Esercizi sulla Dinamica dei Sistemi

Alcuni suggerimenti per gli esercizi:

Calcolo del centro di massa di un sistema omogeneo complesso.

Si considerino le simmetrie del sistema di cui bisogna calcolare il centro di massa. Se il sistema è omogeneo e ha un asse (o un piano) di simmetria, il centro di massa si troverà sull'asse (o sul piano) medesimo.

Se il sistema è scomponibile in N sottosistemi, è possibile calcolare il centro di massa del sistema attraverso il calcolo dei centri di massa dei diversi sottosistemi ($X_{CM,i}$). In questi punti andrà "concentrata" la massa totale del relativo sottosistema (M_i). Si calcolerà infine il centro di massa del sistema iniziale, come centro di massa di un sistema di N oggetti di massa M_i e posizione $X_{CM,i}$.

Se il corpo, omogeneo, presenta dei "fori" (vedi esercizio 15, ad esempio) è possibile semplificare il calcolo del centro di massa del corpo considerando il sistema non forato come somma di due sottosistemi caratterizzati dalla stessa densità: quello "forato" (di massa M-m) e un sistema corrispondente al "foro", di massa m.
Quindi si ha

$$X_{CM,Sistema-"non-forato"} = \frac{(M-m)\times X_{CM,Sistema-"forato"} + m \times X_{CM,"Foro-riempito"}}{(M-m)+m}$$

Da cui la posizione del centro di massa del sistema reale (il sistema "forato") risulta essere, invertendo,

$$X_{CM,Sistema-"Forato"} = \frac{M \times X_{CM,Sistema-"Non-forato"} - m \times X_{CM,"Foro-riempito"}}{(M-m)}$$

Calcolo di momenti di inerzia (integrali su volumi)

In generale, l'espressione del momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse assume la forma:

$$I = \int_V h^2 dm$$

dove con *h* si intende la distanza dell'elemento infinitesimo *dm* dall'asse di rotazione rispetto cui si sta calcolando il momento di inerzia. L'integrale deve essere calcolato sull'intero corpo, che può avere 1, 2 o 3 dimensioni; se il corpo è omogeneo l'elemento *dm* sarà uguale alla densità, rispettivamente lineare, superficiale o volumetrica, per l'elemento di "volume" 1-, 2- o 3-dimensionale.
Il calcolo di momenti di inerzia di alcuni oggetti può essere semplificato se questi presentano delle caratteristiche di simmetria particolari, utilizzando le coordinate che meglio si adattano alla descrizione di tali simmetrie. In funzione delle nuove coordinate sarà necessario esprimere la grandezza *h*, gli estremi di integrazione (che definiscono il "volume" del corpo) e l'elemento volumetrico infinitesimo *dm*.
Se il corpo è ad esempio un oggetto bidimensionale con proprietà di simmetria circolare, il calcolo risulta semplificato se eseguito in coordinate polari piane. Se il corpo è un oggetto tridimensionale che ha una simmetria sferica o cilindrica sarà conveniente utilizzare le coordinate polari sferiche o cilindriche rispettivamente.

Riportiamo di seguito l'espressione degli elementi infinitesimi di volume nelle diverse coordinate. Per la definizione delle rispettive coordinate si veda il libro di testo o gli appunti di lezione.

Coordinate polari piane	$dS = r\, dr\, d\phi$
Coordinate polari sferiche	$dV = r^2 \operatorname{sen}\theta\ dr\, d\phi\, d\theta$
Coordinate polari cilindriche	$dV = r\, dr\, d\phi\, dz$

Esercizio 1

Due corpi A e B di massa 2 Kg si scontrano fra loro. Le velocità prima dell'urto sono $\mathbf{v}_{A,i} = 15\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$ e $\mathbf{v}_{B,i} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Dopo l'urto $\mathbf{v}_{A,f} = -5\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$. Tutte le velocità sono date in metri al secondo. Qual è la velocità finale di B? Quanta energia cinetica guadagna o perde nell'urto il corpo B? L'urto è elastico?

Esercizio 2

Una palla di stucco con una massa di 50 g ed una velocità $v_1 = 40$ cm/s compie una collisione diretta e perfettamente anelastica con una palla da biliardo inizialmente ferma e che ha una massa di 500 g. Determinare la velocità comune delle due palle dopo l'urto e le energie cinetiche prima e dopo l'urto dei diversi corpi.

Esercizio 3

Una forza $F = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ (con la forza sia espressa in N), agisce su un corpo nell'intervallo di tempo $0 \le t \le 5$ s. Determinare l'impulso che fornisce al corpo.

Esercizio 4

Un proiettile con una massa di 4 Kg viene tirato da un cannone che ha una massa di 3000 Kg, con una velocità di uscita di 350 m/s. Determinare la velocità iniziale di rinculo del cannone.

Esercizio 5

Due sfere P_1 e P_2 di masse rispettive $m_1 = m$ e $m_2 = 2m$ sono appese ciascuna ad un filo di lunghezza l, in modo da costituire due pendoli semplici contigui (Figura 1). Lasciando la massa m_2 ferma nella posizione iniziale ($\theta_{02} = 0$, $v_{02} = 0$), la massa m_1 viene portata a formare un angolo di $\theta_{01} = 45°$ con la verticale, e lasciato andare da ferma. Quali angoli θ_1 e θ_2 di elongazione massima raggiungono i due pendoli dopo l'urto, supposto elastico?

Esercizio 6

Una sottile sbarra di ferro lunga 63 cm viene piegata a forma di L con i lati di 36 cm e 27 cm. Determinare le coordinate del centro di massa assumendo come origine il vertice della L, e l'asse x orientato lungo il lato più corto.

Esercizio 7

Trovare la posizione del centro di massa di una lamiera triangolare isoscele omogenea di massa M, di base pari a 2b e altezza h.

Esercizio 8

Un cane di 5 kg è fermo su una zattera e dista 6 m dalla riva. Esso cammina per 3 m sulla zattera verso la riva e poi si ferma. La zattera ha massa pari a 20 Kg. Trascurando l'attrito fra acqua e zattera, calcolare quanto dista il cane dalla riva alla fine dello spostamento.

Esercizio 9

Calcolare il momento di inerzia di un cilindro omogeneo rispetto ad un asse perpendicolare alla sua base e passante per il suo centro.

Esercizio 10

Un cilindro di massa m_1 = 12 Kg può ruotare senza attrito attorno al proprio asse, disposto orizzontalmente. Attorno al cilindro è avvolto un filo che non slitta rispetto al cilindro (cioè si ha $a = \alpha \times R$) e sostiene un corpo di massa m_2 = 2 Kg. Inizialmente il sistema è in quiete. Calcolare l'accelerazione con cui scende il corpo m_2 ed il valore della tensione del filo.

Esercizio 11

Una particella in moto con una velocità u collide in modo elastico con un'altra inizialmente ferma. Se in conseguenza dell'urto la seconda particella acquista una velocità pari a 1/3 u nella direzione del moto della particella incidente, in che rapporto stanno le masse delle due particelle?

Esercizio 12

Una ballerina fa una piroetta partendo con le braccia aperte e muovendosi inizialmente con una velocità angolare ω_0. Trascurando l'attrito, determinare la velocità angolare ω_1 che la ballerina raggiunge se, raccogliendo le braccia sul petto, diminuisce di 1/9 il suo momento di inerzia rispetto all'asse verticale di rotazione e l'energia che deve spendere per compiere tale movimento.

Esercizio 13

Nel corso di una partita di baseball una palla di massa pari a 300 g, dopo aver raggiunto la mazza di uno dei giocatori con una velocità di 50 m/s, dopo il tiro prosegue in direzione opposta con una velocità di 100 m/s. Determinare la forza media che ha agito tra la palla e la mazza durante l'impatto, supponendo che l'urto sia durato 0.02 s.

Esercizio 14

Calcolare il momento di inerzia di un anello spesso di massa M con raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 rispetto ad un asse perpendicolare all'anello e passante per il suo centro.

Esercizio 15

In un disco omogeneo di centro O e diametro pari a 16 cm è praticato un buco a forma di cerchio, di centro O', che ha un diametro di 12 cm ed è tangente alla circonferenza del disco. Determinare la posizione del centro di massa del corpo.

Esercizio 16

Se le masse delle due palle m_1 e m_2 della figura 2 sono rispettivamente pari a 0.1 Kg e 0.2 Kg, e se m_1 viene lasciata andare quando si trova ad un'altezza h pari a 0.2 m, trovare le altezze alle quali ritornano dopo aver colliso, se la collisione è elastica.

Esercizio 17

Calcolare il momento di inerzia di una lamina omogenea a forma di triangolo rettangolo di cateti A e B, la cui massa è M, rispetto al cateto A.

Esercizio 18

Un sistema è costituito da due particelle di massa m_1 e m_2 poste a distanza r l'una dall'altra. Calcolare l'espressione generale per la posizione del centro di massa del sistema, in un sistema di riferimento che abbia l'origine coincidente con la massa m_1. Calcolare la posizione del centro di massa del sistema Terra-Luna sapendo che $M_T = 5.98 \times 10^{24}$ Kg, $M_L = 7.34 \times 10^{22}$ Kg e che la distanza Terra-Luna è pari a 3.84×10^8 m.

Esercizio 19

Un disco omogeneo di raggio 0.5 m e massa 20 Kg può ruotare liberamente attorno ad un asse orizzontale fisso passante per il suo centro, ed appoggiato su due sostegni. Una fune, avvolta attorno al bordo del disco, è legata ad un corpo di 1 Kg. Nell'ipotesi che la fune non slitti sul disco, calcolare i moduli dell'accelerazione angolare del disco e dell'accelerazione lineare del corpo ad esso legato. Calcolare il modulo della velocità angolare del disco dopo 2 s, nell'ipotesi in cui il disco parta da fermo.

Esercizio 20

Un pendolo balistico è un dispositivo utilizzato per misurare la velocità di un proiettile di massa nota m (Figura 3). Questo viene sparato su una massa M nota (nella quale rimane inserito), appesa al soffitto mediante un filo inestensibile. Dalla misura della quota a cui il sistema blocco-proiettile giunge in seguito all'urto è possibile determinare la velocità del proiettile. Se il proiettile pesa 0.1 Kg, il blocco 2 Kg e l'altezza cui arriva il sistema blocco-proiettile è pari a 10 cm, calcolare la velocità di impatto del proiettile.

Esercizio 21

Un cilindro pieno di rame (densità $\rho = 8.9$ g/cm^3) con raggio R = 2 cm e lunghezza l = 30 cm ruota attorno ad un asse longitudinale che passa per il suo centro di massa. Determinare il momento di inerzia rispetto a tale asse. Se si trascura l'attrito, che accelerazione angolare acquista il cilindro se, per mezzo di una corda avvolta intorno ad esso, gli si appende un peso di 2 Kg? Determinare il valore della velocità angolare dopo 3 s dall'applicazione del peso.

Esercizio 22

Un corpo rigido è costituito da due sfere di massa 2 Kg e raggio R = 10 cm, collegate da un'asta lunga d = 20 cm e di massa m = 1 Kg, disposta lungo la retta che passa per i centri delle sfere. Calcolare il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per il centro dell'asta e a questa perpendicolare.

Esercizio 23

Calcolare il momento di inerzia di:

1. Una sfera omogenea di massa M e raggio R, rispetto ad un asse t passante per il suo centro;
2. Una sfera omogenea di massa M e raggio R, rispetto ad un asse passante s per un punto posto sulla sua superficie e a questa tangenziale;
3. Un parallelepipedo omogeneo di spigoli a, b e c, rispetto ad un asse t parallelo allo spigolo c e passante per il centro di massa del parallelepipedo;
4. Un disco omogeneo di massa M e raggio R rispetto ad un asse t passante per il suo centro di massa e appartenente al piano contenente il cilindro;
5. Una ruota (tutta la massa si può considerare distribuita sulla circonferenza di raggio R) omogenea di massa M e raggio R, rispetto ad un asse t ortogonale alla ruota stessa e passante per il suo centro.

Esercizio 24

Si considerino un proiettile con una massa di 25 g che viaggia con una velocità di 500 m/s ed un treno merci con una massa di 10^6 Kg che viaggia con una velocità di 1 cm/s. Determinare la quantità di moto e l'energia cinetica rispettive; il tempo e la distanza necessari per far fermare sia il treno che il proiettile applicando ad ognuno di essi una forza frenante di 100 N.

Esercizio 25

Una forza costante di 1960 N applicata tangenzialmente al bordo di una ruota con raggio R = 100 cm ne fa variare la frequenza di rotazione da 2 a 4 Hz in 30 s. Determinare il momento di inerzia della ruota intorno al suo asse; il modulo della variazione del momento angolare nei 30 s considerati; l'angolo θ descritto dalla ruota in questo intervallo di tempo; l'energia spesa per produrre l'aumento di momento angolare.

Esercizio 26

Un corpo rigido è costituito da due dischi sottili coassiali, aventi la stessa densità, uno di raggio R = 10 cm, l'altro di raggio doppio. La massa totale è m = 5 Kg. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro del corpo e ortogonale ai dischi.

Esercizio 27

Una ruota che gira è soggetta ad un momento di attrito rispetto al suo asse di 10 Nm. Il raggio della ruota è di 0.6 m, la sua massa di 100 Kg e la sua velocità angolare iniziale di 175 rad/s. Quanto tempo è necessario perché la ruota si fermi? Quante rivoluzioni compie la ruota prima di fermarsi?

Esercizio 28

Un disco pesante 20 tonnellate, ha un diametro di 9 m e la sua massa è uniformemente distribuita sulla superficie. Trascurando l'attrito, determinare la velocità angolare che impartisce al disco in 2 minuti un motore da 375 W.

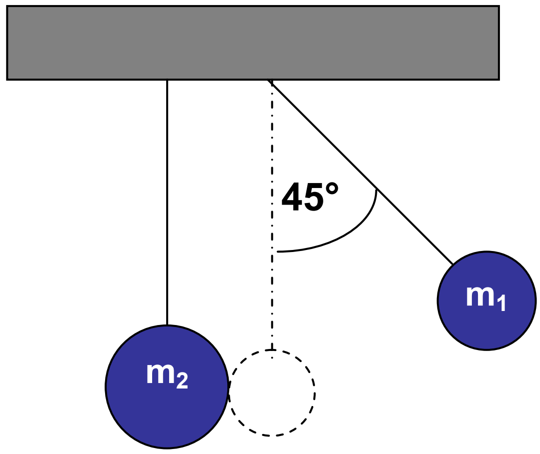

Figura 1

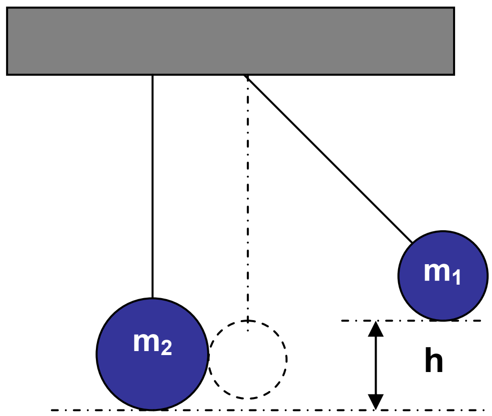

Figura 2

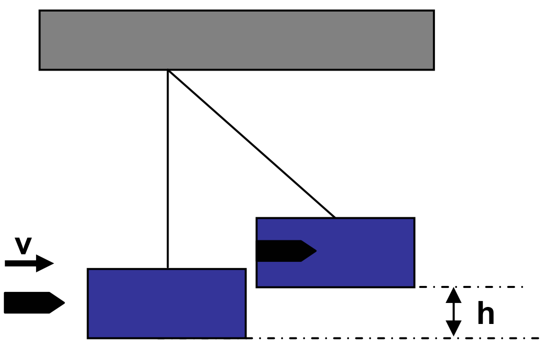

Figura 3