# Scritto totale di Fisica Generale T (L)

**INGEGNERIA EDILE**

**(prof. M. Villa)**

16/07/2015

Soluzioni Compito A

## Esercizi:

1. Due vagoncini, di massa *M*=200 g e 2*M* rispettivamente, di un treno giocattolo, si stanno muovendo nella stessa direzione su un binario rettilineo il primo con velocità *v*=30 cm/s e il secondo con velocità 2*v*. Ad un certo punto il secondo vagoncino raggiunge il primo e lo urta. Poiché i due vagoncini sono dotati di respingenti a molla, di costante elastica *k* nota, l'urto risulta elastico. Calcolare:
   a) Le velocità finali dei due vagoncini;
   b) La velocità del centro di massa dei due vagoncini prima e dopo l'urto.
   c) La massima energia immagazzinata nella molla durante l'urto;

### Soluzione:

a) Indicato con l'indice 1 il primo vagoncino (più leggero e più lento) e con l'indice 2 l'altro, per le due velocità finali nel caso di urto elastico (coefficiente di restituzione e=1) si ha:

$$\begin{cases} v_{1f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \\ v_{2f} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = \dfrac{-M}{3M} v + \dfrac{4M}{3M} 2v \\ v_{2f} = \dfrac{2M}{3M} v + \dfrac{M}{3M} 2v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = \dfrac{7}{3} v = 70 \text{ cm/s} \\ v_{2f} = \dfrac{4}{3} v = 40 \text{ cm/s} \end{cases}$$

b) Il sistema dei due corpi è soggetto a forze esterne equilibrate e quindi il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, con la stessa velocità prima e dopo l'urto. Tale velocità vale:

$$v_{CM,prima} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{Mv + 2M\,2v}{3M} = \frac{5}{3} v = 50 \text{ cm/s}$$

$$v_{CM,dopo} = \frac{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}{m_1 + m_2} = \frac{M\,\frac{7}{3}v + 2M\,\frac{4}{3}v}{3M} = \frac{5}{3} v = 50 \text{ cm/s}$$

c) In questo sistema si conserva l'energia meccanica. E' chiaro che durante l'urto la molla si comprime e poi si distende, immagazzinando una parte di energia cinetica del sistema. Nel momento di massima compressione, il moto relativo dei due vagoncini arrivano alla minima distanza. In quel preciso momento entrambi si muovono alla velocità del centro di massa (è la situazione che si realizza nel caso di un urto anelastico). In quel preciso istante l'energia cinetica del sistema è minima e quella potenziale della molla è massima. Possiamo valutarla come differenza tra l'energia iniziale e quella traslazionale dovuta al centro di massa:

$$V = \Delta E_{cin} = E_{cin\_iniziale} - E_{cin\_CM} = \tfrac{1}{2} m_1 v^2{}_{1i} + \tfrac{1}{2} m_2 v^2{}_{2i} - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2} M v^2 + \tfrac{1}{2} 2M (2v)^2 - \tfrac{1}{2}(3M)\left(\tfrac{5}{3}v\right)^2 = \tfrac{1}{2} M v^2 = 9 \text{ mJ}$$

2. Un punto di massa *m*=0,3 kg, in grado di muoversi lungo un asse *x*, è sottoposto ad una forza conservativa di potenziale $V(x) = -\dfrac{\alpha}{1+\beta x^2}$ con α=2 e β=4 nelle unità del SI e viene lasciato fermo in $x = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}}$ (nelle unità del SI). Determinare:

# Scritto totale di Fisica Generale T (L)

**INGEGNERIA EDILE**

**(prof. M. Villa)**

16/07/2015

a) le dimensioni delle costanti $\alpha$ e $\beta$;
b) la forza a cui è soggetto il corpo e i punti dell'asse $x$ di equilibrio stabile e/o instabile;
c) la velocità del corpo quando passa per $x$=0.

---

## Soluzioni:

a) Nell'espressione del potenziale il denominatore è senza dubbio adimensionale, per la presenza esplicita di una costante numerica ("1+.."). Quindi la costante $\alpha$ deve avere le dimensioni del potenziale $[V] = [\alpha] = [ML^2T^{-2}]$, che avendo le stesse dimensioni di un lavoro si misura in joule. La costante $\beta$ compare nell'espressione "$1+\beta x^2$". Essendo il primo addendo adimensionale, lo deve essere anche il secondo. Quindi: $[\beta x^2]=[M^0L^0T^0]$. Poiché $[x]=[L]$ ne segue che $[\beta]= [M^0L^0T^0]/[x^2]=[L^{-2}]$.

b) Dato il potenziale, per calcolare la forza basta calcolare il gradiente del potenziale e cambiarlo di segno. Poiché il potenziale dipende solo da $x$, si ha:

$$\vec{F} = -\nabla V = -\frac{dV}{dx}\hat{\imath} = -\frac{2\alpha\beta x}{\left(1+\beta x^2\right)^2}\hat{\imath}$$

I punti di equilibrio sono quelli dove la forza si annulla, che succede solo per $x$=0. Per x piccolo, posso trascurare il termine in $\beta x^2$ rispetto al resto e ottengo una forza elastica. Ne consegue che x=0 è un punto di equilibro stabile. (alternativamente: la derivata della componente x della forza è negativa, ne segue che x=0 è un punto di equilibrio stabile).

c) In questo problema si conserva l'energia meccanica. Visto che il punto viene messo in $x = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ con velocità nulla, ha una energia meccanica totale data da:

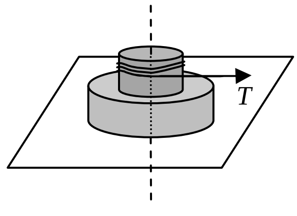
$E_M = K + V = 0 - \frac{\alpha}{1+\beta(1/\sqrt{\beta})^2} = -\frac{\alpha}{2} = -1 \text{ J}$. Quando passa in x=0, l'energia potenziale vale $V(0) = -\frac{\alpha}{1+\beta(0)^2} = -\alpha = -2 \text{ J}$ e quindi l'energia cinetica in 0 vale:

$K = E_M - V(0) = -\frac{\alpha}{2} + \alpha = \frac{\alpha}{2} = 1 \text{ J}$. La velocità in 0 vale quindi:

$$v = \sqrt{\frac{2K}{M}} = \sqrt{\frac{\alpha}{M}} = 2{,}58 \text{ m/s}$$

---

3. Un sistema meccanico è costituito da due dischi sovrapposti e solidali, uno di raggio $R=20$ cm e massa $M$=3 kg e l'altro di raggio $r=R/2$ e massa $m=M/4$, disposti come in figura. I dischi costituiscono un sistema rigido e sono liberi di ruotare attorno al loro asse di simmetria. Una corda ideale senza massa è avvolta sul bordo del disco più piccolo. A partire da una condizione in cui tutto è fermo si tira la corda con una tensione di $T$=0,2 N (costante), mettendo in moto l'intero sistema. Sapendo che la corda viene estratta per una lunghezza $\Delta l$=50 cm, determinare:




   a) Il momento d'inerzia dei due dischi;
   b) L'accelerazione angolare a cui sono sottoposti;
   c) L'energia meccanica finale del sistema.

---

# Scritto totale di Fisica Generale T (L)

**INGEGNERIA EDILE**

**(prof. M. Villa)**

16/07/2015

## Soluzione:

a) Il momento d'inerzia è una quantità additiva. Posso sommare i momenti d'inerzia dei due dischi per trovare quello complessivo. Poiché i dischi ruotano attorno allo stesso asse baricentrico, la soluzione è facile:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{17}{32}MR^2 = 63,7 \text{ g m}^2$$

b) Il sistema è sottoposto ad un momento della forza pari a $\tau$=(R/2)T e quindi avrà una accelerazione angolare (data dalla seconda equazione cardinale) pari a:

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{32RT/2}{17MR^2} = \frac{16T}{17MR} = 0,317 \text{ rad/s}^2$$

c) Inizialmente, quando tutto è fermo, l'energia meccanica è ovviamente nulla. Tirando la corda si effettua un lavoro pari a L=T$\Delta l$ che si trasforma integralmente in energia cinetica del sistema. L'energia meccanica finale del sistema è quindi in questo sistema $E=L=T\Delta l=0,1$ J.

# Scritto totale di Fisica Generale T (L)

**INGEGNERIA EDILE**

**(prof. M. Villa)**

16/07/2015

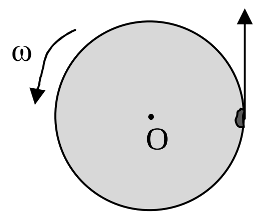
Compito B

## Esercizi:

1. Un proiettile di massa $M$=2 kg esplode in aria in due frammenti uguali ad una altezza $h$=4 m. Un attimo prima dell'esplosione la sua velocità ha modulo $v$=3 m/s ed è parallela al suolo. Un frammento procede nella stessa direzione con velocità di modulo $2v$. Calcolare:
   a) modulo, direzione e verso del secondo frammento;
   b) l'energia liberata nell'esplosione;
   c) quale dei due frammenti arriva prima a terra.

2. Un punto materiale di massa $m$=4 kg, in grado di muoversi lungo un asse $x$, è sottoposto ad una forza conservativa di potenziale $V(x) = \alpha(x^4 - \beta x^2)$ con α=2 e β=1 nelle unità del SI e viene lasciato fermo in $x = 2\sqrt{\beta}$ (nelle unità del SI). Determinare:
   a. le dimensioni delle costanti α e β;
   b. la forza a cui è soggetto il corpo e i punti dell'asse $x$ di equilibrio stabile e/o instabile;
   c. la velocità del corpo quando passa per $x$=0.

3. Un disco omogeneo di massa $M$=8 kg e raggio $R$=50 cm ruota senza attrito attorno al proprio asse su un piano verticale con velocità angolare $\omega_i$= 4 rad/s. Ad un certo istante un frammento di massa $m$=80 g, di dimensioni trascurabili, si stacca dal bordo del disco con velocità diretta verticalmente verso l'alto. Calcolare:
   a) di quanto si sposta il centro di massa del disco;
   b) la quota massima raggiunta dal frammento (calcolata rispetto al punto in cui si stacca);
   c) la velocità angolare e il momento d'inerzia finale del disco.




## Domande:

1. Enunciare le condizioni della statica e discutere con quali criteri è opportuno scegliere il polo per il calcolo dei momenti.
2. Enunciare e dimostrare il teorema delle forze vive.
3. Spiegare le caratteristiche principali della forza di attrito statico.

*Avvertenze: non è consentito consultare libri, appunti, compagni né avere in aula cellulari accesi o spenti. Risolvere almeno due esercizi e rispondere ad almeno due domande. Le risposte e le soluzioni devono essere espresse in termini dei simboli e dei dati specificati nel testo. Occorre spiegare i passi principali che hanno condotto alla soluzione. Se occorre, si consideri* $g = 9{,}8\, m/s^2$.