \int_0^R \frac{M}{R} l^2\, dl = \frac{M}{R}\frac{R^3}{3} = \frac{1}{3} MR^2$$

$$\begin{cases} m_p v_p R = m_p v'_p R + I\omega \\ \frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_p v_p'^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \frac{m_p R}{I}\left(v_p - v'_p\right) = \frac{m_p R}{I}\left(1 - \frac{5}{7}\right) v_p = \frac{6}{7}\frac{m_p v_p}{MR} \\ I\omega^2 = m_p\left(v_p^2 - v_p'^2\right) = m_p\left(1 - \frac{5}{7}\right)^2 v_p^2 = \frac{1}{3} MR^2 \left(\frac{6}{7}\frac{m_p v_p}{MR}\right)^2 \end{cases}$$

$$\frac{24}{49} m_p v_p^2 = \frac{12}{49}\frac{m_p^2 v_p^2}{M} \Rightarrow \frac{m_p}{M} = 2$$

b) Il centro di massa della sbarra descrive, a causa del vincolo, un arco di circonferenza =>la sua accelerazione sarà totalmente centripeta e dipendente dalla velocità angolare tramite la relazione: $a_{CM} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$. Nell'istante immediatamente successivo all'urto quindi $a_{CM} = \omega^2 R = \left(\frac{6}{7} 2 \frac{v_P}{R}\right)^2 \frac{R}{2} = \frac{72}{49}\frac{v_P^2}{R}$.

c) Applicando il secondo principio della dinamica: $\vec{R} = \vec{T} + \vec{P} = M\vec{a}_{CM} \Rightarrow T = Mg + Ma_{CM} = M\left(g - \frac{72}{49}\frac{v_p^2}{R}\right)$

Esercizio 2

La quota massima si raggiunge a $h = \frac{1}{2}\frac{v_y^2}{g} \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{(100)^2}{9.81} \simeq 510m$ mentre

$$h_2 = \frac{1}{2}\frac{\left(v_2 \sin\frac{\pi}{3}\right)^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{\left(100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{9.81} \simeq 382m$$

Esercizio 3

$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 4k_1 yz^3 = \frac{\partial F_y}{\partial x}$; $\frac{\partial F_x}{\partial z} = 6k_1 y^2 z^2 = \frac{\partial F_z}{\partial x}$; $\frac{\partial F_y}{\partial z} = 12k_1 xyz^2 = \frac{\partial F_z}{\partial y}$; => campo conservativo

$$-V = \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} \left(2k_1 y^2 z^3 + k_2\right) dx + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} 4k_1 xyz^3\, dy + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} 6k_1 xy^2 z^2\, dz = k_2 x + 2k_1 xy^2 z^3$$

Esame scritto di Fisica Generale TA e T1

INGEGNERIA GESTIONALE e DEI PROCESSI GESTIONALI (A-K), CIVILE, CHIMICA, MECCANICA, AMBIENTE E TERRITORIO

(proff. A. Bertin, S. De Castro, N. Semprini-Cesari, M. Villa, A. Zoccoli e S. Zucchelli)

21/01/2011 **(1)**

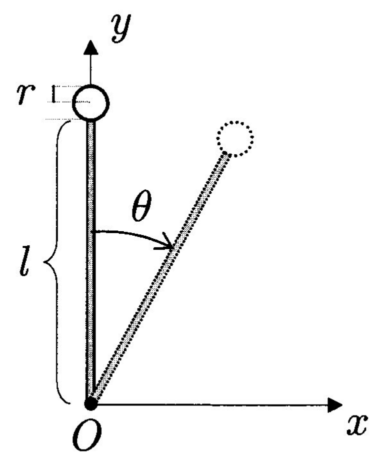
1)Un'asta omogenea ha lunghezza l, spessore trascurabile e massa m_a. Ad una sua estremità è fissato un disco omogeneo di raggio r e massa m_d, mentre l'altra estremità è vincolata ad un asse ortogonale al piano della Figura e passante per il punto O, asse attorno al quale l'asta può ruotare con attrito trascurabile nel piano verticale. L'asta, che si trova inizialmente nella posizione d'equilibrio instabile, ad un dato istante comincia a cadere in seguito a una lieve perturbazione.

Determinare le espressioni delle seguenti grandezze:

a) il momento d'inerzia totale I_O del sistema rispetto all'asse orizzontale passante per O.

b) la coordinata y_G del centro di massa del sistema nella condizione iniziale di equilibrio instabile.

c) la massima velocità angolare ω_{max} assunta dal sistema in funzione di m_a, m_d, I_O, y_G e del modulo dell'accelerazione di gravità g.



2) Verificare se il campo di forze $\overline{F} = -\alpha \{ (2xz + z^2)\ \overline{i} + 3y^2\ \overline{j} + (x^2 + 2xz)\ \overline{k} \}$ è conservativo e in tal caso calcolarne l'espressione dell'energia potenziale.

3) Due punti materiali P_1 e P_2 aventi rispettivamente massa m_1 e m_2 sono inizialmente tenuti in quiete a distanza r_0 e soggetti esclusivamente alla reciproca attrazione gravitazionale.

Calcolare le espressioni dei moduli delle velocità v_1 e v_2 assunte dai due punti materiali in funzione dell'istantanea distanza reciproca r se i due punti vengono lasciati liberi con velocità iniziale nulla.

4) Enunciare e dimostrare il teorema di König per un sistema di N punti materiali.

Soluzioni compito 1

Esercizio 1:

a) $I_0 = m_a l^2/3 + (1/2)\ m_d r^2 + m_d(l + r)^2$

b) $y_G = 1/(m_a + m_d)\ [m_a l/2 + m_d(l + r)]$

c) ω_{max} *si avrà nella posizione di energia potenziale minima* ($\theta = \pi$)*; applicando la conservazione dell'energia meccanica e la relazione tra energia potenziale della forza peso e quota del centro di massa si ha*

$$(m_a + m_d)\ g\ y_G = (1/2)\ (\omega_{max})^2 - (m_a + m_d) g\ y_G \Rightarrow$$

$$\omega_{max} = [\ 4(m_a + m_d) g\ y_G / I_0\ ]^{½}$$

Esercizio 2:

$$U = \alpha\ (x^2\ z + y^3 + z^2 x)$$

Esercizio 3:
il sistema è isolato e soggetto unicamente a forze conservative, ergo:

$(1/2)\ (m_1\ v^2_1 + m_2\ v^2_2) - \gamma\ m_1\ m_2 / r = -\gamma\ m_1\ m_2 / r_0$ *(conservazione energia meccanica)*

$m_1\ \bar{v}_1 + m_2\ \bar{v}_2 = \bar{0}$ *(conservazione quantità di moto)*

Passando ai moduli (data la centralità della forza), la seconda equazione diventa

$$v_2 = (m_1 / m_2)\ v_1$$

da cui

$$v_1 = m_2 \{\ [2\gamma / (m_1 + m_2)]\ (1/r - 1/ r_0)\ \}^{1/2}$$

$$v_2 = m_1 \{\ [2\gamma / (m_1 + m_2)]\ (1/r - 1/ r_0)\ \}^{1/2}$$

Esame scritto di Fisica Generale TA e T1

INGEGNERIA GESTIONALE e DEI PROCESSI GESTIONALI (A-K), CIVILE, CHIMICA, MECCANICA, AMBIENTE E TERRITORIO

(proff. A. Bertin, S. De Castro, N. Semprini-Cesari, M. Villa, A. Zoccoli e S. Zucchelli)

21/01/2011

(2)

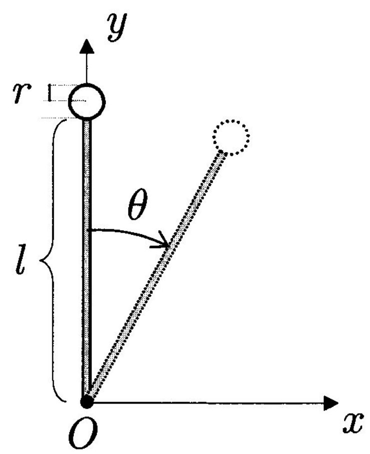
1) Un'asta omogenea ha lunghezza l, spessore trascurabile e massa m. Ad una sua estremità è fissato un anello omogeneo e filiforme di raggio r e massa M mentre l'altra estremità è vincolata ad un asse ortogonale al piano della Figura e passante per il punto O, attorno al quale l'asta può ruotare con attrito trascurabile nel piano verticale. L'asta, che si trova inizialmente nella posizione d'equilibrio instabile, ad un dato istante comincia a cadere in seguito a una lieve perturbazione.

Determinare le espressioni delle seguenti grandezze:

a) il momento d'inerzia totale I_O del sistema rispetto all'asse orizzontale passante per O.

b) il modulo dell'accelerazione angolare del sistema in funzione dell'angolo θ formato con l'asse y dall'asta in rotazione, della distanza $|G\text{-}O|$ del centro di massa del sistema dal punto O, delle masse (m e M) e di I_O.

c) le posizioni nelle quali il modulo dell'accelerazione angolare del sistema è massima.



2) Verificare se il campo di forze $\overline{F} = -\alpha \{ (y + z)\ \overline{i} + (x+z)\ \overline{j} + (x + y)\ \overline{k} \}$ è conservativo e in tal caso calcolarne l'espressione dell'energia potenziale.

3) Utilizzando la legge di gravitazione universale ricavare l'espressione della terza legge di Keplero nel caso di un pianeta di massa m che percorra con velocità v costante in modulo un'orbita circolare di raggio r attorno al centro di un pianeta di massa M.

4) Enunciare e dimostrare il teorema delle forze vive.

Soluzioni compito 2

Esercizio 1:

a) $I_0 = ml^2/3 + I_{anello} + M(l + r)^2$ (*additività momenti d'inerzia + teorema di Huygens-Steiner*) $= ml^2/3 + Mr^2 + M(l + r)^2$

b) *Applicazione della II Eq. cardinale della dinamica, della proprietà del centro d'applicazione di forze parallele e dell'unicità della velocità angolare per tutti i punti (incluso il centro di massa) d'un sistema rigido:*

$\overline{M}^{(e)}{}_0 = I_O\, d\overline{\omega}/dt$ (*II Eq. cardinale della dinamica*)

$\overline{M}^{(e)}{}_0 = (\overline{G} - \overline{O}) \wedge (m+M)\, \overline{g}$ (*proprietà del centro d'applicazione di forze parallele*), *per cui*

$-|\overline{G} - \overline{O}|\,(m+M)\, g \sin\theta\ \overline{k} = I_O\,(d\omega/dt)\ \overline{k}$, *e*

$|(d\omega/dt)| = |\overline{G} - \overline{O}|\,(m+M)\, g \sin\theta / I_O$

c) *evidentemente* $\theta = \pi/2$ *e* $\theta = 3\pi/2$.

Esercizio 2:

$U = \alpha\,(x\,y + yz + xz)$

Esercizio 3:

Basta uguagliare (II principio della dinamica) l'espressione della massa per l'accelerazione centripeta all'espressione del modulo della forza di gravitazione universale:

$mv^2 / r = (m/r)(2\pi r/T)^2 = \gamma mM / r^2$, *con* T = *periodo di percorrenza dell' orbita, da cui si ricava* $(r^3 / T^2) = \gamma M / 4\pi^2$ (*indipendente dalla massa del pianeta orbitante m*).

Esame scritto di Fisica Generale TA e T1

INGEGNERIA GESTIONALE e DEI PROCESSI GESTIONALI (A-K), CIVILE, CHIMICA, MECCANICA, AMBIENTE E TERRITORIO

(proff. A. Bertin, S. De Castro, N. Semprini-Cesari, M. Villa, A. Zoccoli e S. Zucchelli)

21/01/2011

(3)

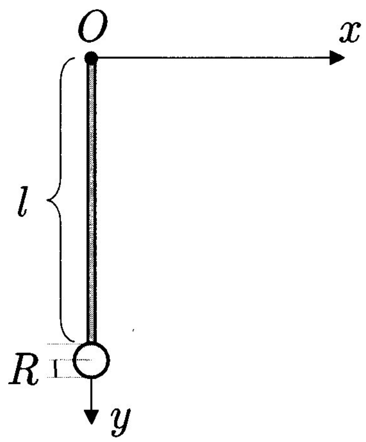
1) Un'asta omogenea e sottile ha lunghezza l e massa trascurabile. Ad una sua estremità è fissato un disco avente massa M, raggio R, densità superficiale $\sigma = \sigma_0\ (1+ r/R)$ crescente con la distanza r dal suo centro e spessore trascurabile. L'altra estremità è vincolata ad un asse ortogonale al piano della Figura e passante per il punto O, attorno al quale l'asta può ruotare con attrito trascurabile nel piano verticale. L'asta si trova inizialmente nella posizione d'equilibrio stabile.

Determinare le espressioni delle seguenti grandezze:

a) la coordinata y_G del centro di massa del sistema nella condizione iniziale.

b) il momento d'inerzia totale I_O del sistema rispetto all'asse orizzontale passante per O..

c) il modulo ω_{min} della velocità angolare minima che deve essere conferita al sistema perché il disco raggiunga la posizione diametralmente opposta a quella iniziale (in funzione di M, l, R, I_O e del modulo dell' accelerazione di gravità g).



2) Verificare se il campo di forze $\overline{F} = -\alpha \{ (2xz + y^2)\ \overline{i} + 3y^2\ \overline{j} + (2xy + z^2)\ \overline{k} \}$ è conservativo e in tal caso calcolarne l'espressione dell'energia potenziale.

3) Due punti materiali P_1 e P_2 aventi rispettivamente massa m_1 e m_2, velocità $\overline{v_1}$ e $\overline{v_2}$ di ugual direzione e verso opposto si urtano su un piano orizzontale che presenta

attrito trascurabile. Supponendo che nell'urto non si verifichino perdite di energia cinetica, determinare le espressioni delle velocità finali $\overline{v}_{1f}$ e $\overline{v}_{2f}$ dei due punti materiali.

4) Enunciare e dimostrare il teorema di Huygens-Steiner.

Soluzioni del compito 3

Esercizio 1:

a) $y_G = l + R$

b) $I_{disco} = \int r^2 \sigma\, 2\pi r dr = (9/10)\, \pi\, \sigma_0\, R^4$, ma $M = \int \sigma\, 2\pi r dr = (5/3)\, \pi\, \sigma_0\, R^2 \Rightarrow$ $\pi\, \sigma_0\, R^4 = (3/5)\, MR^2 \Rightarrow I_O = (9/10)\, x\, (3/5)\, MR^2 = (27/50)\, MR^2\, ; \Rightarrow$

$$I_O = I_{disco} + M\,(l+R)^2$$

b) *Dalla conservazione dell'energia,*

$(1/2)\, I_O \omega^2_{min} = 2Mg\,(l+R) \Rightarrow \omega_{min} = [\,(4/\,I_O) Mg(l+R)\,]^{1/2}$

Esercizio 2:

$U = \alpha\,(x\,y^2 + yz^2 + xz^2)$

Esercizio 3:

$\overline{v}_{1f} = [1/(\,m_1 + m_2)] \otimes [\,(m_1 - m_2)\ \ \overline{v}_1 + 2\,m_2\ \ \overline{v}_2\,]$

$v_{2f} = [1/(\,m_1 + m_2)] \otimes [\,(m_2 - m_1)\ \ \overline{2}_1 + 2\,m_1\ \ \overline{v}_1\,]$

Esame scritto di Fisica Generale TA e T1

INGEGNERIA GESTIONALE e DEI PROCESSI GESTIONALI (A-K), CIVILE, CHIMICA, MECCANICA, AMBIENTE E TERRITORIO

(proff. A. Bertin, S. De Castro, N. Semprini-Cesari, M. Villa, A. Zoccoli e S. Zucchelli)

21/01/2011

(4)

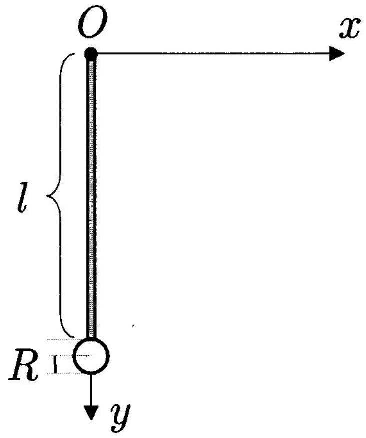
1) Un filo inestensibile ha lunghezza l e massa trascurabile. Ad una sua estremità è fissata una sfera omogenea di massa M e raggio R. L'altra estremità è vincolata ad un asse ortogonale al piano della Figura e passante per il punto O, attorno al quale il filo può ruotare con attrito trascurabile. Il sistema si trova inizialmente nella posizione d'equilibrio stabile.

Determinare le espressioni delle seguenti grandezze:

a) il momento d'inerzia totale I_O del sistema rispetto ad un asse orizzontale passante per O.

b) il modulo ω_{min} della velocità angolare minima che il filo deve possedere rispetto a un asse verticale passante per O quando la sfera si trova nella posizione più elevata della traiettoria affinché questa risulti circolare.

c) il modulo ω'_{min} della velocità angolare minima che bisogna imprimere al sistema nella posizione iniziale affinché la sfera raggiunga la posizione a questa diametralmente opposta (in funzione di M, l, R, I_O e del modulo dell' accelerazione di gravità g).



2) Verificare se il campo di forze $\overline{F} = -(\alpha y + \gamma z)\ \overline{i}\ - (\alpha x + \beta z)\ \overline{j}$ è conservativo e in tal caso calcolarne l'espressione dell'energia potenziale.

3) Ricavare le espressioni del modulo R della reazione vincolare di un pendolo semplice (massa m, lunghezza l) quando è a riposo e quando è in movimento.

4) Enunciare e dimostrare il teorema di conservazione dell'energia meccanica.

Soluzioni del compito 4

Esercizio 1:

a) $I_O = (2/5)MR^2 + M\,(l+R)^2$ *(Momento d'inerzia della sfera omogenea rispetto a un asse passante per il suo centro e Teorema di Huygens-Steiner).*

b) ω_{min} *dev'essere tale che la forza centrifuga compensi la forza peso, e per il teorema del baricentro tutto va come se l'intera massa della sfera fosse concentrata nel centro di massa, cioè*

$$M\,g = M\,\omega^2_{min}\,(l+R) \Rightarrow \omega_{min} = [\,g/(l+R)]^{1/2}$$

c) ω'_{min} *dev'essere tale che l'energia cinetica corrispondente permetta al centro di massa della sfera di raggiungere la posizione più alta con velocità angolare pari a* ω_{min}, *cioè, applicando la conservazione dell'energia,*

$$(1/2)I_o\,(\omega'_{min})^2 = 2Mg(l+R) + (1/2)I_o\,(\omega_{min})^2 = 2Mg(l+R) + (1/2)I_o\,[\,g/(l+R)]$$

$$\Rightarrow \omega'_{min} = \{\,4Mg(l+R)/\,I_o + [g/(l+R)]\,\}^{1/2}$$

Esercizio 2:

$U = \alpha\, x\, y + \beta\, yz^2 + \gamma\, xz$

Esercizio 3:

$R = mg$ quando il pendolo è a riposo
$R = ml\,(d\varphi/dt)^2 + mg\cos\varphi$ in movimento, dove $d\varphi/dt$ è il modulo della velocità angolare e φ l'angolo istantaneamente formato dal filo del pendolo con la verticale.

Esame scritto di Fisica Generale TA

INGEGNERIA CIVILE (A-K), prof. M. Villa

17/02/2011

1) Un disco rigido e omogeneo di massa M e raggio R si trova in quiete nel piano verticale (x,y) d'un riferimento cartesiano, appoggiato a una rotaia orizzontale dotata d'attrito disposta lungo l'asse x. Ad un dato istante il disco viene messo in moto da una forza orizzontale, parallela all'asse x ed applicata al disco per un brevissimo intervallo di tempo δt ad un'altezza $h<R$, In tal modo viene impresso al disco un impulso orizzontale noto $\vec{J} = J\hat{\imath}$ che fa sì che esso rotoli senza strisciare sulla rotaia. Considerando trascurabili le forze di natura non istantanea agenti durante l'intervallo δt determinare le espressioni delle seguenti grandezze fisiche:

1. la velocità $\vec{v}_G, \vec{v}_O, \vec{v}_P$ (rispettivamente) del centro di massa, del punto O di contatto con la rotaia e del punto P più alto del disco nel sistema di riferimento del laboratorio.
2. il modulo della velocità angolare di rotazione $\vec{\omega}$.
3. il lavoro W compiuto dalla forza impulsiva che mette in moto il disco.

2) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x, y, z) = (4Ax^3y + Cz^2)\hat{\imath} + (Ax^4 + 3By^2z)\hat{\jmath} + (By^3 + 2Cxz)\hat{k}$

è conservativo, e in tal caso ricavarne l'espressione dell'energia potenziale V.

3) Su un sistema meccanico piano, descrivibile nel piano cartesiano (x,y), agisce un sistema di sole 3 forze esterne costituito dai vettori: $\vec{F}_1 = 3\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$ applicato in A(0,0), $\vec{F}_2 = -5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ applicato in B(2,0) e $\vec{F}_3 = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ applicato in C(1, h) (forze espresse in Newton, posizioni in metri). Trovare i valori di *x, y* e *h* affinché il sistema sia *isolato*.

4) Una sferetta di massa m agganciata all'estremo d'una molla ideale che ha l'altro estremo fisso compie oscillazioni armoniche semplici su un piano orizzontale privo d'attrito. Un'altra sferetta di massa $2m$ agganciata a due molle identiche alla precedente, aventi anch'esse l'altro estremo fisso, compie a sua volta oscillazioni armoniche semplici sullo stesso piano. In che relazione stanno i periodi di oscillazione dei due sistemi?

5) Definire la velocità areolare e discuterne il ruolo nel moto dei pianeti del sistema solare.

6) Spiegare le caratteristiche della forza di attrito viscoso.