Valor medio e Varianza di una v.a.

per caratterizzare in modo sintetico, ma approssimativo, una v.a. si fa uso di indicatori di centralita' e di dispersione

i principali indicatori sono il valor medio $<v.a.>$, indicato anche come μ, quale indice di centralita'

e la varianza $Var(v.a.)$ oppure $\sigma_{v.a.}{}^{2}$ come indice della dispersione intorno al valor medio

o piu' frequentemente la radice quadrata della varianza $\sigma_{v.a.}$ detta ''deviazione standard''

o anche "root mean square" ($r.m.s.$) oppure ''scarto quadratico medio''

per una v.a. discreta k che abbia distribuzione di probabilita' propriamente normalizzata all'unita'

$$< k > = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(k_i) \quad \sigma_k^2 = \sum_{i=1}^{n} (k_i - < k >)^2 \cdot P(k_i) \quad \sigma_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (k_i - < k >)^2 \cdot P(k_i)}$$

per una v.a. continua x con densita' di probabilita' propriamente normalizzate all'unita'

$$< x > \equiv \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad \sigma_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx}$$

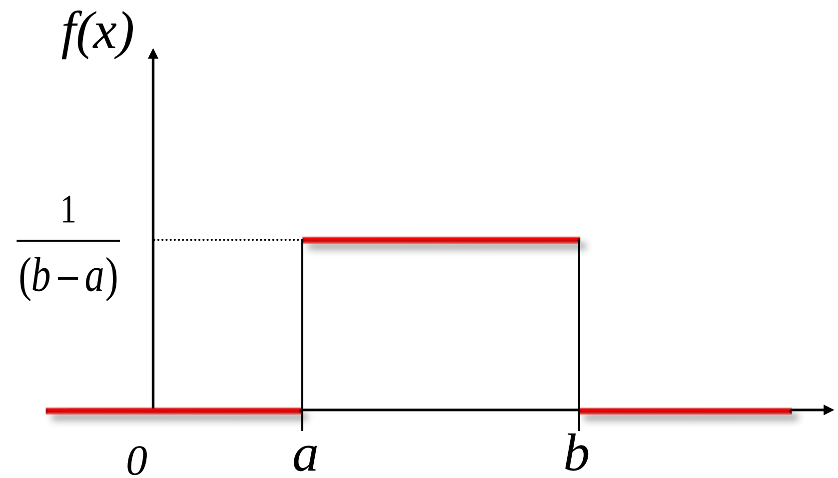
Variabile aleatoria uniforme nell'intervallo $[a,b]$

la variabile aleatoria (v.a.) uniforme x e' distribuita in "modo uniforme" o "a caso" nell'intervallo $[a,b]$

se caratterizza una v. a. che assume con **uguale probabilita'** **tutti i valori compresi tra *a* e *b***

la densita' di probabilita' *f(x)* di questa v. a. e'

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{(b-a)} & per\ x \in [a,b] \\ f(x) = 0 & altrove \end{cases}$$



valor medio ($< x > \equiv \mu$) = $\dfrac{(b+a)}{2}$

varianza (σ^2_x) = $\dfrac{(b-a)^2}{12}$

r.m.s (σ_x) = $\dfrac{b-a}{\sqrt{12}}$

f(x) e' sempre > 0 quindi il primo assioma di Kolmogorov e' soddisfatto

Normalizzazione della densita' di probabilita'

verifichiamo che la densita' di probabilita' $f(x)$ sia correttamente normalizzata:

ossia che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (secondo assioma di Kolmogorov)

in questo caso : $f(x) = \dfrac{1}{(b-a)}$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \frac{1}{(b-a)}dx = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b dx$$

$$= \frac{1}{(b-a)} x\Big|_a^b = \frac{1}{(b-a)}(b-a) = 1$$

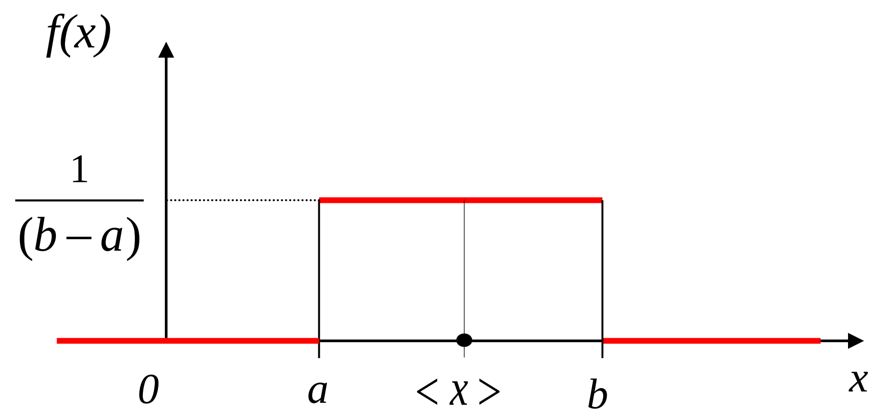
Valor medio della variabile aleatoria uniforme nell'intervallo $[a,b]$

per definizione di valor medio di una variabile aleatoria continua x $\quad < x > \; = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx$

in questo caso $\quad < x > \; = \int_a^b x\, f(x) dx \; = \int_a^b x \, \frac{1}{(b-a)} dx \; = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b x \, dx \; = \frac{1}{(b-a)} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(b-a)} (b^2 - a^2) \; = \frac{1}{2} \frac{1}{(b-a)} (b-a)(b+a) \; = \frac{b+a}{2}$$

dunque $\quad < x > \; = \dfrac{a+b}{2}$



Varianza della variabile aleatoria uniforme nell'intervalllo $[a,b]$

per definizione :

$$Var(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 \; f(x) dx$$

dato che $\langle x \rangle = \dfrac{a+b}{2}$

e che $f(x) = \dfrac{1}{(b-a)}$ in $[a,b]$

$$Var(x) = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \; \frac{1}{(b-a)} dx$$

$$= \frac{1}{(b-a)} \int_a^b \left(x^2 - 2x \frac{(a+b)}{2} + \frac{(a+b)^2}{4} \right) \; dx$$

$$= \frac{1}{(b-a)} \int_a^b x^2 dx \; - \; \frac{(a+b)}{(b-a)} \int_a^b x \, dx \; + \; \frac{1}{(b-a)} \int_a^b \frac{(a+b)^2}{4} \; dx$$

$$= \frac{1}{(b-a)} \frac{x^3}{3} \Bigg|_a^b \; - \; \frac{(a+b)}{(b-a)} \frac{x^2}{2} \Bigg|_a^b \; + \; \frac{(a+b)^2}{4(b-a)} x \; \Bigg|_a^b$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)(b^2-a^2)}{2(b-a)} + \frac{(a+b)^2(b-a)}{4(b-a)}$$

ma $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2)$

e $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$

$$= \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} - \frac{(a+b)(b-a)(b+a)}{2(b-a)} + \frac{(a+b)^2(b-a)}{4(b-a)}$$

$$= \frac{(b^2+ab+a^2)}{3} - \frac{(a+b)(b+a)}{2} + \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{4(b^2+ab+a^2)}{12} - \frac{6(a+b)^2}{12} + \frac{3(a+b)^2}{12}$$

$$= \frac{1}{12}\left(4b^2+4ab+4a^2-3(a+b)^2\right) = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3(a^2+2ab+b^2)}{12}$$

$$= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3(a^2+2ab+b^2)}{12} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12} \Rightarrow \textbf{r.m.s} = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

si dimostra che, del tutto in generale, sussiste la relazione : $Var(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

sfruttando questa relazione si sarebbe giunti, piu' rapidamente, allo stesso risultato

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f(x)dx = \int_a^b x^2 \, \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b x^2 dx$$

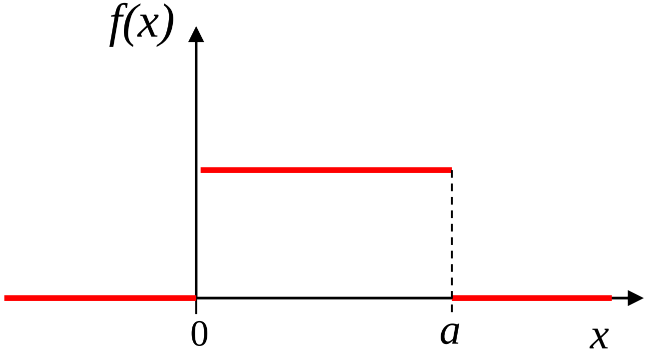
$$= \frac{1}{(b-a)} \frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$\langle x \rangle = \frac{a+b}{2} \quad \Rightarrow \quad \langle x \rangle^2 = \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$$

quindi $$Var(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$$

$$= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Variabile aleatoria uniforme in [0,a]



la densita' di probabilita' $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{per } 0 < x < a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

e' la densita' di probabilita' della variabile aleatoria uniforme:
e caratterizza una variabile che assume con uguale probabilita' tutti i valori tra 0 ed a

verifichiamo innnanzitutto che la densita' di probabilita' sia correttamente normalizzata:

ossia che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

in questo caso : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \Rightarrow \int_0^a f(x)dx = \int_0^a \frac{1}{a}dx = \frac{1}{a}x\Big|_0^a = \frac{1}{a}(a-0) = 1$

per definizione di valor medio di una variabile aleatoria continua x $\quad < x >= \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)dx$

in questo caso $\quad < x > = \int_0^a x\ f(x)dx = \int_0^a x\frac{1}{a}dx = \frac{1}{a}\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{1}{a}(\frac{a^2}{2} - 0) = \frac{a}{2}$

dunque $< x > = \frac{a}{2}$

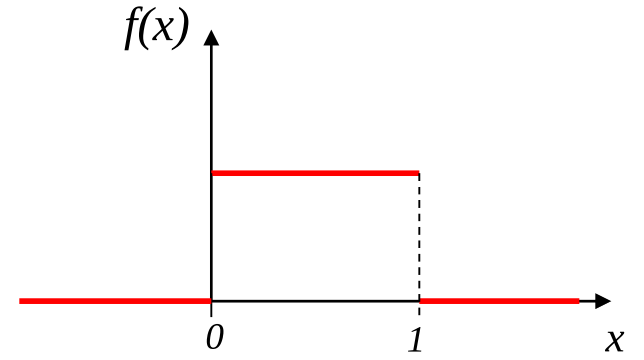
sfruttando la relazione : $Var(x) = <x^2> - <x>^2$

$$<x^2> = \int_0^a x^2 \ f(x)dx = \int_0^a x^2 \ \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^a = \frac{1}{a} \left(\frac{a^3}{3} - 0 \right) = \frac{a^2}{3}$$

$$Var(x) = <x^2> - <x>^2 = \frac{a^2}{3} - \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}$$

dunque $Var(x) \equiv \sigma_x^2 = \frac{a^2}{12}$ e $\sigma_x \equiv r.m.s = \sqrt{\frac{a^2}{12}} = \frac{a}{\sqrt{12}}$

Variabile aleatoria uniforme in [0,1]



la densita' di probabilita' $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e' la densita' di probabilita' della variabile aleatoria uniforme:
e caratterizza una variabile che assume con uguale probabilita' tutti i valori tra 0 ed a

verifichiamo innnanzitutto che la densita' di probabilita' sia correttamente normalizzata:

ossia che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

in questo caso : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 1 \cdot dx = x\Big|_0^1 = (1-0) = 1$

per definizione di valor medio di una variabile aleatoria continua x $\quad < x >= \int_{-\infty}^{+\infty} x \; f(x)dx$

in questo caso $< x > \; = \int_0^1 x \, f(x)dx = \int_0^1 x \; 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = (\frac{1}{2} - 0) = \frac{1}{2}$

dunque $< x > \; = \frac{1}{2}$

sfruttando la relazione $Var(x) = <x^2> - <x>^2$

$$<x^2> = \int_0^1 x^2 \, f(x)dx = \int_0^1 x^2 \, 1 \cdot dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = (\frac{1}{3} - 0) = \frac{1}{3}$$

$$Var(x) = <x^2> - <x>^2 = \frac{1}{3} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

dunque $Var(x) \equiv \sigma_x^2 = \dfrac{1}{12}$ e $\sigma_x \equiv r.m.s = \sqrt{\dfrac{1}{12}} = \dfrac{1}{\sqrt{12}}$