Esercizi di Calcolo vettoriale

Esercizio 1

Nel piano XY, la componente x di un vettore **v** vale -25, quella y +40. Quanto vale il modulo del vettore? Quanto vale l'angolo compreso fra **v** e l'asse delle ascisse?

Esercizio 2

Esprimere, mediante i versori cartesiani, il vettore **v** somma dei due vettori **a** = 4**i**+3**j** e **b** = -13**i**+7**j**. Quali sono il modulo e la direzione (rispetto ad **i**) di **v**?

Esercizio 3

Definita la terna ortogonale destrorsa **i**, **j** e **k**, verificare le relazioni **i•i** = **j•j** = **k•k** = 1; **i•j** = **j•k** = **i•k** = 0. Verificare quindi che **a•b** = $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Esercizio 4

Dati i due vettori **a** = 4**i-**3**j**+**k** e **b = -i**+**j**+4**k**, si trovino i vettori **a**–**b, a**+**b** ed un vettore **c** tale che **a+b**+**c** = 0.

Esercizio 5

Decollando un pilota d'aereo si porta a 4.8 Km di quota, ad una distanza di 9.6 Km a sud e di 12.8 Km ad ovest dal punto di decollo. Quali sono i coseni e gli angoli di direzione dell'aereo in questa posizione?

Esercizio 6

Nel piano XY, siano **a**, **b** e **c** tre vettori di modulo rispettivamente 3, 4 e 10. Sia **a** lungo il semiasse positivo delle ascisse, **b** formi un angolo di 30° in senso antiorario con **a**, e l'angolo fra **b** e **c** sia di 90° in senso antiorario. Calcolare le componenti x e y dei tre vettori. Trovare due numeri p e q tali che **c** = p**a**+q**b**.

Esercizio 7

Nella somma **a**+**b** = **c** il vettore **a** ha modulo 12 e forma un angolo di 40° rispetto al semiasse positivo delle ascisse, mentre il vettore **c** ha modulo 15 ed è diretto con un angolo di 20° in senso antiorario rispetto al semiasse negativo delle ascisse. Calcolare il modulo e la direzione (rispetto al semiasse positivo delle ascisse) di **b**.

Esercizio 8

Dati nel piano cartesiano i punti A = (5, 2), B = (3, 4), C = (1, 2) e D = (1, 5), determinare il valore dell'angolo formato dai segmenti CA e OB e di quello formato dai segmenti DA e OB.

Esercizio 9

Dati i vettori **a** e **b**, le cui coordinate cartesiane sono rispettivamente (4, 5, -3) e (0, 2, 2) calcolare **a•b**, **a**×**b** ed il valore dell'angolo compreso fra **a** e **b**.

Esercizio 10

Dati **a** = **i-j-k**, **b =** -2**i**+3**j** e **c** = -4**j**+2**k**, calcolare (**a**×**b**)×**c** e **a**×(**b**×**c**).

Esercizio 11

Nello spazio euclideo sono dati i 3 punti A = (5, 10, 2), B = (1, 1, 2) e C = (0, 3, 5). Calcolare l'area del triangolo ABC.

Esercizio 12

Preso un cubo e detta **A** la diagonale di una sua faccia, calcolare l'angolo formato da **A** e la diagonale principale del cubo.

Esercizio 13

Due vettori di ugual modulo ($\neq 0$) soddisfano le relazioni **a**×**b =** $\sqrt{2}$ **k** e $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \mathbf{a}\bullet\mathbf{b}$, ove **k** è il versore perpendicolare al foglio uscente da esso verso il lettore.

- Determinare il modulo dei due vettori.
- Disegnare una coppia di vettori che soddisfano le soprascritte relazioni ed determinare il valore dell'angolo ϑ formato dalle loro direzioni orientate.

Esercizio 14

Dimostrare che i vettori **a** = 2**i**-4**j**+3**k**, **b =** **i**+2**j**–**k** e **c** = -3**i**+2**j**-2**k** formano un triangolo e determinarne l'area.

Esercizio 15

Quali sono le proprietà di due vettori **a** e **b** tali che:

- **a**+**b** = **c** e a+b = c;
- **a**+**b = a**–**b**;
- **a**+**b** = **c** e $\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$.

Esercizio 16

Si deve calcolare la massa di un blocco di calcestruzzo (ρ = 2.32 g/cm^3), di forma di parallelepipedo, per poterlo adeguatamente rimuovere da un cantiere. Avendo posto l'origine di un sistema di riferimento cartesiano in uno dei suoi vertici, i tre spigoli sono individuati dai vettori **a** = **i**-0.5**j**+2**k**, **b** = -2**i**+**j**–**k** e **c** = -3**i**+2**j**-2**k**, dove i coefficienti sono espressi in m. Calcolare il peso del blocco.

Esercizio 17

Dimostrare che se uno dei vettori del prodotto interno **a•b** viene moltiplicato per uno scalare c, l'angolo compreso fra **a** e **b** resta immutato.

Esercizio 18

Determinare il volume del parallelepipedo individuato dai vettori **a** = 2**i**-**j**+**k**, **b** = -3**j** e **c** = -**i**+3**j**-2**k**.

Esercizio 19

Dati un vettore **v** ed un versore **n**, né paralleli né mutuamente perpendicolari, determinare:

- il vettore componente di **v** parallelo a **n**;
- il vettore componente di **v** perpendicolare a **n**.

Esercizio 20

Un punto Q è individuato nello spazio dalle coordinate cilindriche $\left(10, \frac{\pi}{2}, 3\right)$. Esprimere la posizione di Q in coordinate sferiche e cartesiane.

Esercizio 21

In un sistema di riferimento cartesiano, il punto A ha coordinate (3, 4, 5), dove i coefficienti sono espressi in dm. Un altro punto B si trova, rispetto ad A, alla stessa distanza dall'asse z e alla stessa distanza dal piano XY. La sua posizione è però ruotata di un angolo di 30° in senso antiorario rispetto all'asse z. Determinare la distanza fra A e B.

Esercizio 22

Immaginare di dover collegare mediante un traforo lineare due località sulla superficie terrestre (supposta perfettamente sferica, con R_{TERRA} = 6378 Km). La prima località ha coordinate 30° longitudine est e 30° latitudine nord. La seconda 90° longitudine ovest e 45° latitudine nord. Determinare la lunghezza di questo ipotetico tunnel.