Esercizio :

dati i vettori

$\vec{a}_1 = 3\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$ applicato in P_1 $P_1(6,-2,4)$

$\vec{a}_2 = -2\hat{i} + 3\hat{j}$ applicato in P_2 $P_2(9,-3,-8)$

$\vec{a}_3 = 8\hat{j} - \hat{k}$ applicato in P_3 $P_3(0,0,4)$

determinarne la risultante e il momento risultante

rispetto al polo O_P $O_P(6,-7,4)$

vettori: $\vec{a}_1 = 3\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$ $\vec{a}_2 = -2\hat{i} + 3\hat{j}$ $\vec{a}_3 = 8\hat{j} - \hat{k}$

risultante: $\vec{R} = \sum_{i=1}^{3} \vec{a}_i = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \quad \Rightarrow$

$$R_x = \sum_{i=1}^{3} a_{i_x} = a_{1_x} + a_{2_x} + a_{3_x} = 3 - 2 + 0 = 1$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{3} a_{i_y} = a_{1_y} + a_{2_y} + a_{3_y} = -5 + 3 + 8 = 6$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{3} a_{i_z} = a_{1_z} + a_{2_z} + a_{3_z} = -1 + 0 - 1 = -2$$

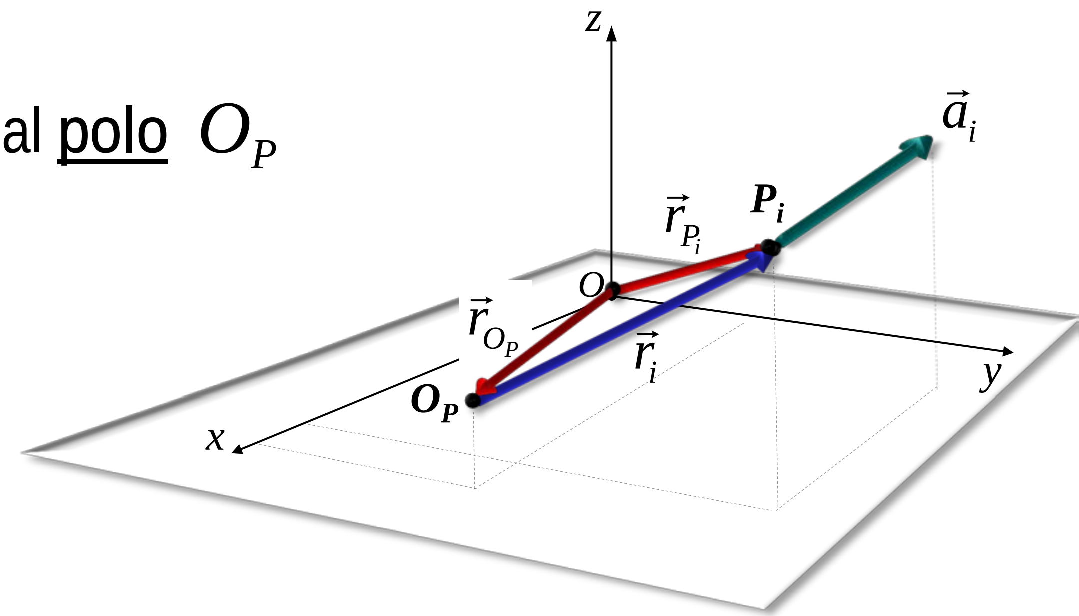
$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

momento risultante $\vec{M}_{O_P} = \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i \times \vec{a}_i$ ➢ <u>attenzione</u>: la posizione dei vettori

deve essere determinata a partire dal <u>polo</u> O_P

quindi per l' i-esimo vettore $\vec{a}_i$

applicato nel punto P_i si ha :



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{P_i} - \vec{r}_{O_P}$$

$$r_{1_x} = r_{P_{1_x}} - r_{O_{P\,x}} \qquad r_{1_y} = r_{P_{1_y}} - r_{O_{P\,y}} \qquad r_{1_z} = r_{P_{1_z}} - r_{O_{P\,z}}$$

$$r_{2_x} = r_{P_{2_x}} - r_{O_{P\,x}} \qquad r_{2_y} = r_{P_{2_y}} - r_{O_{P\,y}} \qquad r_{2_z} = r_{P_{2_z}} - r_{O_{P\,z}}$$

$$r_{3_x} = r_{P_{3_x}} - r_{O_{P\,x}} \qquad r_{3_y} = r_{P_{3_y}} - r_{O_{P\,y}} \qquad r_{3_z} = r_{P_{3_z}} - r_{O_{P\,z}}$$

in questo esercizio:

$$P_1(6,-2,4) \qquad P_2(9,-3,-8) \qquad P_3(0,0,4) \qquad O_P(6,-7,4)$$

$$r_{1_x} = 6-6=0 \qquad r_{1_y} = -2-(-7)=5 \qquad r_{1_z} = 4-4=0$$

$$r_{2_x} = 9-6=3 \qquad r_{2_y} = -3-(-7)=4 \qquad r_{2_z} = -8-4=-12$$

$$r_{3_x} = 0-6=-6 \qquad r_{3_y} = 0-(-7)=7 \qquad r_{3_z} = 4-4=0$$

$\rightarrow$ $\vec{r}_1 = 0\hat{i} + 5\hat{j} + 0\hat{k}$ $\qquad \vec{r}_2 = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}$ $\qquad \vec{r}_3 = -6\hat{i} + 7\hat{j} - 0\hat{k}$

ossia: $\vec{r}_1 = 5\hat{j}$ $\qquad \vec{r}_2 = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}$ $\qquad \vec{r}_3 = -6\hat{i} + 7\hat{j}$

$$\vec{M}_{O_P} = \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i \times \vec{a}_i = \vec{r}_1 \times \vec{a}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{a}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{a}_3$$

$$= (0\hat{i} + 5\hat{j} + 0\hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}) + (3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}) \times (-2\hat{i} + 3\hat{j})$$

$$+ (-6\hat{i} + 7\hat{j} - 0\hat{k}) \times (8\hat{j} - \hat{k})$$

in coordinate cartesiane il prodotto vettoriale assume la forma:

$$\vec{r}_i \times \vec{a}_i = (r_{i_y} a_{i_z} - r_{i_z} a_{i_y})\hat{i} + (r_{i_z} a_{i_x} - r_{i_x} a_{i_z})\hat{j} + (r_{i_x} a_{i_y} - r_{i_y} a_{i_x})\hat{k}$$

quindi

$$\vec{M}_{O_P} = (-5\hat{i} + 0\hat{j} - 15\hat{k}) + (36\hat{i} + 24\hat{j} + 17\hat{k}) + (-7\hat{i} - 6\hat{j} - 48\hat{k})$$

in conclusione: $\vec{R} = \hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ e $\vec{M}_{O_P} = 24\hat{i} + 18\hat{j} - 46\hat{k}$

se $O_P \equiv \mathrm{O} = (0,0,0) \rightarrow \vec{R} = \hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k} \rightarrow \vec{M}_O = 14\hat{i} + 34\hat{j} - 3\hat{k}$

se si fosse fatto coincidere il polo con l'origine del sistema di riferimento cartesiano la risultante sarebbe rimasta invariata ma il momento risultante sarebbe stato diverso rispetto a prima

risultante e momento risultante fornisco due diversi tipi di informazione e sono tra loro indipendenti

Backup Slides