Moti in una dimensione

se un punto materiale si muove in linea retta ad es. lungo l'asse x

l'equazione oraria del moto sara' $\vec{x}(t) = x(t)\ \hat{i}$

derivando $\vec{x}(t)$ rispetto al tempo si ha $\vec{\mathrm{v}}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}\hat{i} + x(t)\dfrac{d\hat{i}}{dt}$

ma l'asse x di riferimento per definizione e' fisso nel tempo → $\dfrac{d\hat{i}}{dt} = 0$

dunque $$\vec{\mathrm{v}}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} = \mathrm{v}(t)\ \hat{i}$$

derivando la velocita' rispetto al tempo si otterra' l'accelerazione

Nota Bene : siamo in un moto rettilineo percio' si avra' : $\vec{a}(t) = a(t)\ \hat{i}$

in conclusione:

$$\vec{x}(t) = x(t)\ \hat{i} \qquad \vec{\mathrm{v}}(t) = \mathrm{v}(t)\ \hat{i} \qquad \vec{a}(t) = a(t)\ \hat{i}$$

problema unidimensionale → possiamo abbandonare

la notazione vettoriale e riferirci semplicemente ai moduli

ossia alle funzioni scalari $x(t)$ $\mathrm{v}(t)$ e $a(t)$

ma dobbiamo tenere traccia del segno

lo faremo adottando la convenzione che se il moto e' nel verso:

- ***concorde*** all'orientamento dell'asse x → *spostamento positivo* $\Delta x > 0$

- ***contrario*** all'orientamento dell'asse x → *spostamento negativo* $\Delta x < 0$

Moto rettilineo uniforme (asse x)

se $a(t) = 0 \quad \forall t$ ossia se $\dfrac{d\text{v}(t)}{dt} = \dfrac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0$

solo la derivata di una costante e' nulla per ogni t ⇨ $\text{v}(t) = cost \equiv \text{v}_0$

⇨ *moto rettilineo uniforme*

$$x(t) = \int \text{v}(t)dt = \int \text{v}_0 dt = \text{v}_0 \int dt = \text{v}_0 t$$

a meno di una costante di integrazione c ⇨ $x(t) = \text{v}_0 t + c$

ponendo $t = 0$ nella $x(t) = \mathrm{v}_0 t + c$ $\Rightarrow$ $x(t = 0) = c$

dunque c e' semplicemente la posizione occupata dal punto

(la sua ascissa) al tempo $t = 0$

per determinare c si dovra' ricorrere ad ulteriori informazioni,

le "<u>condizioni al contorno</u>"

spesso, ma non sempre, si tratta di "condizioni iniziali" del moto se $x(t=0) = x_0$ ⇨ $c = x_0$

in conclusione :

$x(t) = \mathrm{v}_0 t + x_0$ equazione oraria per lo spazio percorso

$\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_0$ equazione oraria per la velocita’

$a(t) = 0$ equazione oraria per la accelerazione

Moto rettilineo uniformemente accelerato (asse x)

se $a(t) = cost = a$ ossia se $\dfrac{d\mathrm{v}(t)}{dt} = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = a$

⇨ moto *rettilineo uniformemente accelerato*

si ha: $\mathrm{v}(t) = \int a \; dt = a\int dt = \; at$ a meno di una costante di integrazione

se al tempo t = 0 $\mathrm{v}(t=0) = \mathrm{v}_0$ ⇨ $\mathrm{v}(t) = at + \mathrm{v}_0$

$$x(t) = \int \mathrm{v}(t)\ dt = \int (at + \mathrm{v}_0)\ dt = \int at\ dt + \int \mathrm{v}_0 dt = a\int t dt + \mathrm{v}_0 \int dt$$

$$= \frac{1}{2} a\ t^2\ +\ \mathrm{v}_0 t$$ a meno di una costante di integrazione

se al tempo $t = 0$ $\quad x(t=0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2} a t^2 +\ \mathrm{v}_0 t + x_0$

in conclusione :

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2 +\ \mathrm{v}_0 t + x_0$$ equazione oraria per lo spazio percorso

$$\mathrm{v}(t) = at + \mathrm{v}_0$$ equazione oraria per la velocita’

$$a(t) = a$$ equazione oraria per l’ accelerazione

Moto rettilineo smorzato esponenzialmente (asse x)

se $\quad a(t) = -k \ \mathrm{v}(t) \quad$ dove k e' una costante ***positiva*** per definizione

da $\quad a = \dfrac{d\mathrm{v}}{dt} \quad ⇨ \quad \dfrac{d\mathrm{v}}{dt} = -k\mathrm{v} \quad$ eseguendo la stessa operazione ad entrambi

i membri di una uguaglianza il risultato non cambia percio' possiamo moltiplicare

per il differenziale $\ dt \ $ della variabile indipendente t

entrambi i membri della $\quad \dfrac{d\mathrm{v}}{dt} = -k\mathrm{v} \quad$ senza modificare l'uguaglianza

$$⇨ \quad \frac{d\mathrm{v}}{dt} \ dt = -k\mathrm{v} \ dt$$

attenzione non e' possibile "semplificare" dt al numeratore e al denominatore del membro sinistro dell'uguaglianza
la derivata non e' una frazione !!!

ma se $\ \mathrm{v} = \mathrm{v}(t) \ $ il differenziale di $\ \mathrm{v}(t) \ $ e' per definizione $\quad d\mathrm{v} = \dfrac{d\mathrm{v}}{dt} \ dt$

quindi $\dfrac{d\mathrm{v}}{dt}\,dt = -k\mathrm{v}\,dt \quad \Rightarrow \quad d\mathrm{v} = -k\mathrm{v}\,dt$

dividendo ambo i membri per v otteniamo

$$\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} = \frac{-k\mathrm{v}\,dt}{\mathrm{v}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} = -k\,dt$$

integrando ambo i membri nelle rispettive variabili : $\int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{v}\, dv = \int_0^t -k\; dt$

⇨ $\ln v(t) - \ln v_0 = -kt$ ossia $\ln \frac{v(t)}{v_0} = -kt$

da cui $v(t) = v_0 e^{-kt}$ → la velocita' decresce esponenzialmente nel tempo

⇨ "***moto rettilineo smorzato esponenzialmente***"

→ moto caratteristico di corpi materiali in moto in un mezzo ''viscoso'' da $\mathrm{v} = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int \mathrm{v}\,dt$ quindi $x(t) = x_0 + \int_0^t \mathrm{v}_0 e^{-kt'} dt' =$

$$x_0 - \frac{\mathrm{v}_0}{k} e^{-kt'} \Big|_0^t \Rightarrow \quad x(t) = x_0 - \frac{\mathrm{v}_0}{k}\left(e^{-kt} - 1\right)$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) \quad \text{se } x_0 = 0 \quad x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

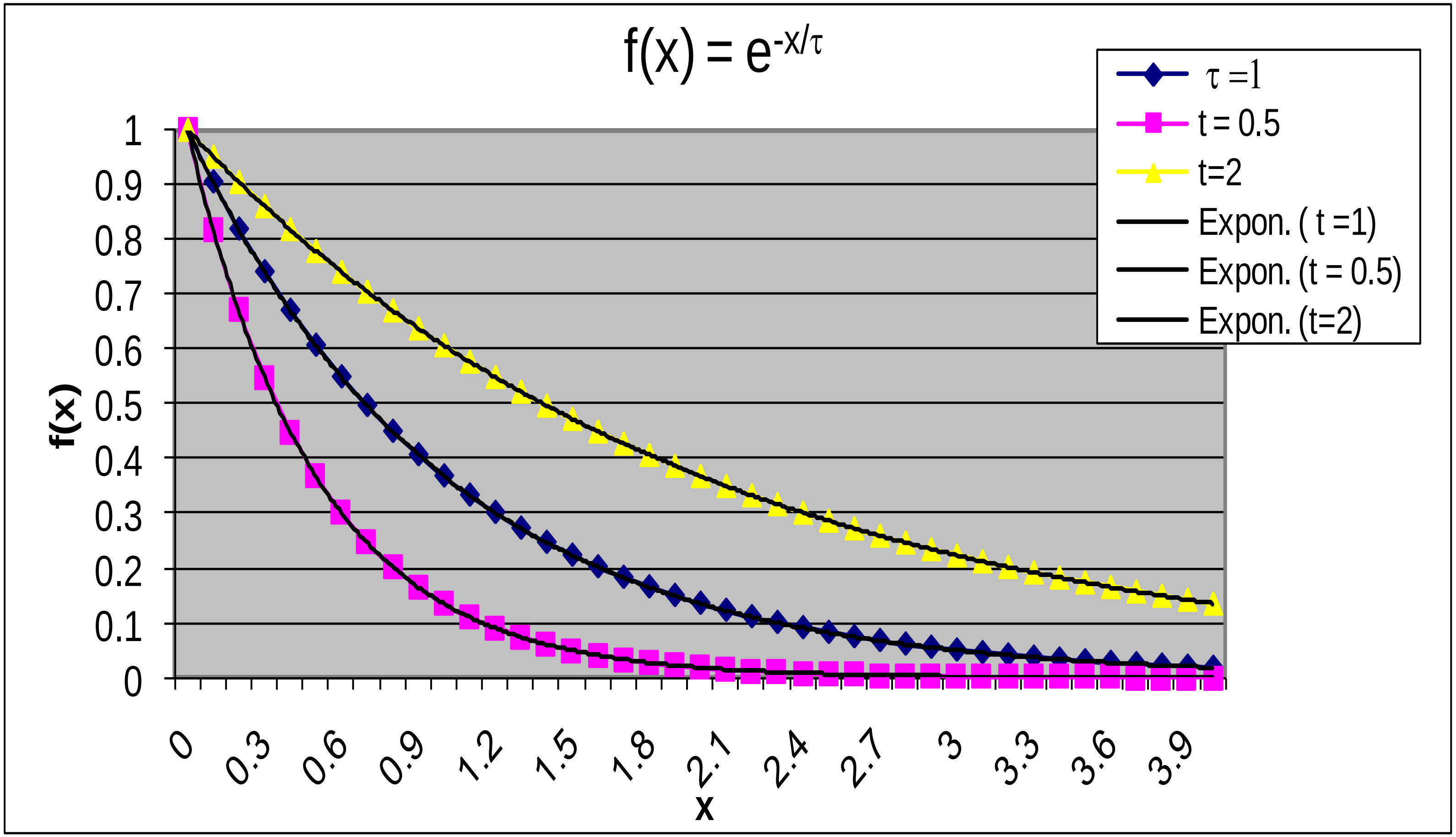
la rapidita' di variazione della funzione e' determinata dal valore di k

$\tau = 1/k$ e' la "*costante di tempo*" o " *vita media* "

τ e' il tempo dopo il quale la funzione si e' ridotta di un fattore pari al numero di Nepero e , ossia di un fattore circa 2.7

il tempo di dimezzamento $t_{1/2}$ e' quel tempo dopo il quale la funzione si e' ridotta della meta', rispetto al valore iniziale

$$t_{1/2} = 0.693\,\tau$$



f(x) = e^-x/τ
τ =1
t = 0.5
t=2
Expon. (t =1)
Expon. (t = 0.5)
Expon. (t=2)
f(x)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.3
0.6
0.9
1.2
1.5
1.8
2.1
2.4
2.7
3
3.3
3.6
3.9
x

Moto armonico semplice (asse x)

se $a(t) = -\omega^2 x(t)$ → moto *armonico semplice*

risulta che le equazioni orarie per lo spostamento e la velocita' sono

funzioni armoniche, ossia

$x(t) = A\cos(\omega t + \vartheta_0)$ o, indifferentemente, $x(t) = A\,sen(\omega t + \vartheta_0^{'})$

A → ampiezza del moto

ω → pulsazione

θ_0 e θ'_0 → fasi iniziali

Esempio : moto armonico semplice *sinusoidale*

se

$$a(t) = A sen(\omega t)$$

$$\mathrm{v}(t) = \int a(t)\, dt$$

$$-\frac{A}{\omega}\cos(\omega t)$$

a meno di una costante
di integrazione

$$x(t) = \int \mathrm{v}(t) dt$$

$$-\frac{A}{\omega^2} sen(\omega t)$$

a meno di una costante
di integrazione

se

$$a(t) = A\cos(\omega t)$$

$$\frac{A}{\omega} sen(\omega t)$$

$$-\frac{A}{\omega^2}\cos(\omega t)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

in generale $a(t) = A sen(\omega t + \vartheta_0)$ o anche $a(t) = A sen(\omega t + \vartheta_0')$

A → ampiezza del moto ω → pulsazione ϑ_0 , ϑ_0' → fasi iniziali derivando l'equazione oraria dello spostamento $x(t) = A cos(\omega t + \vartheta_0)$

si ha $\mathrm{v}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \vartheta_0)$

$$a(t) = \frac{d\mathrm{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \vartheta_0)$$

ossia $\boxed{\dfrac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$ → **equazione del moto (dell'oscillatore) armónico semplice** se una qualsiasi grandezza y di un sistema fisico soddisfa all' equazione

differenziale

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

allora y oscilla nel tempo con andamento armonico non smorzato

Nota Bene: bisognerebbe dimostrare non solo che le funzioni armoniche sono le soluzioni dell'equazione differenziale del moto armonico semplice , ma anche che sono le sole soluzioni

1) esistenza della soluzione

2) unicita' della soluzione

matematica

e viceversa :

se una grandezza fisica oscilla con andamento di tipo armonico nel tempo

deve soddisfare a questo tipo di equazione differenziale

Moto in una dimensione

riepilogando se

$a(t) = 0$ → moto ***rettilineo uniforme***

$a(t) = cost = a$ → moto ***rettilineo uniformemente accelerato***

$a(t) = -k\ \mathrm{v}(t)$ con $k > 0$ → moto ***rettilineo smorzato esponenzialmente***

$a(t) = -\ \omega^2 x(t)$ → moto ***rettilineo armonico semplice***

nel caso piu' generale possibile l'accelerazione potra' essere una generica funzione

$$a = f(x, \mathrm{v}, t)$$

Moto in una dimensione

combinazione di moti rettilinei :

se $x(t) = A(t)sen(\omega t + \vartheta_0) + x_0$ dove $A(t) = Ae^{-kt}$

ossia se $x(t) = Ae^{-kt}sen(\omega t + \vartheta_0) + x_0$

si parla di moto *armonico smorzato esponenzialmente*

$$\mathrm{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -kAe^{-kt}sen(\omega t + \vartheta_0) + Ae^{-kt}\omega cos(\omega t + \vartheta_0)$$

⇨ $$\mathrm{v}(t) = Ae^{-kt}\left(\omega cos(\omega t + \vartheta_0) - ksen(\omega t + \vartheta_0)\right)$$

derivando la $\mathrm{v}(t) = Ae^{-kt}\left(\omega cos(\omega t+\vartheta_0) - ksen(\omega t+\vartheta_0)\right)$ si ha

$$a(t) = \frac{d\mathrm{v}(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} =$$

$$= -Ak\omega e^{-kt}cos(\omega t+\vartheta_0) - A\omega^2 e^{-kt}sen(\omega t+\vartheta_0)$$

$$+Ak^2e^{-kt}sen(\omega t+\vartheta_0) \; - Ae^{-kt}k\omega \; cos(\omega t+\vartheta_0)$$

$$a(t) = Ae^{-kt}\left((k^2-\omega^2)sen(\omega t+\vartheta_0) - 2k \;\; \omega cos(\omega t+\vartheta_0)\right)$$

l'equazione differenziale caratteristica e'

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + (\omega^2+k^2)x = 0$$

→ **equazione dell'oscillatore armonico smorzato esponenzialmente**

Backup slides