Proprieta' delle grandezze fisiche

le grandezze fisiche possono essere :

intrinseche ai corpi

invarianti relativistiche

conservate nel tempo

continue o *discrete*

scalari o *vettoriali*

Nota bene: esistono altri tipi di grandezze in natura quali le grandezze *pseudoscalari* e le grandezze *tensioriali*

Grandezze scalari

grandezze fisiche caratterizzabili da una funzione dello spazio e del tempo,

ad un ***singolo*** *valore* sono dette ***scalari***

ad es. la temperatura T e' determinata da un singolo valore numerico

- $T = T(x,y,z,t)$

altre grandezze scalari sono la massa e la carica elettrica

massa	**carica elettrica**
in meccanica classica e' una caratteristica ***intrinseca*** di un corpo materiale mentre in meccanica relativistica dipende dalla velocita' $m = m(\mathrm{v})$	nel mondo subatomico e' una proprieta' intrinseca di ogni particella elementare e' un *invariante* relativistico
$E = mc^2$ quindi la massa totale puo' *non* conservarsi anche se si e' in un sistema isolato	e' una grandezza che si conserva in senso assoluto → se il sistema e' isolato la carica **totale netta** non si crea, ne' si distrugge
e' una grandezza ***continua***	e' una grandezza ***quantizzata***
e' una grandezza ***scalare***	e' una grandezza ***scalare***

Grandezze vettoriali

alcune grandezze fisiche sono determinate univocamente solo se sono

associate anche ad una direzione e ad un verso

si parla di grandezze *vettoriali*

ad es. lo spostamento da un punto all'altro dello spazio di una distanza Δs

dai ancora un piccolo passo …

adozione del metodo scientifico

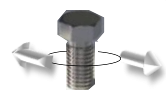
uso del linguaggio matematico	effettuazione di esperimenti	riproducibilita' dei risultati
?	✓	✓

per piantare un chiodo

martello

applicazione di una **forza**

per serrare un bullone



chiave inglese

applicazione di una **coppia di forze**

per avvitare una vite

cacciavite

applicazione di una **forza** e di una **coppia di forze**

dobbiamo fornirci di **strumenti** di lavoro adeguati

dobbiamo fornirci di "**strumenti**" matematici adeguati per "**maneggiare**" appropriatamente le grandezze fisiche

Nota :

alle volte si scopre che modificando leggermente le condizioni di utilizzo

lo stesso strumento puo' essere usato anche in altri contesti oltre a quello

per cui era stato originariamente pensato…

ad es. l'operatore ''flusso di un campo vettoriale''

calcolato su di una superfice aperta

o su di una superfice chiusa

Nota : da ora in poi io considererero' la matematica solo come un puro e semplice

strumento di lavoro anche se la matematica e' molto di piu'

di un semplice strumento perche' puo' essere essa stessa

una fonte di conoscenza del mondo fisico

Nota : differenza tra matematica e fisica per ''maneggiare'' appropriatamente le grandezze fisiche che sono determinate

univocamente solo se sono associate oltre che ad una funzione dello spazio

e del tempo a singolo valore anche ad una direzione e ad un verso

dobbiamo fornirci di uno strumento matematico adeguato

- utilizzeremo un entita' matematica detta: *vettore libero*

  o semplicemente ***vettore***

per **specificare** che la generica

grandezza a e' vettoriale

la si sovrasta con una freccia : $\vec{a}$

per **rappresentarla graficamente**

si usa disegnare una freccia orientata

nella stessa direzione e verso

della grandezza vettoriale 

la **dimensione fisica** di una grandezza vettoriale e' la stessa del suo modulo

a e' il "***modulo***" o "***intensita***" del vettore $\vec{a}$ → $|\vec{a}| = a$

nota: in alcuni libri di testo si usa la convenzione di scrivere

le grandezze vettoriali in grassetto : $\boldsymbol{a}$

e di conseguenza si scrivera' $|\boldsymbol{a}| = a$ etc.

matematicamente due vettori sono uguali se hanno:

stesso **modulo** (**intensita'**), stesso **verso** e direzione **parallela**

→ tutti i segmenti orientati nello stesso verso, paralleli, e di uguale lunghezza (vettori **equipollenti**) rappresentano lo stesso vettore

differenze tra matematica e fisica :

- **in matematica il fatto che i vettori equipollenti rappresentino lo stesso vettore discende dall'assunzione di operare in uno spazio euclideo**

- **in fisica prima di poter fare la stessa assunzione bisognera' verificare se e' vero che viviamo in un universo piatto e cio' non e' vero in assoluto → vedi la teoria della relativita' generale**

Vettori applicati

ma nella pratica cio' non e' sufficiente ad es. applicare una forza

in punti diversi di un corpo esteso – ***non*** – produce lo stesso effetto

percio' per determinare univocamente una grandezza vettoriale in fisica

e' necessario specificarne

- *modulo*
- *direzione*
- *verso*
- *punto di applicazione* (il punto in cui si trova l'origine del vettore)

un vettore cosi' specificato e' detto *vettore applicato*

<u>*attenzione*</u> : esistono grandezze definibili tramite modulo direzione e verso

che non obbediscono alla regola della somma vettoriale

e che quindi non sono grandezze vettoriali

ad es. le rotazioni di un angolo <u>***finito***</u> di un corpo rigido

possono essere caratterizzate da tre grandezze :

una direzione nello spazio, *l'* ***asse di rotazione***,

un verso*, il* ***senso di rotazione*** *orario o antiorar*ario,

e una intensita' corrispondente all'entita' dell' ***angolo di rotazione***

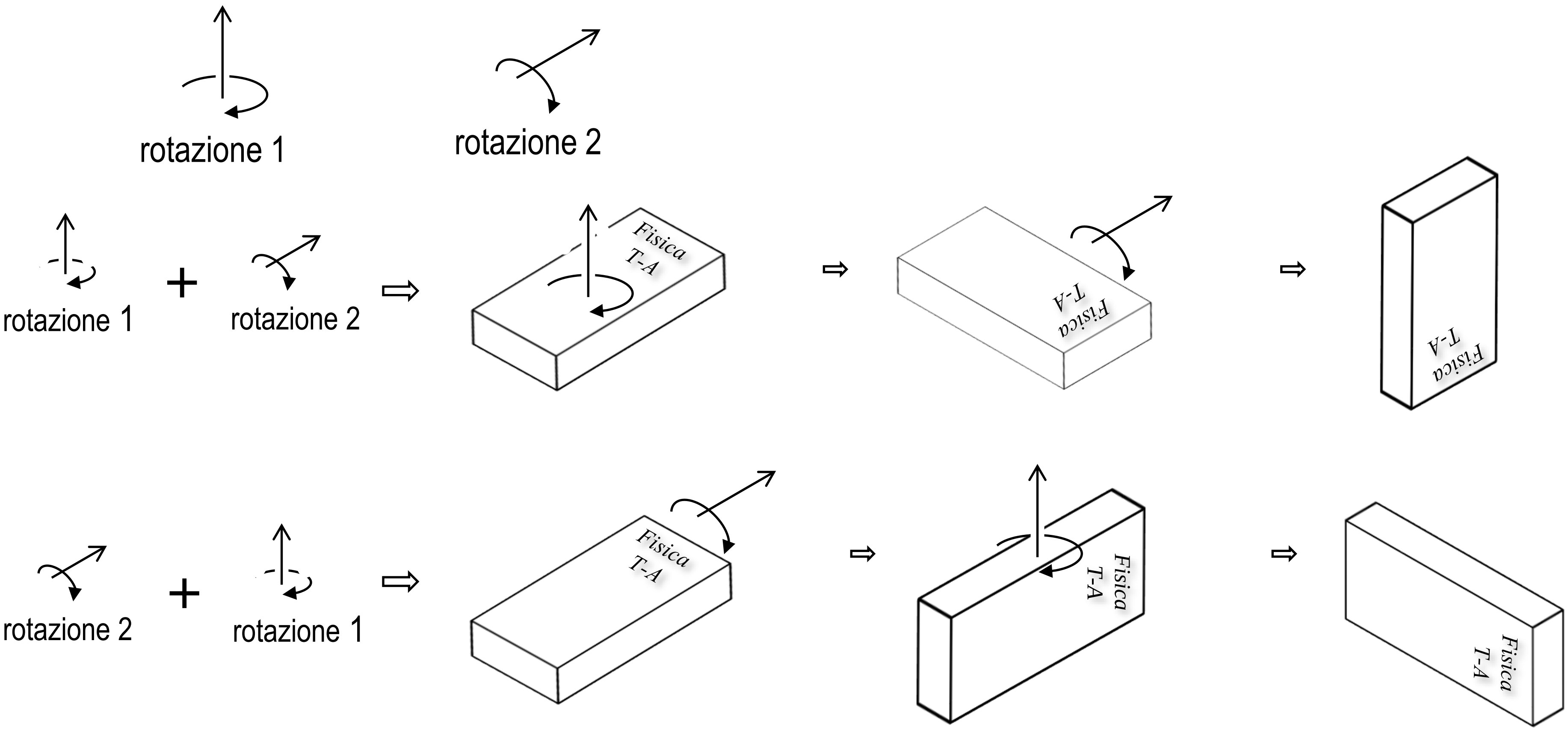
<u>ma non costituiscono un vettore</u>

in quanto l'esecuzione di due rotazioni finite successive,

ossia la somma di due rotazioni finite ,

non soddisfa le regole di commutativita' della somma vettoriale

- eseguendo due rotazioni successive di un oggetto di un angolo θ **finito** si ha che il risultato dipende dall'**ordine** con cui si sono eseguite le rotazioni



attenzione: se le rotazioni fossero infinitesime a meno di infinitesimi di ordine superiore il risultato <u>non</u> dipenderebbe dall'ordine con cui vengono effettuate le rotazioni infinitesime → e' possibile definire univocamente il vettore $d\vec{\vartheta}$

Nota bene:

quantita' infinitesime di una entita' fisica

possono avere proprieta' diverse da quelle possedute

da una quantita' finita di quella stessa entita' fisica

esempio: vettore spostamento $\Delta\vec{r}$ e vettore spostamento infinitesimo $d\vec{r}$

percio' per definire le grandezze vettoriali dovremo stabilire le regole a cui

obbediscono queste grandezze ossia definire delle operazioni

che le associno ad altri vettori o ad altre grandezze e specificare le proprieta'

di queste operazioni → in termini matematici definire l' algebra vettoriale

- in effetti i vettori vengono definiti con le stesse proprieta' di trasformazione del vettore posizione rispetto a rotazioni e traslazioni, anche se sono entita' indipendenti dal sistema di riferimento a parte il vettore posizione stesso

il vettore posizione e'particolare in quanto viene definitoa partire da una origine partendo dal mondo fisico consideriamo lo *spostamento*

da una posizione ad un'altra dello spazio

se un corpo che si muove in un piano si sposta prima dal punto A al punto B

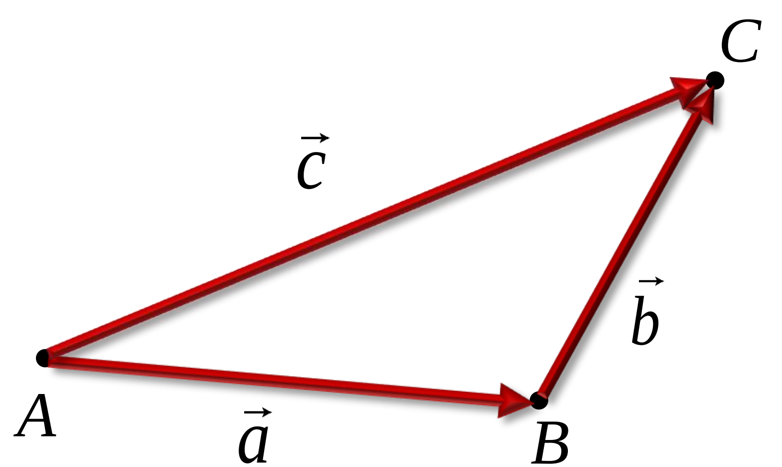
e successivamente da B a C lo spostamento complessivo del corpo

sara' stato da A a C e se e' naturale associare il vettore $\vec{a}$

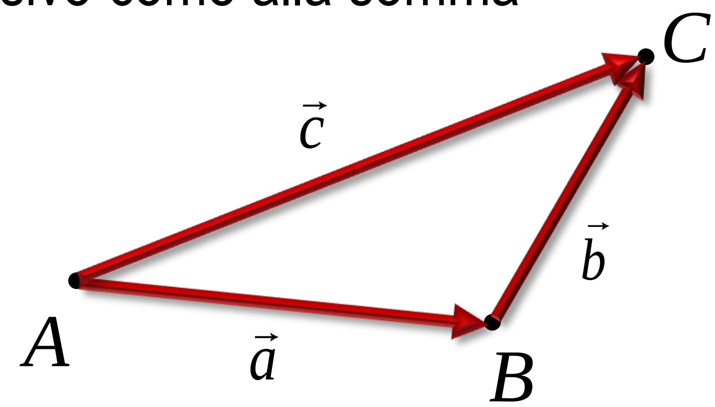
allo spostamento da A a B e il vettore $\vec{b}$ allo spostamento da B a C

lo spostamento complessivo da A a C

sara' descritto dal vettore $\vec{c}$



- e' intuitivo pensare allo spostamento complessivo come alla somma degli spostamenti $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e postulare che $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



Attenzione :

in generale il modulo (la lunghezza) del vettore somma $\vec{c}$

<u>non</u> e' uguale alla somma dei moduli (delle lunghezze) dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

salvo il caso in cui due spostamenti giacciano sulla stessa retta

in altri termini :

nel caso di spostamenti finiti il modulo del vettore spostamento complessivo $\vec{c}$

in generale **<u>non</u>** fornisce lo spazio effettivamente percorso dal corpo

nello spostarsi dal punto A al punto C che e' pari a $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

Proprieta' della somma di vettori

la somma vettoriale gode della proprieta' commutativa

e della proprieta' associativa

commutativa $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

associativa $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}\ =\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

Moltiplicazione

la moltiplicazione di un vettore $\vec{a}$ per un *numero* k con $k \in \mathbb{R}$

fornisce un vettore ➤ se $\vec{b} = k\,\vec{a}$ per definizione si ha che:

- modulo di $\vec{b}$ → il modulo di $\vec{b}$ e' pari a $|k|$ volte il modulo di $\vec{a}$
- direzione di $\vec{b}$ → $\vec{b}$ ha *sempre* la stessa direzione di $\vec{a}$
- verso di $\vec{b}$ → se $k > 0$ $\vec{b}$ ha verso **concorde** ad $\vec{a}$
  → se $k < 0$ $\vec{b}$ ha verso **discorde** ad $\vec{a}$

se $k = -1$ si ha $\vec{b} = -\vec{a}$

e in questo caso $\vec{b}$ ha

stesso **modulo** di $\vec{a}$

stessa **direzione** di $\vec{a}$ → $\vec{b}$ e' il ***vettore opposto*** ad $\vec{a}$

verso ***opposto*** ad $\vec{a}$

Nota bene:

se k fosse una grandezza scalare dotata di dimensioni fisiche il vettore $\vec{b} = k\,\vec{a}$ avrebbe come dimensione fisica il prodotto della dimensione di k per la dimensione del modulo di $\vec{a}$

Vettore unitario o ”versore”

data una retta orientata r vi sono infiniti vettori che hanno stessa direzione e stesso verso ma che differiscono tra loro per il modulo

un vettore **di modulo unitario** orientato nella direzione e verso della retta r

e’ detto ***versore*** e viene indicato con il simbolo $\hat{u}_r$ o $\hat{r}$

un ***versore*** individua solamente una direzione ed un verso nello spazio

ad es. il segnale di senso unico 

Scomposizione di un vettore

due semirette orientate r ed s che si intersecano in un punto definiscono un piano nello spazio

qualunque vettore $\vec{a}$, giacente nel piano individuato dalle due rette,

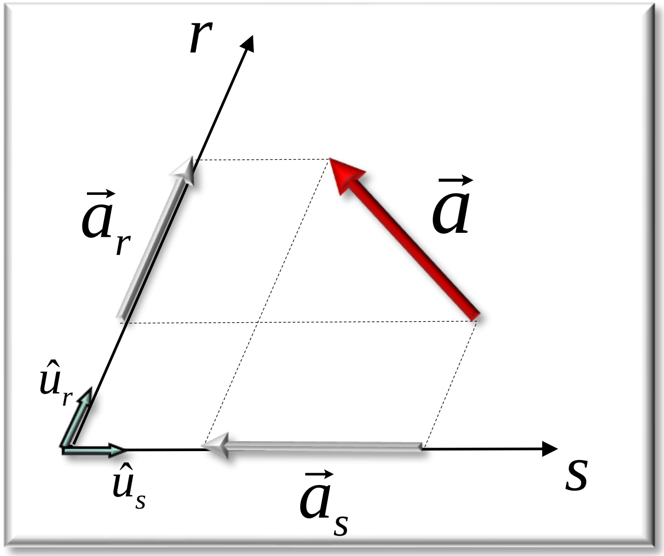
puo' essere scomposto nella somma di due vettori $\vec{a}_r$ e $\vec{a}_s$ paralleli

alla retta r ed alla retta s

se le due rette sono caratterizzate dai versori $\hat{u}_r$ e $\hat{u}_s$ (da notare che l'angolo formato dalle due semirette non e' necessariamente di 90°)

e se $\vec{a}$ e' un vettore giacente nel piano individuato dalle due rette

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_s = a_r\hat{u}_r + a_s\hat{u}_s$$



dove $a_r = |\vec{a}_r|$ e $a_s = |\vec{a}_s|$

$\vec{a}_r$ e $\vec{a}_s$ sono i vettori componenti o " *i componenti* "

a_r e a_s sono " *le componenti* "

Sistemi di riferimento cartesiani ortogonali

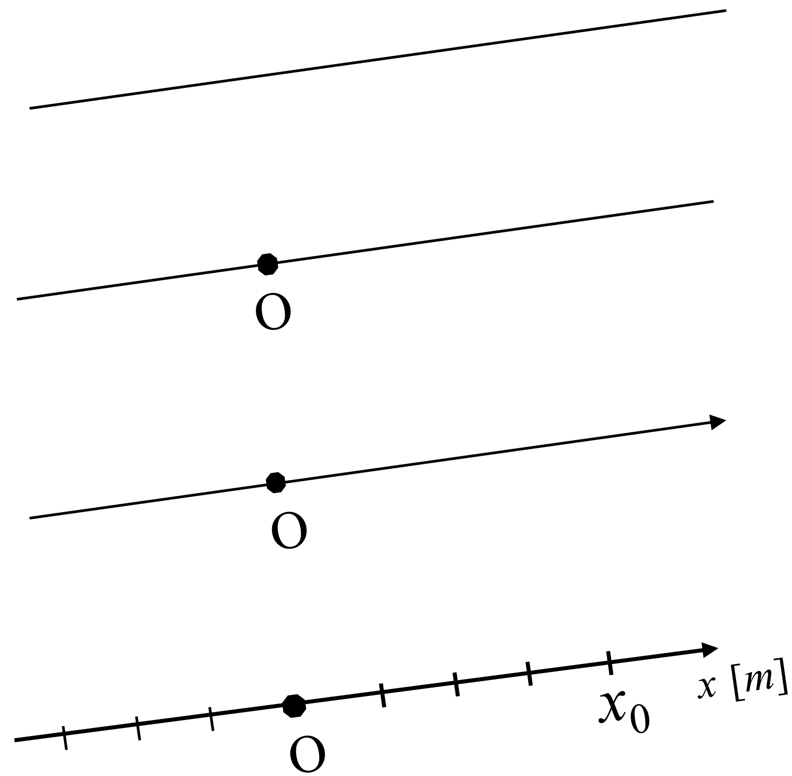
in **una dimensione** : si sceglie

• una retta che individua la direzione

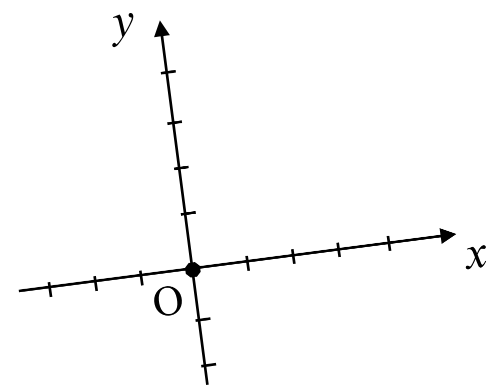
• un punto qualunque della retta detto “origine”

• un verso positivo della retta

• si associa ad un generico punto x_0 della retta un numero pari alla distanza del punto in esame dall’ origine del sistema di coordinate



nel **piano**, si scelgono due direzioni indipendenti e perpendicolari tra loro e si costituisce un sistema di riferimento cartesiano ortogonale bidimensionale



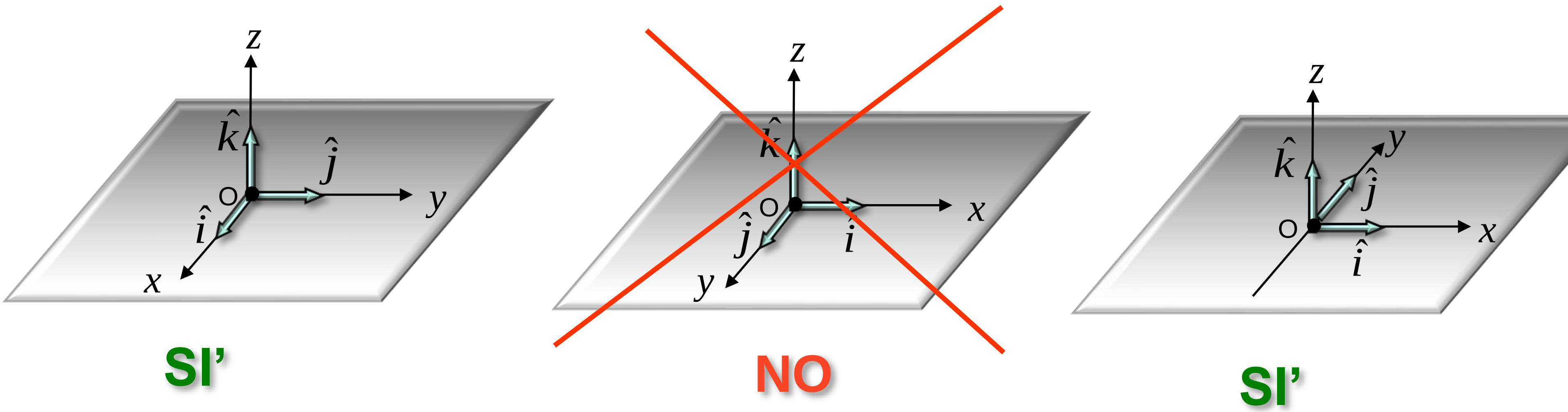
nello **spazio**, si scelgono tre direzioni indipendenti e perpendicolari tra loro e si costituisce un un sistema di riferimento cartesiano ortogonale tridimensionale

i tre versori che caratterizzano i tre assi cartesiani si indicano con $\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$

e sono orientati nelle direzioni degli'assi x, y e z rispettivamente

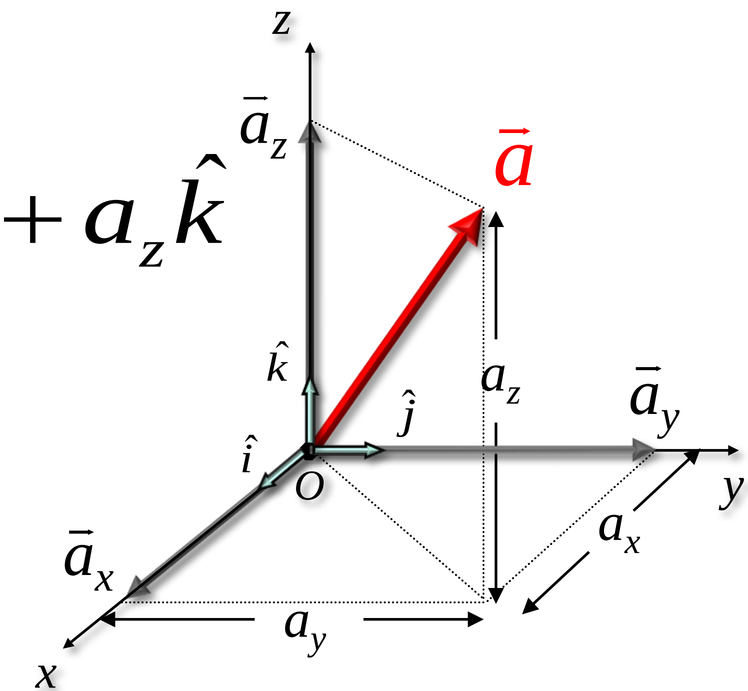
Attenzione :

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ costituiscono una terna ***unitaria ordinata positivamente***

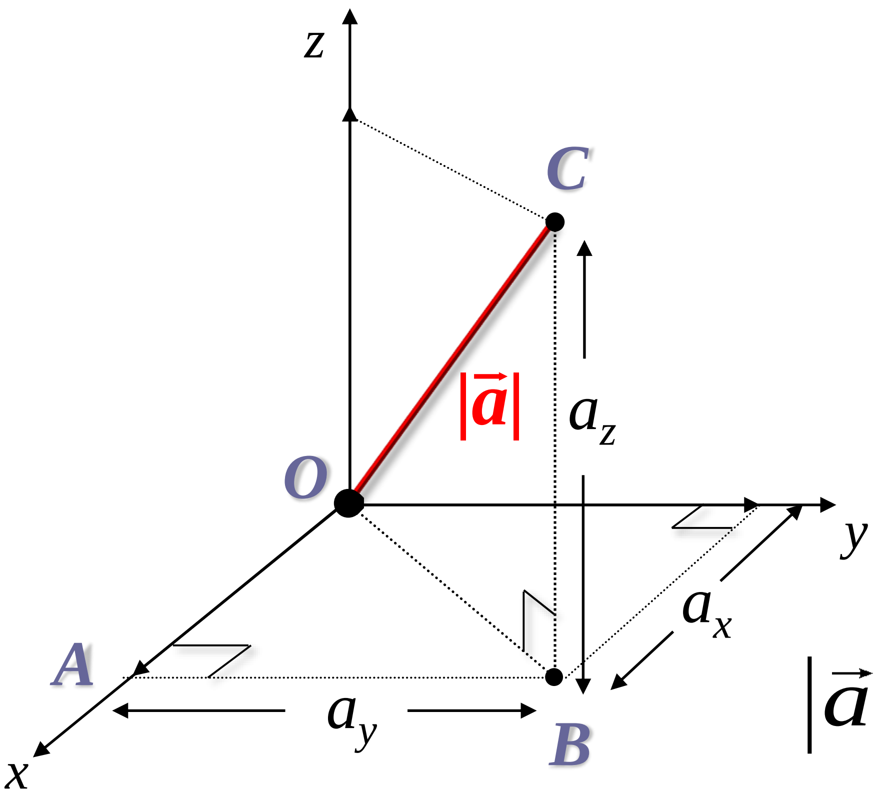


un vettore orientato nello spazio in un modo qualunque, si puo' sempre scomporre in componenti cartesiane ortogonali

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$



modulo di un vettore in funzione delle sue componenti cartesiane



$$|\vec{a}| = a = ?$$

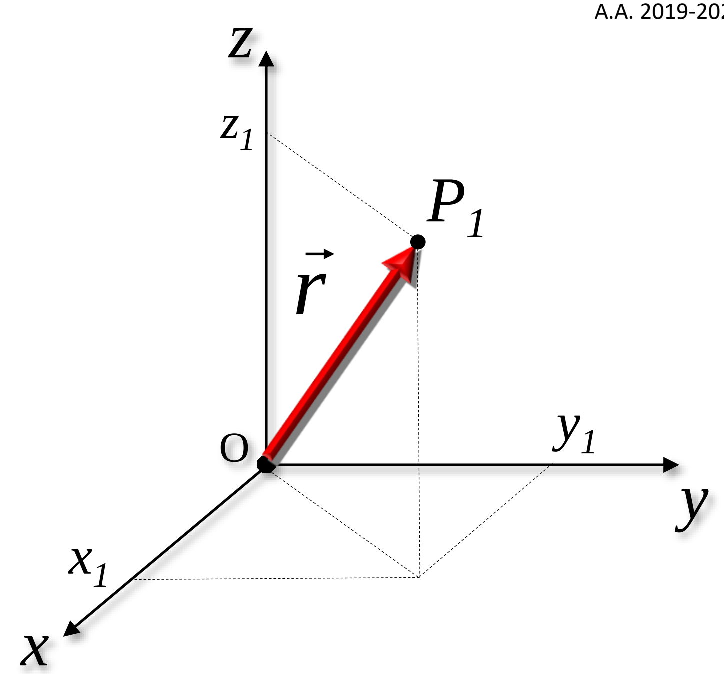
$$OC^2 = OB^2 + BC^2$$

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

$$OC^2 = OA^2 + AB^2 + BC^2$$

$$|\vec{a}| = a \equiv OC = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Vettore posizione



- prescelto un sistema di riferimento, ad es.

  cartesiano ortogonale, **fisso nel tempo,**

  la posizione rispetto all'origine O

  del sistema di riferimento di un generico punto P_1 di coordinate (x_1, y_1, z_1)

  viene individuata dal vettore posizione $\vec{r}$

$\vec{r}$ e' <u>sempre</u> spiccato **dall' origine O verso il punto P dello spazio**

in coordinate cartesiane ⇨ $$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$ r e' la distanza di P dall'origine O

⇨ $$\vec{r} = r\hat{r}$$ (o anche $\vec{r} = r\hat{u}_r$)

Nota Bene: i vettori sono grandezze intrinseche nel senso che il loro modulo non dipende

ne' dalla origine del sistema di riferimento, ne' dal suo orientamento nello spazio.

come per esempio il vettore spostamento $\Delta\vec{r}$

<u>con l'eccezione del vettore posizione</u> $\vec{r}$ che e' il prototipo di vettore applicato

in quanto e' definito rispetto ad un punto ben determinato, l'origine O del sistema di riferimento

ma perche' si opera in coordinate cartesiane ?

perche' occorre una rappresentazione matematica, oltre che grafica, di un vettore,

e per farlo si fa riferimento al vettore posizione che e' un vettore orientato legato all'origine di un sistema di riferimento perche' per definizione e' spiccato dall' origine del sistema di riferimento verso il generico punto dello spazio

e come gia' detto i i vettori orientati vengono proprio definiti come quelle entita' che hanno le stesse proprieta' di trasformazione del vettore posizione rispetto a rotazioni e a traslazioni, somma di due vettori in coordinate cartesiane

dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$$

il vettore somma $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ e' esprimibile in coordinate cartesiane come:

$$\vec{c} = c_x\hat{i} + c_y\hat{j} + c_z\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad c_x = a_x + b_x$$

$$\Rightarrow \quad c_y = a_y + b_y$$

$$\Rightarrow \quad c_z = a_z + b_z$$

il vettore somma ha come componenti la somma delle componenti

dei singoli vettori

Versore in coordinate cartesiane

se $\vec{a}$ e' un vettore orientato nella direzione individuata dal versore $\hat{u}_a$

se $a = |\vec{a}|$ ossia se a e' il modulo del vettore $\vec{a}$ → $\vec{a} = a\hat{u}_a$

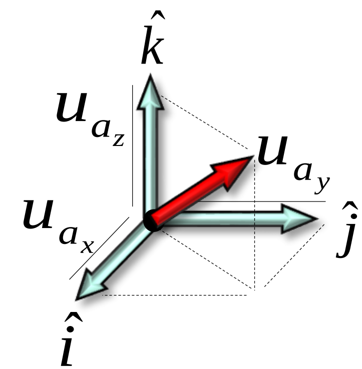
dove $\hat{u}_a$ e' il versore nella direzione di $\vec{a}$ ne segue che

$$\hat{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{a}$$

Nota Bene: il versore e' una grandezza **adimensionale** se $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ da $\hat{u}_a = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

si ha
$$\hat{u}_a = \frac{a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

in generale: $\hat{u}_a = u_{a_x} \hat{i} + u_{ay} \hat{j} + u_{a_z} \hat{k}$



$\Rightarrow$ $$u_{a_x} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$ etc.

- coseni direttori

<u>APPENDICE</u> : rappresentazione grafica delle grandezze vettoriali

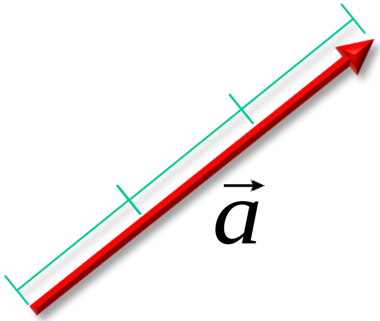
per rappresentare **<u>graficamente</u>** una grandezza vettoriale si fissa

<u>*convenzionalmente*</u> una lunghezza unitaria e si traccia un segmento

orientato di lunghezza pari al modulo del vettore, misurato rispetto

alla lunghezza unitaria scelta

se $|\vec{a}| = 3$

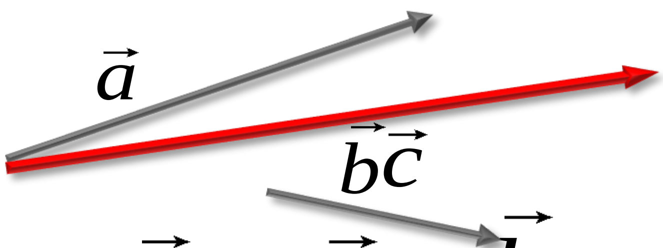


Somma di due vettori

graficamente il vettore somma di due vettori $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ si ottiene

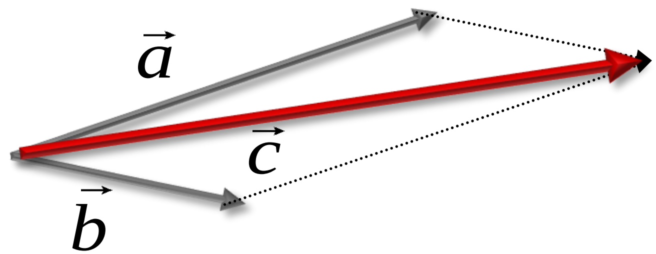
traslando rigidamente a se' stesso $\vec{b}$ fino ad applicarlo all'estremo di $\vec{a}$

e congiungendo l'origine di $\vec{a}$ con l'estremo di $\vec{b}$ o viceversa



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

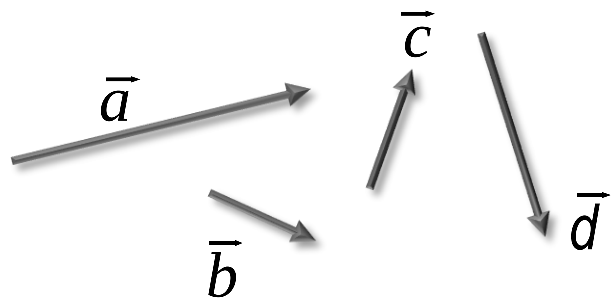
in alternativa si puo' usare la regola del parallelogrammo:



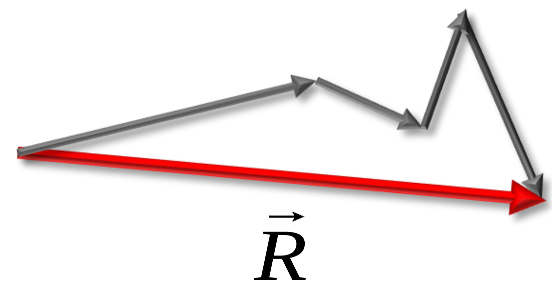
la diagonale del parallelogrammo fornisce il vettore somma

Somma di piu' vettori

il vettore somma di due o piu' vettori e' il ***vettore risultante*** o ***"risultante"*** $\vec{R}$



⇨

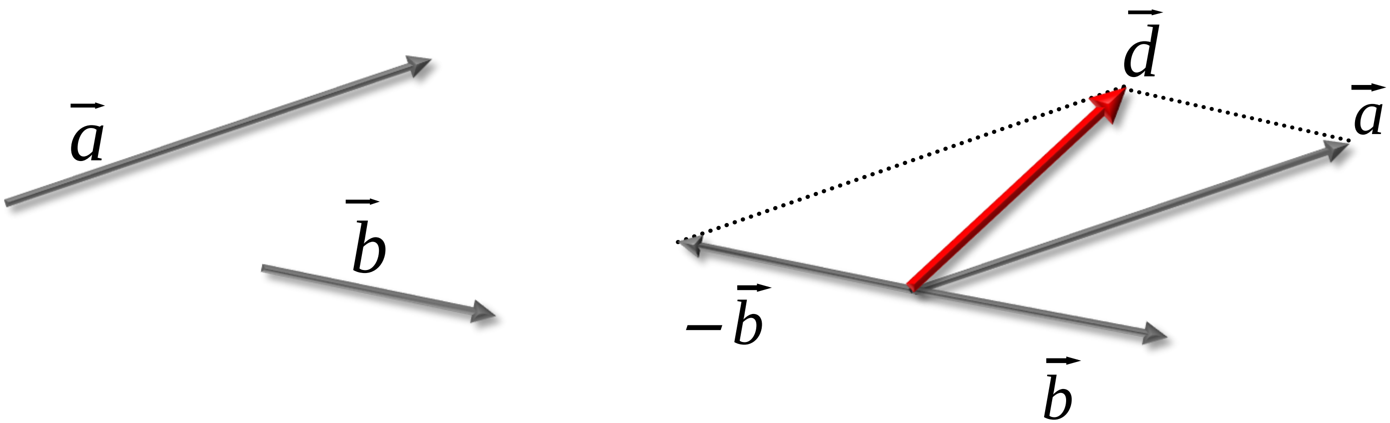


Differenza di due vettori

la differenza di due vettori $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ si definisce tramite il vettore opposto

$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

usando la regola del parallelogrammo:



Backup Slides