Infinitesimi

e’ detto “*infinitesimo*” una qualsiasi quantita’ tendente a zero quando una opportuna variabile tende ad assumere un determinato valore

dati due infinitesimi α e β

- α e β **non** sono paragonabili tra loro se il $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$ non esiste
- α e β sono infinitesimi dello **stesso ordine** se il $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$ esiste, e’ finito e ha un valore **non** nullo
- β e’ infinitesimo di **ordine superiore** rispetto ad α se il $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$ esiste ed ha valore **nullo**

Funzione reale di una variabile

una funzione reale di una variabile reale e' una corrispondenza tra un insieme di numeri reali ,

rappresentato dalla variabile **indipendente** x e un insieme di numeri reali,

rappresentato dalla variabile **dipendente** y ⇨ $y = f(x)$

Derivata di funzione di una variabile

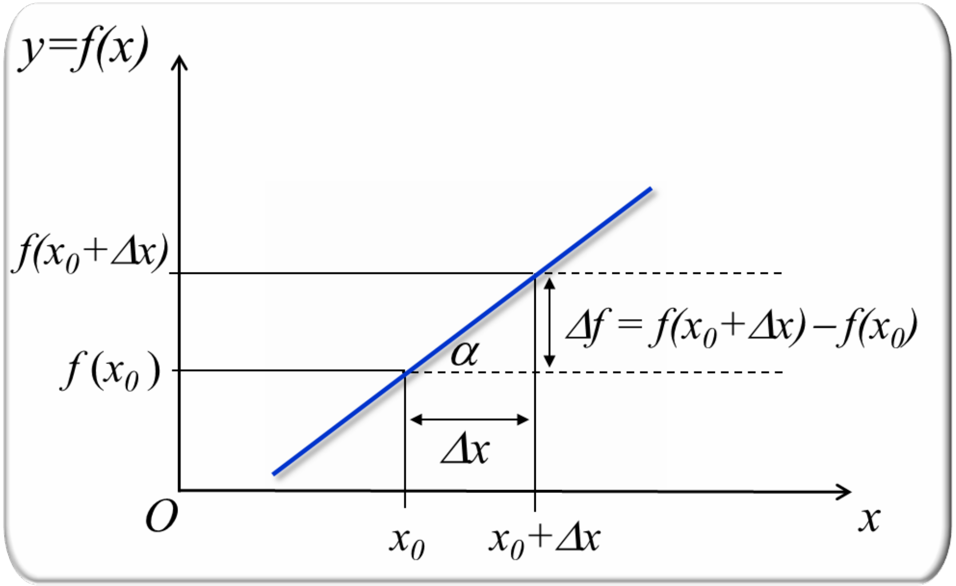
data una funzione reale $f(x)$ di una variabile x e' detta derivata f'

della funzione nel punto x_0 il limite per $\Delta x \to 0$ del rapporto incrementale

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Dipendenza lineare $y \equiv f(x) = a + bx$

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



⇨ $$f' = tg\,\alpha$$

⇨ ***f'* e' il valore del coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto x_0**

- e' detto differenziale dx della variabile indipendente x, un incremento infinitesimo arbitrario ma non nullo della variabile x

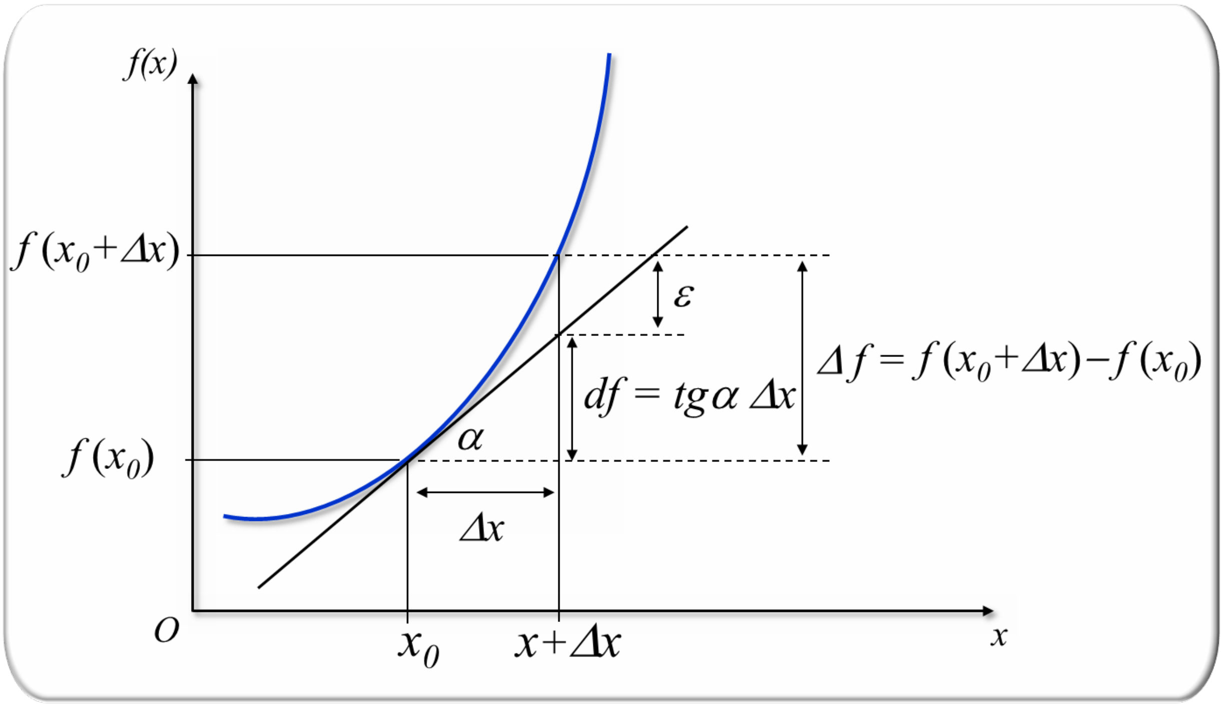
data una funzione f continua e derivabile di una variabile x

- si chiama **differenziale df della funzione** il prodotto della derivata $f'(x)$ per il differenziale della variabile indipendente x ⇨ $$df = f'(x)dx$$

- in generale il differenziale df <u>*non e' uguale*</u> alla variazione Δf

della funzione, dove $\Delta f = f(x+dx) - f(x)$

in effetti si dimostra che : $\Delta f = df + \varepsilon$



ma si puo' anche dimostrare che $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta x} = 0$ ossia che ε e' un infinitesimo

di ordine superiore rispetto a dx

Sviluppo in serie di Taylor di una funzione *f(x)*

→ rappresentazione di una funzione nell'intorno di un generico punto x_0 tramite un polinomio

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \text{dove} \qquad f^{(n)}(x_0) = \left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0} \qquad \text{con } 0! = 1$$

uno sviluppo di Taylor in cui x_0 sia uguale a 0 è detto sviluppo di *Maclaurin*

il polinomio che si ottiene è l'approssimazione di ordine n di $f(x)$ intorno a $x_0 = 0$

$$f(x) \simeq f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \ldots.. + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + R_n(x)$$

Sviluppo in serie di Maclaurin di alcune funzioni

$$(1+x)^{-1} \simeq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots.. \qquad -1 < x < +1$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots.. \qquad -1 < x \le +1$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots.. \qquad -1 < x \le +1$$

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.. \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$senx \simeq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots.. \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots.. \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$tgx \simeq x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots.. \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

Funzione di due variabili

una funzione reale di due variabili reali e' una corrispondenza tra un insieme di coppie di numeri (x,y)

e un insieme di numeri reali rappresentato dalla variabile dipendente z ⇨ $z = F(x, y)$

derivate parziali prime

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} \qquad F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x, y)}{\Delta y}$$

derivate parziali seconde

$$F''_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad F''_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

derivate parziali seconde miste

$$F''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \qquad F''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

se F''_{xy} e F''_{yx} sono continue $F''_{xy} = F''_{yx}$ ossia l'ordine di derivazione e' ininfluente l' *incremento* ΔF della funzione nel passare dal punto di coordinate (x_0, y_0)

al punto di coordinate $(x_0 + dx, y_0 + dy)$ e' $\Delta F = F(x_0 + dx, y_0 + dy) - F(x_0, y_0)$

il ***differenziale totale*** della funzione e' $dF = \dfrac{\partial F}{\partial x} dx + \dfrac{\partial F}{\partial y} dy$

se il luogo dei valori della $F(x,y)$ fosse il piano $z = ax + by + d$

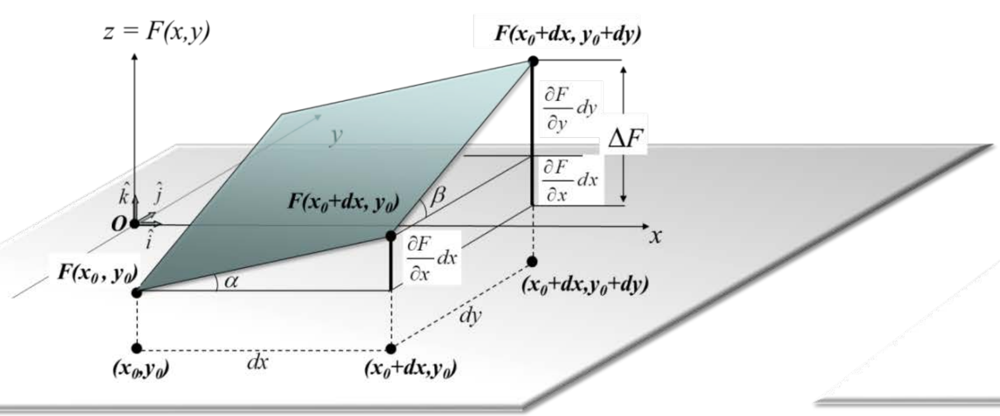
$$\Delta F = F(x_0 + dx, y_0 + dy) - F(x_0, y_0)$$ mentre

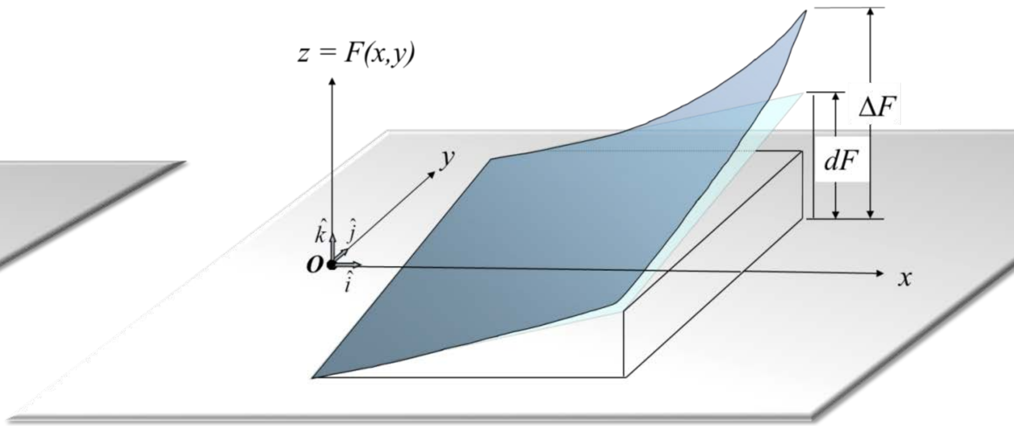
il differenziale totale della funzione sarebbe $dF = \dfrac{\partial F}{\partial x} dx + \dfrac{\partial F}{\partial y} dy$

quindi in ***questo particolare caso*** ΔF *coincide* con dF ma in generale $\Delta F \neq dF$

in effetti in generale risulta $$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \varepsilon_1 dx + \varepsilon_2 dy \neq dF$$

- ma si ha che ε_1 ed ε_2 sono **infinitesimi dello stesso ordine** di dx e di dy





Legge di propagazione degli errori

se $w = f(x, y, z)$

se ε_x e' l'errore sulla misura della grandezza x

se ε_y e' l'errore sulla misura della grandezza y

se ε_z e' l'errore sulla misura della grandezza z

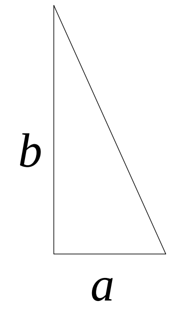
l'errore sulla grandezza w sara' $\varepsilon_w = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \varepsilon_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \varepsilon_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \varepsilon_z^2}$

dove $\frac{\partial f}{\partial x}$ indica la derivata parziale della funzione f rispetto alla variabile x

se $w = x + y + ...$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_w = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \varepsilon_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \varepsilon_y^2 + ...} = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + ...}$

se $w = x \cdot y \cdot ....$ $\Rightarrow$ $\frac{\varepsilon_w}{w} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \varepsilon_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \varepsilon_y^2 + ...} = \sqrt{\frac{\varepsilon_x^2}{x^2} + \frac{\varepsilon_y^2}{y^2} + ...}$

determinare l'area A e l'errore ε_A sull'area di un triangolo rettangolo



i cui cateti hanno lunghezza $a = (0.084 \pm 0.002)\, m$ e $b = (0.57 \pm 0.03)\, m$

dalla geometria piana sappiamo che l'area del triangolo e' $A = \dfrac{ab}{2}$

in generale se $w = f(x, y) \Rightarrow \varepsilon_w = \sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \varepsilon_x^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \varepsilon_y^2}$

in questo caso $w \equiv A$ e a e b corrispondono ad x e y $\Rightarrow A = f(a,b)$

per cui $\left(\dfrac{\partial A}{\partial a}\right) = \dfrac{b}{2}$ e $\left(\dfrac{\partial A}{\partial b}\right) = \dfrac{a}{2}$ $\Rightarrow \varepsilon_A = \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 \varepsilon_a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \varepsilon_b^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{b^2\varepsilon_a^2 + a^2\varepsilon_b^2} = \frac{ab}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_a^2}{a^2} + \frac{\varepsilon_b^2}{b^2}} \Rightarrow \varepsilon_A = A\sqrt{\frac{\varepsilon_a^2}{a^2} + \frac{\varepsilon_b^2}{b^2}}$$

in conclusione: dato che $a = (\,8.4 \pm 0.2\,)\, 10^{-2}$ m e $b = (\,5.7 \pm 0.3)\, 10^{-1}$ m

e poiche' $A = ab \Rightarrow A = 0.0479$ e $\varepsilon_A = 0.0028$

ossia $\mathbf{A} = (\,4.79 \pm 0.28\,)\, 10^{-2}\ \boldsymbol{m^2}$ al 68% C.L.

Nota bene:

da $\varepsilon_A = A\sqrt{\frac{\varepsilon_a^2}{a^2}+\frac{\varepsilon_b^2}{b^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_A}{A} = \sqrt{\frac{\varepsilon_a^2}{a^2}+\frac{\varepsilon_b^2}{b^2}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\varepsilon_A}{A}\right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_b}{b}\right)^2$

in linguaggio matematico

se $A = \prod_{i=1}^{n} a_i$ con le a_i **indipendenti** tra loro $\Rightarrow \left(\frac{\varepsilon_A}{A}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon_{a_i}}{a_i}\right)^2$

in lingua italiana:

se una grandezza A e' ricavabile come prodotto di n grandezze a_i **indipendenti** tra loro

il quadrato dell'***errore relativo*** di quella grandezza e' uguale alla somma

dei quadrati degli ***errori relativi*** delle n grandezze

Backup Slides