Fisica Generale T (L) – Scritto Totale

INGEGNERIA EDILE

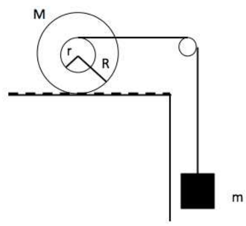
(Prof. Mauro Villa)

14/07/2014

Compito A

Esercizi:

1) Un corpo di massa M = 10 kg e di raggio R = 20 cm è appoggiato su un piano orizzontale scabro. Un corpo di massa m = 8 kg, appeso lungo la verticale, trascina il corpo M tramite una fune inestensibile di massa trascurabile avvolta al corpo M su una sporgenza cilindrica di raggio r = 5 cm e massa trascurabile come mostrato in figura. Considerando la carrucola che sostiene la fune ideale, calcolare: a) il coefficiente di attrito che permette al corpo M di rotolare senza strisciare; b) l'accelerazione del sistema; c) la tensione della fune che lega i due corpi.



2) L'energia potenziale di un campo di forze è pari a $V(x,y,z) = 2\alpha x + 3\beta z^2$. Determinare: a) l'espressione della forza; b) le dimensioni fisiche delle costanti α e β; c) le equazioni del moto di un punto materiale di massa m che viene lasciato nel punto A (3,-2,4) con velocità $\vec{v}_0 = \hat{i} + 2\hat{j}$

3) Un arciere vuole colpire con una freccia una mela su un albero ad altezza h = 12 m rispetto all'arciere. La distanza in linea d'aria tra arciere e bersaglio sia d = 35 m. Se l'arciere sta mirando in direzione della mela a un angolo di 30° rispetto all'orizzontale , si determini: a) il valore minimo della velocità iniziale che consente all'arciere di colpire il bersaglio; b) l'altezza massima raggiunta dalla freccia.

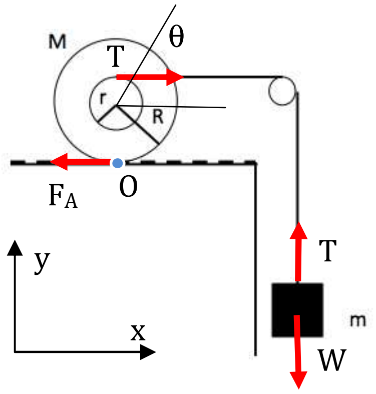
4) Un uomo di 72 kg si trova in un ascensore su un dinamometro a molla. Partendo da fermo l'ascensore sale, raggiungendo la sua massima velocità di 1.20 m/s in 0.8 secondi e continuando a questa velocità costante per i successivi 5 secondi. L'ascensore poi procede con un' accelerazione uniforme per 1.5 s lungo la direzione negativa dell'asse y, dopodiché si ferma. Cosa registrerà il dinamometro: a) durante i primi 0.8 secondi? b) mentre l'ascensore procede a velocità costante? c) durante il tempo in cui decelera?

Domande:

1) Illustrare le caratteristiche delle forze conservative.
2) Enunciare e spiegare la seconda equazione cardinale.
3) Enunciare e dimostrare il teorema delle forze vive.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere alle tre domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9{,}8\, m/s^2$

Soluzioni



Esercizio 1: Iniziamo cercando di visualizzare meglio la situazione fisica del problema. Vi sono due corpi rigidi di massa M e m che si muovono sotto l'azione di forze. Il corpo di massa m si muove sotto l'azione della sua forza peso W (=mg) e della tensione T del filo. Tale corpo può essere descritto come un punto materiale che trasla lungo una direzione verticale. Il corpo di massa M, invece, deve essere trattato come un corpo rigido che trasla (si muove verso destra) e contemporaneamente rotola senza strisciare. Le forze che agiscono in questo caso sono due: la tensione T del filo e la forza d'attrito F_A, entrambe di intensità non nota. Per descrivere il moto di questo corpo avremo bisogno di entrambe le equazioni cardinali.

Scegliamo un sistema di riferimento per descrivere il moto dei corpi: asse x orizzontale e asse y verticale come in figura. Aggiungiamo anche una coordinata θ che ci serve per descrivere le rotazioni del disco. Per convenzione scegliamo un punto sul bordo del disco e descriviamo la sua posizione con la coordinata θ che aumenta quando il disco compie un moto antiorario. Nel nostro caso, visto che il disco si muove verso destra facendo una rotazione oraria, la coordinata θ diminuirà al progredire del moto. L'intero problema può essere quindi trattato con tre incognite che descrivono il moto dei due corpi: la coordinata y del corpo di massa m (il suo CM), la coordinata x del disco (coordinata del CM o del punto di appoggio O), la rotazione del disco descritta dall'angolo θ. Ovviamente queste tre coordinate non sono indipendenti:

- Quando il disco trasla verso destra di una quantità Δx, il disco compie una rotazione oraria (segno meno) di una quantità pari a $\Delta\theta = -\Delta x/R$.
- Se il disco trasla e ruota, il filo si sposta e si svolge dall'avvolgimento, causando un abbassamento del corpo di massa m. Calcoliamo tale abbassamento $-\Delta y$ *(>0):*
  Ad uno spostamento Δx il filo si allunga di $\Delta l = \Delta x + r\,|\Delta\theta|$ (dove l'ultimo termine è il contributo dello svolgimento del filo) e causa uno spostamento in y del cm del corpo di massa m tale che : $\Delta y = -\Delta l = \Delta x + r\,|\Delta\theta| = \Delta x\,(1+r/R)$.

Ora occorre impostare le equazioni della dinamica: per il corpo di massa m e per le traslazioni di M le equazioni sono praticamente immediate. Rimane da scegliere come descrivere le rotazioni del disco (coordinata θ). Potremmo scegliere di usare come polo per le rotazioni il CM ma facendo così dovremmo lavorare simultaneamente con i momenti della tensione e della forza d'attrito e sono entrambi incogniti. E' più utile usare come polo il punto di appoggio O: la rotazione attorno a questo punto è ancora descritta da θ (proprietà delle ruote che rotolano senza strisciare) , l'asse di rotazione è parallelo a quello del CM, la velocità del punto di appoggio è pari a quella del CM e quindi nell'equazione cardinale non ci sono termini aggiuntivi. In più però, scegliendo O come polo, il momento della forza d'attrito si annulla e si elimina così una incognita. Il sistema di equazioni da risolvere è quindi:

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -mg + T \\ M\ddot{x} = +T - F_A \\ I\ddot{\theta} = -(R+r)T \end{cases}$$

dove y è la coordinata verticale del corpo di massa m, x è la coordinata del CM (o del punto di appoggio O) del disco, mentre θ descrive la rotazione del disco. Tutte queste coordinate sono tra loro dipendenti come abbiamo visto prima per gli spostamenti, relazioni simili valgono per le velocità (che sono sempre spostamenti diviso tempo) e per le accelerazioni:

$$\ddot{x} = -R\ddot{\theta},\ \ddot{y} = -(\ddot{x} - r\ddot{\theta}) = -\ddot{x}(1 + r/R) = \ddot{\theta}(R + r)$$

La quantità I è il momento d'inerzia del disco calcolato rispetto ad O. Usando il teorema di Huygens-Steiner si ha $I = I_{CM} + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$.

Dal sistema di equazioni è quindi possibile usare la prima equazione per trovare T e sostituirla nelle altre, la seconda per trovare F_A, e la terza per trovare θ:

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -mg + T \\ M\ddot{x} = +T - F_A \\ I\ddot{\theta} = -(R+r)T \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T = m(\ddot{y} + g) = m[(R+r)\ddot{\theta} + g] \\ F_A = T + MR\ddot{\theta} \\ I\ddot{\theta} = -(R+r)m[(R+r)\ddot{\theta} + g] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = -(R+r)mg/[I + m(R+r)^2] \\ T = m(\ddot{y} + g) = mgI/[I + m(R+r)^2] \\ F_A = MmgR(R-r)/[I + m(R+r)^2] \end{cases}$$

dove nell'ultimo passaggio, prima si è usata la terza equazione per trovare $\ddot{\theta}$, quindi sostituendo nella prima si è trovata la tensione T e infine sostituendo entrambe, si è trovata la forza d'attrito necessaria a fare in modo che la ruota non strisci. Per trovare il coefficiente di attrito minimo necessario è sufficiente imporre che la forza di attrito trovata sia uguale a quella massima e risolvere per μ_S:

$F_A = F_A^{Max} = \mu_S Mg \rightarrow \mu_S = F_A / Mg = mR(R-r)/[I + m(R+r)^2]$.

Sostituendo i valori numerici si ha:

$a)\ \mu_S = 0{,}218;\quad b)\ \ddot{\theta} = -17{,}8\text{s}^{-1};\ \ddot{x} = 3{,}56\text{m/s}^2;\quad c)\ T = 42{,}8\text{N}$

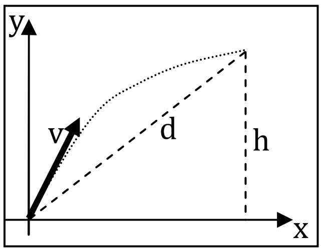
Esercizio 2: a) La forza è pari al gradiente dell'energia potenziale cambiato di segno:

$$\vec{F} = -\nabla V(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} = -2\alpha\hat{\imath} - 6\beta z\hat{k}\,.$$

b) Da questa espressione possiamo dedurre anche che il coefficiente α deve avere le dimensioni di una forza, quindi [α]=[MLT^{-2}]. Il coefficiente β deve avere le dimensioni di una forza F_z diviso *z*, da cui [β]=[MT^{-2}].

c) per trovare l'equazione del moto dobbiamo risolvere un problema inverso di dinamica a partire dal secondo principio: *F=ma*. Risolviamola per componenti. La componente *x* della forza è costante. Il moto sarà quindi uniformemente accelerato. Inserendo le condizioni iniziali, si ha: $x(t) = -\frac{\alpha}{m}t^2 + t + 3$. La componente *y* della forza è nulla. Il moto sarà uniforme: $y(t) = 2t - 2$. La componente *z* della forza sembra la forza di una molla (elastica), con costante elastica pari a 6 β. Il moto sarà armonico: $z(t) = 4\cos\omega t \text{ con } \omega = \sqrt{\frac{6\beta}{m}}$.

Esercizio 3: L'esercizio riguarda il moto dei gravi. Iniziamo definendo un SdR inerziale con origine nella posizione dell'arciere. La freccia deve colpire un punto che si trova ad altezza *h* e a distanza *d* dall'origine, partendo con una velocità di direzione e verso nota (inclinata di α=30° rispetto all'orizzontale). La situazione fisica è quella di figura.



La freccia sarà scoccata dalla posizione (0,0) e dovrà raggiungere il bersaglio posto nella posizione (x_B,y_B)= $(\sqrt{d^2 - h^2}, h)$. Le equazioni del moto per la freccia sono:

$$\begin{cases} x(t) = (v\cos\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v\sin\alpha)t \end{cases}$$ dove v è la velocità incognita. Imponendo che la freccia passi per il bersaglio si ha:

$$\begin{cases} x_B = (v\cos\alpha)\bar{t} \\ y_B = -\frac{1}{2}g\bar{t}^2 + (v\sin\alpha)\bar{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{t} = x_B/(v\cos\alpha) \\ y_B = -\frac{1}{2}g\left(x_B/(v\cos\alpha)\right)^2 + x_B\tan\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} - \\ v = \dfrac{x_B}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{g}{2(x_B\tan\alpha - h)}} \end{cases}$$

Il punto di massimo della traiettoria viene raggiunto quando la velocità in y è nulla e quindi quando $\dot{y}(t) = 0 = -gt_{\max} + (v\sin\alpha)$, cioè al tempo $t_{\max} = v\sin\alpha/g$ e quindi, sostituendo nelle equazioni del moto, alla coordinata x data da $x_{\max} = v^2\cos\alpha\sin\alpha/g$ e alla coordinata y data da: $y_{\max} = v^2\sin^2\alpha/(2g)$.

Sostituendo i valori numerici si trova: x_B=32,9 m, v=45,3 m/s, t_{max}=2,31 s, x_{max}=90,8 m, y_{max}=26,2 m.

Dato che il valore di x a cui si raggiunge il vertice della parabola è dopo il bersaglio, la massima altezza della freccia vale *h*=12 m!

Esercizio 4: l'esercizio richiede un piccolo sforzo di comprensione. Capìta la situazione fisica, l'esercizio è molto facile. Proviamo a rifrasarne l'inizio in questo modo:
"Un uomo entra in un ascensore fermo dove è presente una bilancia (=dinamometro tarato in kilogrammi-forza) e vi sale sopra. Ovviamente la bilancia ne segna il suo peso. Quando l'ascensore inizia a muoversi verso l'alto di moto uniformemente accelerato (raggiungendo la velocità di 1.2 m/s in un tempo pari a 0.8 s), la bilancia segnerà ovviamente di più. Quanto segna la bilancia? Perché?"

L'esercizio ora sembra più facile perché quello che succede all'interno dell'ascensore è descritto con molti più dettagli. Nella prima fase della salita, quando l'ascensore accelera, questo costituisce un sistema di riferimento non inerziale, dove quindi è presente una forza fittizia. Se l'accelerazione $\vec{a}_{O'}$ (dell'ascensore e di tutto quello che vi è dentro) è diretta verso l'alto, l'uomo sente una *forza fittizia* (o *forza di trascinamento*) pari a $\vec{F} = -m\vec{a}_{O'}$ diretta verso il basso che quindi si aggiunge alla forza peso dell'uomo sulla bilancia/dinamometro.

La bilancia/dinamometro segnerà quindi una forza complessiva di modulo pari a *mg+ma* nella prima fase. Calcoli: l'accelerazione a_1 vale a_1=1.2/0.8 = 1.5 m/s^2. La forza complessiva vale quindi F_1=72*(9.8+1.5)=814 N. Nella seconda fase, quando l'ascensore viaggia di moto rettilineo, non vi è forza fittizia e la bilancia/dinamometro segna solo il peso dell'uomo: F_2=72*9.8= 706 N. Nella terza fase, quando l'ascensore rallenta, ha una accelerazione diretta verso il basso di modulo a_3=1,2/1,5 = 0,8 m/s^2. La forza fittizia sentita dall'uomo sarà quindi diretta verso l'alto e ridurrà complessivamente l'entità della forza che agisce sulla bilancia/dinamometro di una quantità pari a $-ma_3$: $F_3=m*(g-a_3)$=72*(9.8-0,8)=648 N.

Esempi di risposte alle domande che hanno ottenuto il massimo punteggio:

1) Illustrare le caratteristiche delle forze conservative.

Studente A: Le forze conservative sono forze che non dissipano energia; per tali forze l'energia meccanica si conserva e la somma di energia cinetica e energia potenziale è costante.
Proprietà:

$a) \quad L = \oint \vec{F} \bullet d\vec{s} = 0 \quad L_{AB} = L_{BA}$

$b)$ $\exists$ una energia (?? Nota: una funzione scalare) che dipende dalla posizione:

$L_{AB} = U_B - U_A = V_A - V_B$

dove V è l'energia potenziale

c) $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$

$d) \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$

2) Enunciare e spiegare la seconda equazione cardinale.

Studente B:

$$\frac{d\vec{P}_O}{dt} = \vec{M}_O^{EST},$$

$\vec{P}_O$ momento angolare o momento della quantità di moto del sistema [rispetto al polo O]

$\vec{M}_O^{EST}$ momento della forza [esterna rispetto al polo O], variazione di momento angolare

La seconda equazione cardinale descrive, insieme alla prima, il moto di un punto, di due punti e di un corpo rigido. In particolare descrive il moto rotatorio del corpo rigido [attorno ad un asse passante] per il centro di massa.

Vale: $\dfrac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \vec{M}_{CM}^{EST}$, inoltre $\dfrac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = I\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}\left[= \vec{M}_{CM}^{EST}\right]$.

3) Enunciare e dimostrare il teorema delle forze vive.

Studente C: Il teorema delle forze vive esprime il lavoro compiuto da una qualsiasi forza su un qualsiasi sistema meccanico: $L_{AB} = T_B - T_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$ ed è uguale alla variazione di energia cinetica fra il punto finale e quello iniziale. Dimostrazione:

$dL = \vec{R} \bullet d\vec{l} = m\vec{a} \bullet d\vec{l}$ (perché la risultante delle forze soddisfa il secondo principio)

$$dL = \vec{R} \bullet d\vec{l} = m\vec{a} \bullet d\vec{l} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \bullet \frac{d\vec{l}}{dt}dt = m\frac{d\vec{v}}{dt} \bullet \vec{v}dt = \frac{m}{2}\frac{d\left(\vec{v} \bullet \vec{v}\right)}{dt}dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}v^2\right)dt$$

Posto: $T = \frac{1}{2}mv^2$ Energia cinetica $\Rightarrow dL = \dfrac{dT}{dt}dt$ da cui $L = \int dL = \int_{t_A}^{t_B} \dfrac{dT}{dt}dt = T_B - T_A$.