Fisica Generale T (L) – Scritto Totale

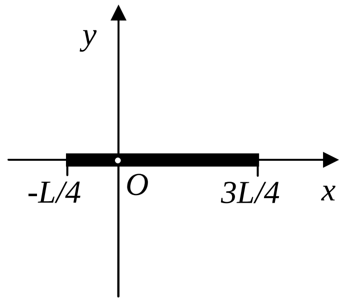
INGEGNERIA EDILE

(Prof. Mauro Villa)

02/12/2014

Esercizi:

1) Un'asta di massa m = 0.5 kg lunghezza L=40 cm è disposta ferma lungo l'asse x di un piano orizzontale xy. L'asta è vincolata all'origine O del piano orizzontale in un punto che si trova ad una distanza di $L/4$ da un suo estremo, come in figura. All'istante t=0 s e per un intervallo di tempo di T=1 s, si applica sull'asta un momento della forza pari a $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \tau \hat{\mathbf{k}}$ con τ=2 Nm. Determinare: a) il momento d'inerzia dell'asta, b) la velocità angolare dell'asta per $t>T$, c) l'energia dell'asta per $t>T$.



2) Un punto materiale di massa m, inizialmente fermo nell'origine si muove nel piano xy sotto l'azione di una forza $\vec{F}(x,y) = -k(x-L)\hat{\mathbf{i}} + kL\hat{\mathbf{j}}$. Trovare: 1) l'equazione del moto, 2) le leggi orarie $x(t)$ e $y(t)$, 3) disegnare e classificare il moto risultante.

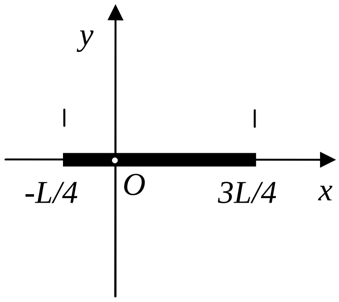
3) Sia data l'energia potenziale di un campo di forze $V(x,y,z) = \alpha xz^2$. Determinare: a) le dimensioni fisiche della costante α; b) il campo di forze $\vec{F}(x,y,z)$; c) il lavoro compiuto dalla forza per spostare il punto di applicazione da A(L, L, L) a B($2L$, $2L$, $2L$).

Domande:

1) **Enunciare** e **spiegare** il secondo principio della dinamica.
2) Illustrare le caratteristiche della forza di attrito statico.
3) Scrivere e spiegare le formule di Poisson.

Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere alle tre domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. $g = 9,8\,m/s^2$

Soluzioni:
Esercizio 1)



Un'asta di massa m = 0.5 kg lunghezza L=40 cm è disposta ferma lungo l'asse x di un piano **orizzontale** xy. L'asta è **vincolata all'origine** O del piano orizzontale in un punto che si trova ad una distanza di $L/4$ da un suo estremo, come in figura. All'istante t=0 s e per un intervallo di tempo di T=1 s, si applica sull'asta un **momento della forza** pari a $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \tau \hat{\mathbf{k}}$ con τ=2 Nm. Determinare: a) il momento d'inerzia dell'asta, b) la velocità angolare dell'asta per $t>T$, c) l'energia dell'asta per $t>T$.

a) L'asta è incernierata in un punto O, che non corrisponde con il suo centro di massa. Possiamo trovare il momento d'inerzia dell'asta usando il teorema di Huygen-Steiner, $I_O = I_{CM} + mD^2$, a condizione di conoscere il momento d'inerzia rispetto al centro di massa I_{CM} e la distanza D tra il punto O e il centro di massa (posto a metà dell'asta , $x_{CM} = L/4$ nella figura). Sapendo che $I_{CM} = \frac{1}{12}mL^2$ e che la distanza D vale $D = \frac{1}{4}L$, si ha $I_O = I_{CM} + mD^2 = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{16}mL^2 = \frac{7}{48}mL^2 = 0{,}0117 \text{ kg m}^2$.

b) L'asta ruota sul piano xy, quindi il suo asse di rotazione coincide con l'asse z, asse lungo il quale vi è il momento della forza. Il moto dell'asta è governato dalla seconda equazione cardinale della dinamica: $\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O = \tau\hat{k}$, dove l'ultima uguaglianza vale solo nell'intervallo di tempo 0<t<T. Poiché l'asta è un corpo rigido, si può scrivere: $\vec{K}_O = I_O\vec{\omega} = I_O\omega\hat{k}$, con $\vec{\omega}$ velocità angolare e quindi, inserendo tale espressione del momento angolare nella seconda equazione della dinamica, si ha $I_O\dot{\omega} = \tau$ per 0<t<T. Si trova che l'accelerazione angolare vale $\dot{\omega} = \tau / I_O$, cioè è costante. Integrando questa relazione si trova la velocità angolare nell'intervallo 0<t<T: $\omega(t) = \omega(0) + \dot{\omega}t = \tau t / I_O$, dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che nell'istante iniziale t=0, il corpo è fermo, $\omega(0) = 0$. A tempi successivi a T, viene a mancare il momento della forza e quindi l'accelerazione angolare è nulla. La velocità angolare rimane costante per $t>T$: $\omega(t > T) = \tau T / I_O = 171 \text{ s}^{-1}$.

c) L'energia dell'asta è solo di natura cinetica ed in particolare è nella forma di energia rotazionale. Si ha quindi:
$$E = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}\tau^2T^2 / I_O = 171 \text{ J}$$

Esercizio 2)

Un **punto** materiale di massa m, **inizialmente fermo** nell'origine si muove nel piano xy sotto l'azione di una forza $\vec{F}(x, y) = -k(x - L)\hat{\mathbf{i}} + kL\hat{\mathbf{j}}$. Trovare: 1) l'equazione del moto, 2) le leggi orarie *x(t)* e *y(t)*, 3) disegnare e classificare il moto risultante.

a) Le equazioni del moto discendono dal secondo principio della dinamica:
$\vec{F}(x,y) = -k(x-L)\hat{\mathbf{\imath}} + kL\hat{\mathbf{\jmath}} = m\vec{\mathbf{a}}$ Separando questa relazione per componenti, si ha:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k(x-L) \\ m\ddot{y} = kL \end{cases}$$

La prima relazione è analoga a quella di una forza elastica il cui centro di attrazione (punto di forza nulla) corrisponde alla coordinata $x=L$. La seconda fornisce una accelerazione costante lungo y.

b) Le leggi del moto sono quindi: $\begin{cases} x(t) = L + A\cos(\omega t + \phi_0) \\ y(t) = \dfrac{kL}{2m}t^2 + v_0 t + y_0 \end{cases}$ con $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Imponendo che all'istante iniziale (t=0) il corpo sia fermo nell'origine ($x(0)=0$, $y(0)=0$) si trova:

$$\begin{cases} x(t) = L - L\cos(\omega t) \\ y(t) = \dfrac{kL}{2m}t^2 \end{cases}$$

c) Il moto è quindi uniformemente accelerato lungo y e moto armonico lungo x.

Esercizio 3)

3) Sia data **l'energia potenziale** di un campo di forze $V(x,y,z) = \alpha x z^2$. Determinare: a) le dimensioni fisiche della costante α; b) il campo di forze $\vec{F}(x,y,z)$; c) il lavoro compiuto dalla forza per spostare il punto di applicazione da A(L, L, L) a B($2L$, $2L$, $2L$).

a) Sapendo che le dimensioni delle coordinate sono delle lunghezze, [x] =[z]=[L], e quelle dell'energia potenziale sono [V]=[$\mathrm{ML^2T^{-2}}$] , dalla relazione $\left[\mathrm{ML^2T^{-2}}\right] = [V] = \left[\alpha x z^2\right] = [\alpha][x]\left[z^2\right] = [\alpha][\mathrm{L}]\left[\mathrm{L}^2\right] = [\alpha]\left[\mathrm{L}^3\right]$, si trova $[\alpha] = \left[\mathrm{ML^2T^{-2}}\right]/\left[\mathrm{L}^3\right] = \left[\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\right]$;

b) Dato il potenziale, si trova la forza come gradiente del potenziale cambiato di segno: $\vec{\mathbf{F}} = -\nabla V = -\dfrac{dV}{dx}\hat{\mathbf{\imath}} - \dfrac{dV}{dy}\hat{\mathbf{\jmath}} - \dfrac{dV}{dz}\hat{\mathbf{k}} = -\alpha z^2\hat{\mathbf{\imath}} - 2\alpha x z\hat{\mathbf{k}}$;

c) Il lavoro non dipende dal percorso perché sappiamo che la forza è conservativa, visto che abbiamo l'energia potenziale. Si ha quindi:
$L_{AB} = V_A - V_B = V(L,L,L) - V(2L,2L,2L) = \alpha L^3 - \alpha(2L)^3 = -7\alpha L^3$

Domande ed esempi di risposte pienamente sufficienti:

1) **Enunciare** e **spiegare** il secondo principio della dinamica.

Esempio minimale:

Enunciato:“Secondo principio della dinamica”: *In un sistema di riferimento inerziale, un corpo di massa m, soggetto ad una forza* $\vec{\mathbf{F}}$ *si muove con una accelerazione* $\vec{\mathbf{a}}$*, tale che:* $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$.

Spiegazione: il secondo principio della dinamica mette in relazione il moto di un corpo generico (o, con maggiore precisione, l’accelerazione di un corpo) con le cause che lo generano. Queste sono le forze che agiscono sul corpo. Si verifica che la risultante di tutte le forze che agiscono sul corpo è proporzionale al vettore accelerazione. Il coefficiente di proporzionalità è una caratteristica del corpo ed è chiamata massa inerziale del corpo.

2) Illustrare le caratteristiche della forza di attrito statico.

La forza di attrito statico è una forza che si esercita tra *superfici di contatto ruvide*, cioè non liscie, ed è presente ogni volta che su un corpo appoggiato su una superficie vi è una *forza tangenziale alla superficie che non è bilanciata*. Se, in tali condizioni, il corpo rimane fermo è perché è presente una *forza di attrito* che *bilancia complessivamente le altre forze agenti*. La forza di attrito statico *non è* quindi *nota a priori*, ma è sempre uguale a “quanto basta a tenere il corpo fermo”.

Vi è un limite massimo alla forza di attrito statico: tale limite dipende dalla forza agente perpendicolarmente alla superficie di contatto, detta forza di carico N, e da un coefficiente μ_s che dipende dalle due superfici: $\left|\vec{\mathbf{F}}_{AS}\right| < F_{AS}^{\max} = \mu_S N$. Usualmente si verifica che $0.01 < \mu_s < 1$.

3) Scrivere e spiegare le formule di Poisson.

Le formule di Poisson servono per descrivere *come cambiano i versori di un sistema di riferimento S’ in rotazione* rispetto ad un altro sistema S. Si verifica che i nuovi versori hanno un cambiamento nel tempo che può essere descritto da un *unico* vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ definito nel sistema di riferimento S:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{\imath}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\imath}' \\ \dfrac{d\hat{\jmath}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\jmath}' \\ \dfrac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}' \end{cases}$$