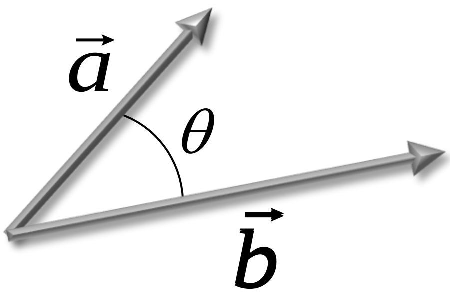
Moltiplicazione tra vettori

Prodotto scalare

si definisce *prodotto scalare* di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ la grandezza



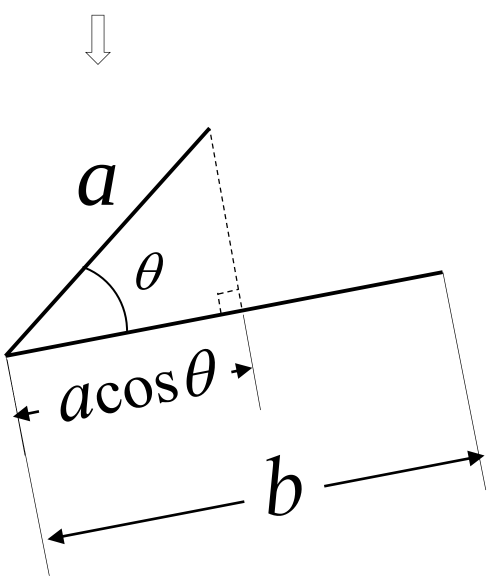
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\vartheta = ab\cos\vartheta$$

l'operazione prodotto scalare tra due vettori produce un

numero pari al modulo del vettore $\vec{b}$

moltiplicato per la **<u>proiezione</u>** del vettore $\vec{a}$

nella direzione di $\vec{b}$ o viceversa



il prodotto scalare e’ nullo se i due vettori sono **perpendicolari** tra loro

il prodotto scalare

- **gode della proprieta’ commutativa** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

- **gode della proprieta’ distributiva :** $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Prodotto scalare in termini delle componenti cartesiane dei vettori

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$$

sfruttando le proprieta' del prodotto scalare

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\hat{i}\cdot b_x\hat{i} + a_x\hat{i}\cdot b_y\hat{j} + a_x\hat{i}\cdot b_z\hat{k} +$$

$$a_y\hat{j}\cdot b_x\hat{i} + \ldots\ldots + a_z\hat{k}\cdot b_z\hat{k}$$

$$= a_x b_x(\hat{i}\cdot\hat{i}) + a_x b_y(\hat{i}\cdot\hat{j}) + a_x b_z(\hat{i}\cdot\hat{k}) +$$

$$a_y b_x(\hat{j}\cdot\hat{i}) + \ldots\ldots a_z b_z(\hat{k}\cdot\hat{k})$$

sfruttando il fatto che i versori $\hat{i}$ $\hat{j}$ $\hat{k}$ sono vettori unitari ($\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$ etc.)

e tra loro perpendicolari ($\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$ etc.)

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

il prodotto scalare di un vettore per se stesso e' detto " *quadrato del vettore* "

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a\cdot a\cdot 1 = a^2$$

l'elevazione alla n-esima potenza di un numero e' la moltiplicazione

di quel numero per se stesso ripetuta n volte se $3^2 = 3*3$ formalmente

si ha $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a}$ ma $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$ quindi $\vec{a}^{\,2} = a^2$

- il quadrato di un vettore e' uguale al modulo quadrato del vettore stesso

Nota Bene :

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$= a^2+b^2+2\vec{a}\cdot\vec{b} \quad \Rightarrow \quad (\vec{a}+\vec{b})^2 = a^2+b^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Prodotto scalare di un vettore per se stesso (quadrato di un vettore)

in coordinate cartesiane

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

$$\Rightarrow \quad a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

se $\vec{a}$ e’ un qualsiasi vettore proiettandolo lungo la direzione di un qualsiasi

versore $\hat{u}_n$ si ottiene la componente del vettore $\vec{a}$ lungo la direzione

del versore $\hat{u}_n$ ⇨ $\vec{a}\cdot\hat{u}_n = a_n$

infatti $\vec{a}\cdot\hat{u}_n = \left|\vec{a}\right|\left|\hat{u}_n\right| cos\vartheta = (a)(1)cos\vartheta = acos\vartheta = a_n$

scomponendo $\vec{a}$ in componenti **cartesiane** : $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

e dato che $a_x = \vec{a}\cdot\hat{i}$ $a_y = \vec{a}\cdot\hat{j}$ $a_z = \vec{a}\cdot\hat{k}$

si ha $\vec{a} = (\vec{a}\cdot\hat{i})\hat{i} + (\vec{a}\cdot\hat{j})\hat{j} + (\vec{a}\cdot\hat{k})\hat{k}$

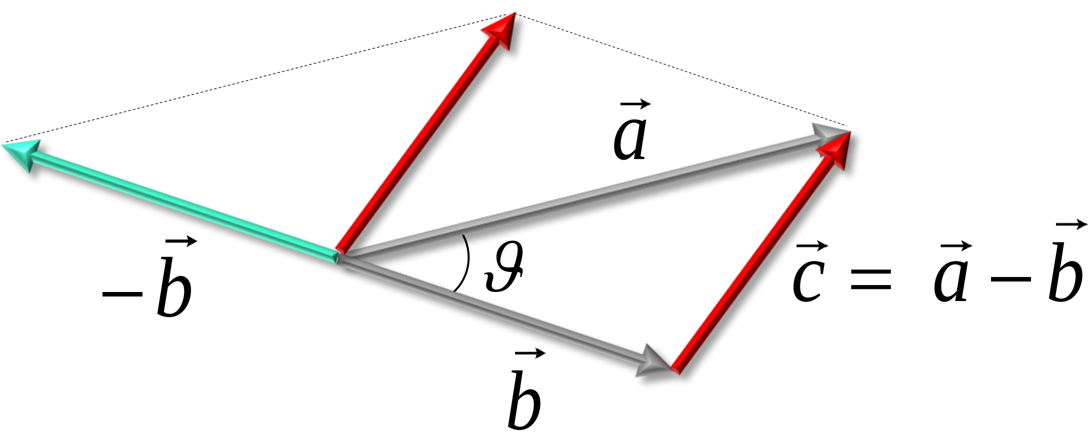
Legge di Carnot

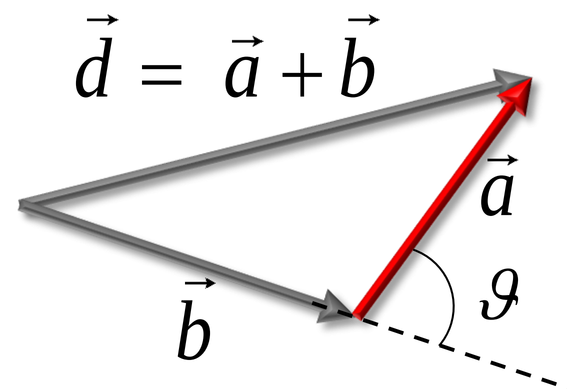
se $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ si ha $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{c}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta = c^2$

legge di Carnot o del coseno

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$





$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta \qquad d^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\vartheta$$

Prodotto vettoriale

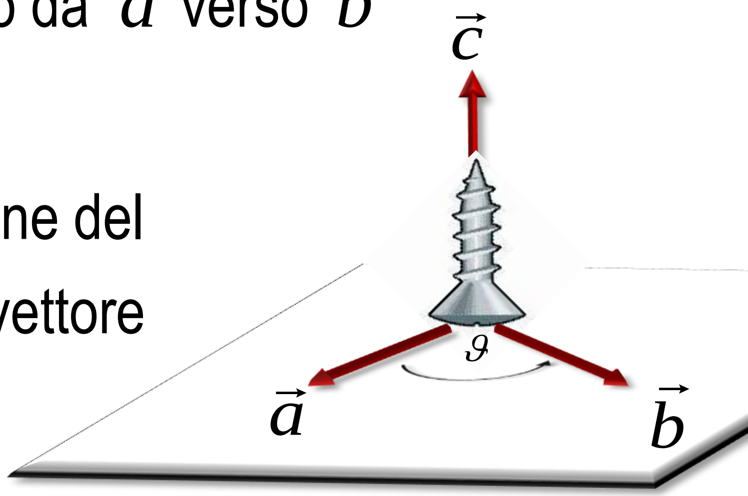
il **prodotto vettoriale** tra due vettori $\vec{a} \times \vec{b}$ fornisce un ***vettore***

il vettore $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ha :

- modulo pari a $ab\ sen\vartheta$
- direzione perpendicolare al piano individuato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$
- verso in cui si avvita una vite destrogira ruotando da $\vec{a}$ verso $\vec{b}$

oppure

si dispone la mano destra aperta lungo la direzione del ***primo*** vettore e la si chiude verso il ***secondo*** vettore (*seguendo **l'angolo acuto** tra i due vettori*)



il prodotto vettoriale e' **nullo** se i due vettori sono **paralleli** o **antiparalleli**

→ **il prodotto vettoriale di un vettore per se stesso e' nullo**

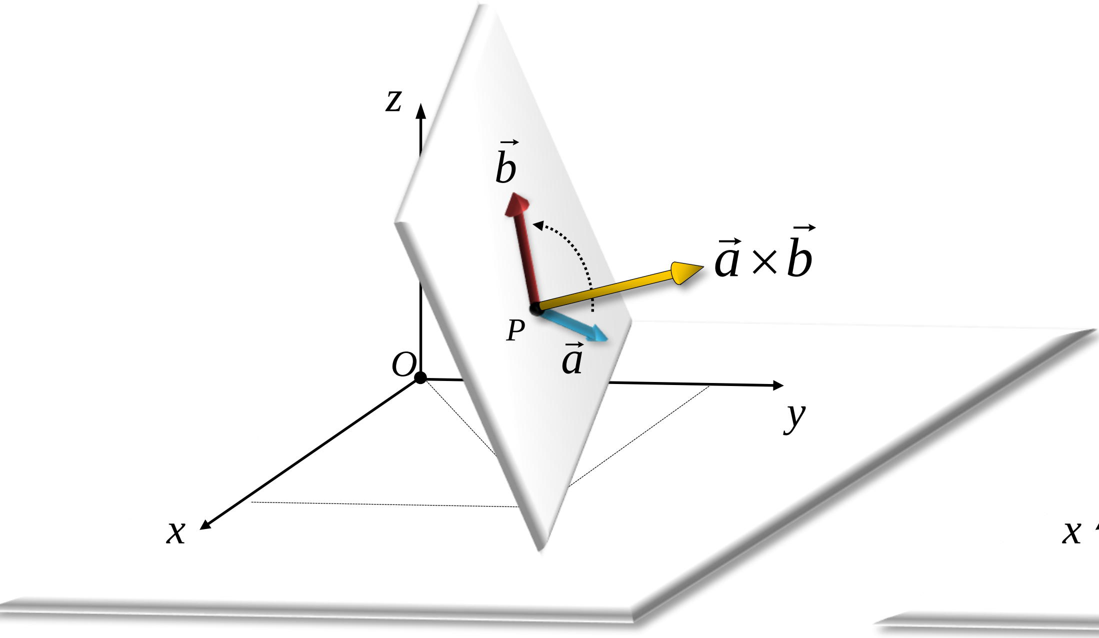
Proprieta' del prodotto vettoriale

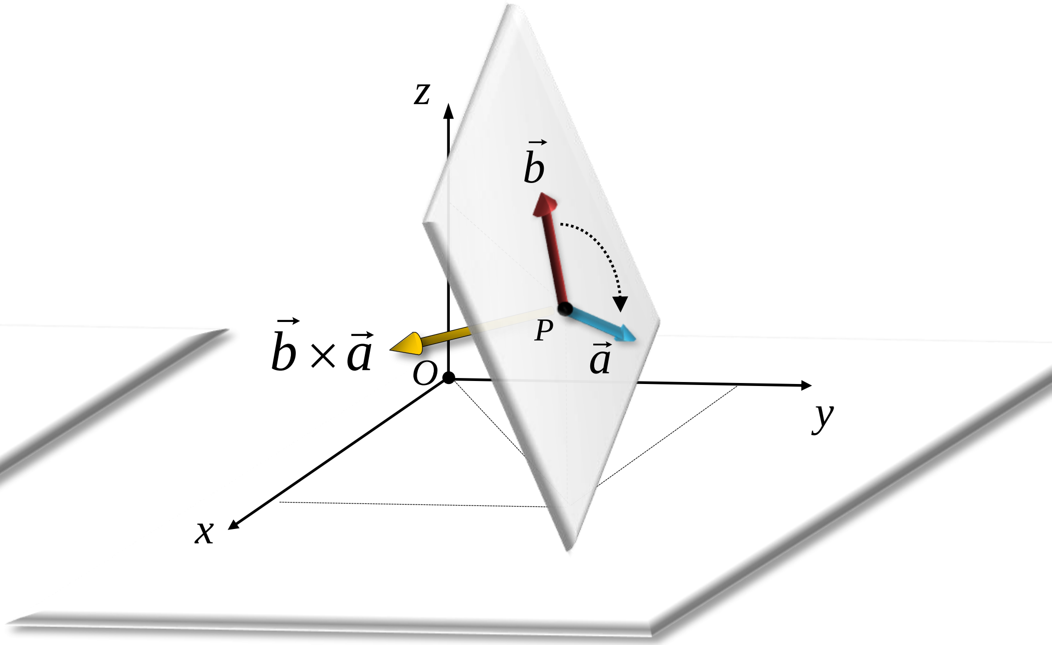
• il prodotto vettoriale ***NON*** soddisfa la proprieta' commutativa

$$\vec{a} \times \vec{b} \qquad \textbf{e' diverso da} \qquad \vec{b} \times \vec{a}$$

per la precisione e' : anticommutativo

in effetti se $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$





• il prodotto vettoriale ***NON*** soddisfa la proprieta' associativa

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

e' diverso da

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

• il prodotto vettoriale gode della proprieta' distributiva

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

se $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ possiamo sempre scomporre $\vec{b}$ in un componente $\vec{b}_{//}$

parallelo ad $\vec{a}$ e in un componente $\vec{b}_{\perp}$ perpendicolare ad $\vec{a}$

dunque $\vec{b} = \vec{b}_{//} + \vec{b}_{\perp}$ e $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b}_{//} + \vec{b}_{\perp})$

sfruttando la proprieta' distributiva del prodotto vettoriale

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}_{//} + \vec{a} \times \vec{b}_{\perp}$ ma $\vec{a} \times \vec{b}_{//} = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}_{\perp}$

quindi $|\vec{c}| = ab_{\perp} sen\vartheta = ab_{\perp}$

$\vartheta = 90 \Rightarrow sen\vartheta = 1$ dato che $\vec{b}_{\perp}$ e' perpendicolare ad $\vec{a}$

- il **<u>modulo</u>** del prodotto vettoriale e' pari al prodotto del modulo di un vettore per la componente dell'altro vettore <u>perpendicolare</u> al primo vettore

Prodotto vettoriale in termini delle componenti cartesiane dei vettori

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\times(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})$$

$$=a_x\hat{i}\times b_x\hat{i}+a_x\hat{i}\times b_y\hat{j}+a_x\hat{i}\times b_z\hat{k}+$$

$$a_y\hat{j}\times b_x\hat{i}+\ldots\ldots\ a_z\hat{k}\times b_z\hat{k}$$

risulta che :

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

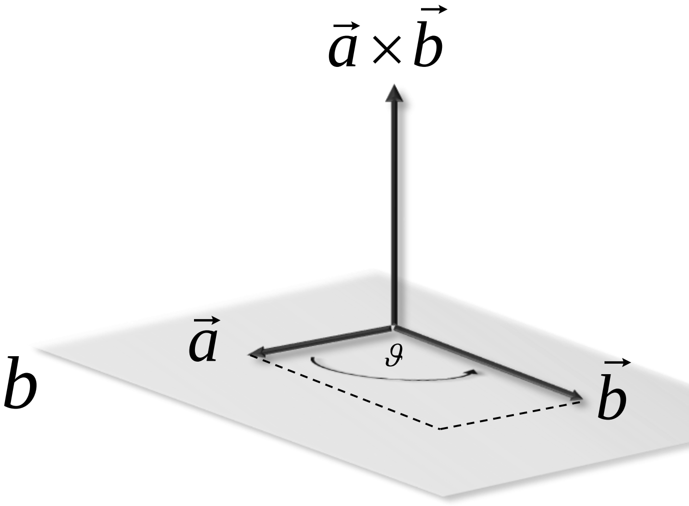
Regola di Cramer

le componenti del prodotto vettoriale si ottengono con lo sviluppo del

determinante

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Area di un parallelogramma



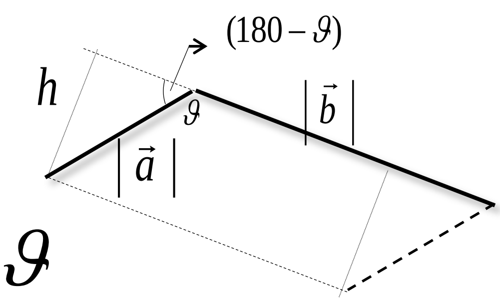
vista dall'alto

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = absen\vartheta$$ ma

$ab\left|sen\vartheta\right| =$ area del parallelogrammo di lati a e b

dove $a = \left|\vec{a}\right|$ e $b = \left|\vec{b}\right|$

in effetti area del parallelogrammo di lati a e $b = hb$



$$h = asen(180-\vartheta)$$ ma $$sen(180-\vartheta) \equiv sen\vartheta$$

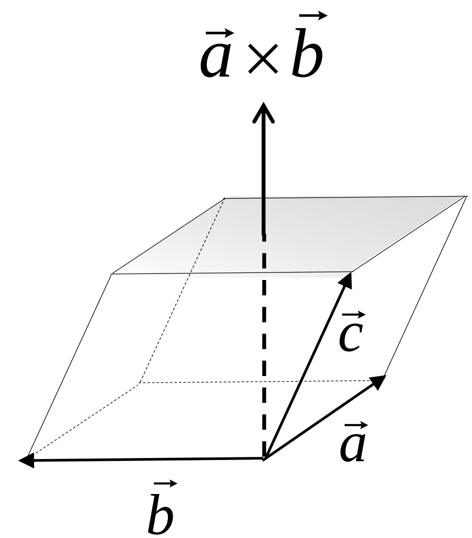
dunque $$h = asen(\vartheta)$$

quindi si puo' pensare a $\vec{a} \times \vec{b}$ come al "vettore area" del parallelogrammo

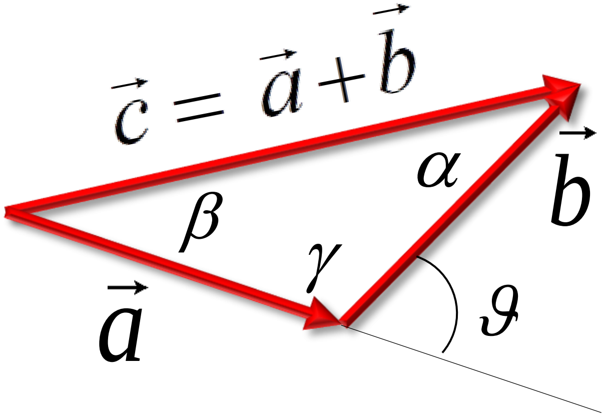
Volume di un parallelepipedo

lo scalare $\left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right|$ e' il volume del parallelepipedo la cui base e' definita

dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$



Legge dei seni



se $\quad \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

si ha $\quad \vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})$

e poiche' $\quad \vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} \quad$ e $\quad \vec{a} \times \vec{a} = 0$

$\Rightarrow \quad ac\ sen\beta = ab\ sen\vartheta \quad \Rightarrow \quad c\ sen\beta = b\ sen\vartheta$

ma $\quad \gamma = 180 - \vartheta \quad \Rightarrow \quad sen\gamma = sen\vartheta$

quindi $\quad c\ sen\beta = b\ sen\gamma \quad \Rightarrow \quad \dfrac{sen\beta}{b} = \dfrac{sen\gamma}{c}$ legge dei seni

Triplo prodotto di vettori

esistono due tipi di prodotti tripli tra vettori che producono un vettore

$$(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \quad \text{e} \quad \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$$ *(prodotto vettoriale triplo)*

attenzione : $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

identita' vettoriali utili

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

regola mnemonica : ''ABC'' = "BAC − CAB"

$\Rightarrow$ il prodotto vettoriale triplo puo' essere espresso come la differenza di due vettori

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$$

$$\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = [\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{D})]\vec{C} - [\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})]\vec{D}$$

$$\vec{A}\times[\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})] = (\vec{A}\times\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\times\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

Backup Slides